

「数学的活動」の最適化

黒崎東洋郎¹⁾、森川唯²⁾

算数・数学教育では「数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、『数学的に考える』という資質・能力を育成する方向が示されている(2017)。考える力の育成を叫ぶけれども、「個別最適な学び」「協働的な学び」という指導方法・授業スタイルに眼を奪われている。数学的活動は、「数学的に考える力」を育成する中心的な学習活動であるが、数学的な活動の在り方を分析・検討することには熱心でなく、教科書どおりのきまり切った活動をさせている。数学的活動には、外的活動と内的活動があり、どんな数学的活動にすれば最適化できるのかは容易ではない。外的な操作的活動は数理的なイメージを生み出す思考を促す。内的な数学的活動は直観的な数理的イメージを内面化し言語や記号と結びつけて、算数の概念や原理を形成する思考を生成する。外的及び内的な数学的活動は、相互に関連しつつ、シンクロしながら数理的思考を促進していくので、固定的に捉えないで、弾力的・機能的に捉えることが大切である。どのような活動にすれば、数学的に考える力は創発し、生成することができるのか、数学的活動の最適化を探究することは喫緊の課題である。

キーワード： 活動主義の算数教育 考える力 数学的活動 最適化

1 問題の所在

「算数を何を学ばよいか」という問いに、算数教育を担当する教員は「考える力」と答えるのが一般的である。こう答えながらも、もう一方で「どんな授業がよい授業か」と問われると、「子どもが『分かった』とか、『できた』と実感する授業である」という。頭の中では「考える力」が大切と考えながら、実際の授業では知識・技能に重点を置いている状況がある。まさに、理論と実践のズレがある。新しく「個別最適な授業」が提唱されると、資質・能力をそっちのけにして、授業スタイルを重視して取り組む学校・教員が実に多い。新規性はあるものの、従前の「個を生かす授業」とどこが違うのか深く考えないのである。子どもの個人差や個性差に応じて、自立的、協働的に「分かった」「できた」と実感する授業を大切にする授業は否定するものではない。「分かる」「できる」に至るまでのアプローチやその過程で、数量や図形について自ら学び続けるために、どのような数学力を育成しようとするのか、あまり分析・検討が進んでいない現状が見受けられる。知識・技能を習得するまでの数学的な活動過程において指導者は子どもがどんな「気づき」「着想」を創発し、どのような数学力を創造して新たな知識・技能をつくっているか、算数をつくる文脈に着目していない場合が少なくない。結果に目を奪

われ、算数の概念を形成する過程のどんな活動によって、どのような内発的な数学力が創発され、有機的、機能的に新たな知識・技能の形成につながっていくのか、算数をつくる過程に注意を払っていない観がある。算数をつくる活動や、それから内発される原動力を注視しない指導には、「I understand what you mean, but, it doesn't make sense」、つまり、「指導する意味が分からない」と思わざるを得ない。Rogers は、「算数の静的な知識を教えても、変革の時代には役に立たない」と指摘している(1967)。算数の知識は習得させる意味がないと述べているのではない。本当の算数の知識を習得するとは、「算数の知識の創り方が分かる」「算数の知識の使い方が分かる」という質的に完成度が高い、機能性を有しているということである。単に、メモリーとして覚えることではない。課題発見・解決に当たっては、自分の有する知識を使って、事象に数理的に働きかける数学力が大事である。自ら学び、自ら考えるという数学力の原動力が「数学的に考える力」なのである。算数科では数学的思考力が、「数学的な考え方」から「数学的に考える」へと平易な明瞭・簡潔な表現に改訂された(2017)。理由は、「考える」と「考え方」では、意味が違うのではないかという認識論争が続いた経緯がある。「数学的に考える」と用語改訂しても、「数学的に考える」を説明仕切れるもの

1) 岡山大学名誉教授 2) 倉敷市立玉島南小学校教諭

ではない。

問題は教科書通りのきまり切った考えを形式的に教え込み、「数学的に考える」ことができたと評価する人が少なくない現状である。Davis(1987)は、数学的に考えることは易しくないし、言語で説明することも難しいという。事象を数理的に頭の中であれこれと試行錯誤的に考えを思い巡らせて思考する様相は、実に複雑で、アプローチも様々な創造的な思考活動である。それなのに、その思考過程を教師は教科書通りの考えを子どもに教えればよいと考え、言語、記号で安易に形式的に定型化する傾向がみられる。数学的に考える力は、教科書により与えることができるものではない。子ども自身が、自立的に事象にあれこれと試行錯誤的に見方・考え方を働かせてかわくという数学的活動のプロセスの中で、子どもの活動から内発される。子どもの数学的活動から、指導者は注意深く内発される「数学的に考える力」に「気づき」「感じる」必要がある。それは、子どもの「考える」は、数学的直観力、操作的思考、図的思考のように、言語化、記号化できない複雑で多様な「数学的に考える」を含むからである。

ところが、数学的に考える力を育成するための子どもの学習活動、つまり、数学的活動の分析・探究活動はあまり進んでおらず、どんな数学的活動にすれば数学的な考えが内発的に生成できるのかを探究する必要がある。

2 活動主義の算数教育

子ども自らが考えて課題を発見したり、課題解決したりする自立的な学びを期待する。そのため、授業中の各場面で「考えましょう」と声かけすることが一番多い教科と言われる。ところが、声かけに促進されて子どもの思考が進むような簡単なことではない。G.Polya(1951)は「似た問題はないか」「役に立つ知識はないか」と手助けすることを述べている。一見相応しい手助けの感じがするが、子どもには「どんな問題が似ているのか」「役に立つ知識は何なのか」具体的に思い付かない。若手教員も「何か、考えさせる上手い手はないか」と先輩教員に聞くことが多い。「習った知識・技能を活用させればよい」と助言されても、習った知識・技能が習得されているとは限らず、有効性が無いため、教科書を頼らざるを得ない。教科書には、数学的な見方・考

え方や数学的に考える過程が既に書かれている。そのため、その通りにまねて解決させる。結果、数学的な見方・考え方や数学的な考えを教科書通りまねてはみても、それは子どもの能動的な数学的活動の内面から生じられたものではなく、教科書という外部からの注入でしかない。そのように見方・考え方に着目し、数学的に考えることでは画一的な思考形式を知識として教え込んでいるだけで、数学的に考えることは指導していない。数学的に考える力は、教科書の「ものまね」をして生まれるものでない。自ら学び、自ら考えるという数学的活動を通して、内面から創造的に生成される思考である。変革の時代にあっては、教科書通りに問題発見、解決する事象はない。出来事に直面した場合、自らかかわって、自立的に活動する中で、本当の課題を見つけ、多面的な見方・考え方から考えて、創造的に対処するしかない。

「考えさせる教育は可能か」を説く佐伯胖は、教師の教育技術論で考えることは教育できないと述べ、「考えるとは、活動の一種である」と言う。活動は火山のマグマのように絶えず変化する兆候があり、内面から考える力を生成する活動と位置づけ、数学的活動の有機的な価値を述べている(1991)。

算数の知識・技能などを学ぶ力を獲得するための学びの原理・原則を、教育学の専門家である Duwey は、「為すことによって学ぶ」と子どもが活動する教育的価値を主張する。規律を重んじる小学校教師の中には、教師の方(黒板)を向いて学ぶのを「よし」と評価する人がいる。これは耳を働かせるだけの座学中心の静的な Teaching である。子どもが算数を学ぶ喜びや躍動感をスポイルしている。算数を学ぶ発達段階の子どもは、活動的に学ぶことを好む。活動を通して自ら学び、考えるのが子ども本来の学びの姿である。能動的に事象に関わり、算数の課題を見つけ、自分なりに操作的活動し、習った知識をあれこれ試行錯誤して活用する活動を通して数理的に考え、数や図形概念や原理を探究する Active、learning の学びをする。

認知と思考は関連性が高い。認知論的視座から、Piaget(認知心理学)は、構成主義の数学思考論に立って「行動と操作を抽象化することで数学的な概念や原理を構成する」と行動の重要性を述べている。Piaget のいうこ

の操作的思考は、頭の中で言語・記号を操作して内的に数学的に考える「念頭操作」あるいは「思考実験」を意味し、抽象度の高い内的な数学的活動を意味する。頭の中で数学的な考えを進める思考は operation であり、学習指導要領のいう具体的を使った操作的活動 (manipulation) とは活動に質的レベルの違いがあり、算数科の到達目標に該当する。これに対して、同じ認知心理学者の Bruner は、算数の概念・原理は抽象的で子どもが数学的に関わって思考することは困難であるとし、「行動的思考段階」「映像的思考段階」「記号的思考段階」という発達に応じた3段階の数学的に考える EIS 理論を提唱する。第1段階は、抽象的な数、図形を具体的な事物、事象に置き換え、具体的に操作して関わる行動的把握の段階を述べている。行動的に取り組めば、数量や図形の意味や性質を五感を通して捉えられ、数学的に考えやすくなり、実感も得られるとする。第2段階の映像的思考段階では、具体物を操作するしたことを図に表し、頭の中の図的イメージによって図的思考の段階へとステップアップすることを述べている。最終的な記号的思考段階では、図的イメージを内面化して言語や記号と結びつけ、抽象度の高くなる言語的・記号を使って思考できるようにすることを述べている。この EIS 理論は直線的なアプローチと批判する人もあるが、そうではない。必要に応じて記号的段階から行動的段階、映像的段階へ可逆的に自由に往還できる数学モデルと捉えるのが適切である。中原 (2013) は、Bruner の「記号的思考段階」は記号と言っても「言語」と「数、式、記号」ではギャップが大きいため、「記号的思考段階」を「言語的段階」と「記号的段階」に分離して5段階の数学的表現段階を提唱している。なお、「表現力」と「思考力」は、同じ資質・能力ではないが、操作的表現、図的表現、言語・記号的表現を媒介に数学的に考えるので、表現活動と考える活動は表裏一体で不可分の関係性にある。例えば、第1学年の9+3の計算の仕方は、ブロックの操作の過程を観察すれば、どのように考えたかは分かる。自分の考えを説明するためには、ブロックを操作しながら言葉や数・式をつかって説明すると、数学的に表現することが容易になり、聞き手の共感も得やすい。

ここで、学習指導要領解説算数編において活

動がどのような置づけで取り扱われてきたのかを言及する。操作的活動は、特に、昭和52年の学習指導要領の改訂で、基礎・基本を徹底するための有効な指導方法として強調された。平成10年の改訂で操作的活動は、作業的・体験的活動を含む「算数的活動」へと拡張され用語も変更された。さらに、平成20年の改訂では、位置づけが以下の通り大きく変更された。

＜算数科の目標＞

算数的活動を通して、数量や図形についての基礎的・基本的な知識及び技能を身に付け、日常事象について筋道を立てて考え、表現する能力を育てるとともに、(以下省略)

目標の冒頭に「算数的活動を通して」と示し、算数的活動を基にする基本・基本の指導方針を告知した。知識・技能や筋道を立てて考える力、さらに学習意欲など全部を、算数的活動を通して育成する方針が明示された。算数的活動は「指導方法」と捉えていた教師に、初めて、「目標」や「指導内容」でもであると告知され、大きな戸惑いと混乱が生まれた。このため、わざわざ、算数編の内容に[算数的活動]の例示が示された。そして、変革の時代に相応しい資質・能力の育成が世界中で叫ばれ、平成29年度の改訂では、活動を通して「数学的に考える」が相応しい思考力であると告知された。算数・数学教育の一貫性の観点から、算数的活動は「数学的活動」に改訂された。すなわち、算数・数学科の目標は、「数学的な見方・考え方を働かせ、数学的な活動を通して、数学的に考える資質・能力を育成する」と告知された。目標の冒頭にこそ「数学的活動を通して」と示されていないが、子どもの能動的・自立的な学習活動である数学的活動を基にして、数学的に考える力を育成する方針は普遍である。

3 「活動」とその位置づけの変遷

2で述べた通り、活動重視の算数教育は、戦後の学習指導要領(昭和26年)以降、おはじきやブロックなどの具体物を手で動かす操作的活動が指導方法として重視されてきた。操作的活動重視と言いながら、子どもではなく、教師が操作的活動をやって見せる授業が多い。この傾向は、残念ながら今も続いている。

算数・数学危機が叫ばれた時(1995)、学習意欲を高める切り札として体験や活動が重視され、

操作的活動は「算数的活動」に改訂された（中学校「数学」：「数学的活動」重視）。算数的活動は、従前の操作的活動に作業的・体験的活動や内的活動を含むと定義された。この時の改訂では、指導内容を30%縮減する「ゆとり教育」の是非を問う学力論争が過熱化し、算数的活動の研究は後回しにされた。平成10年の学習指導要領の改訂で目標の冒頭に「算数的活動を通して、・・・」と示し、突然、算数的活動が「目標」

「指導内容」「指導方法」であると告知され、大きな出来事となった。算数的活動を指導方法と捉えていた教師の戸惑いは大きく、「目標」や「指導内容」になる算数的活動とは何かと、大きな困惑感が生まれた。しかも、「児童が目的意識をもって主体的に取り組む活動」と抽象的な解説は、捉え処がなく、説得力を欠いた。操作的活動や作業的・体験的活動の他に、「算数の知識を基に発展的、応用的に考える活動」「考えを説明し、話し合う活動」なども算数的活動と解説された。この解説は、問題解決学習の過程の学習活動を総花的に言い換えているだけと捉えられ、算数の学習活動ならすべて算数的活動という勝手な解釈も生まれた。そのため、指導要領の各学年の内容2の最後の項目に[算数的活動]としてわざわざ具体的に例示も示された。ところが、事例のみが算数的活動と受け止める人も現れ、個別的、実践的な取り組みは多くみられたものの、算数的活動をコアにする新たな算数教育の授業改善・改革につながる取り組みは少なく、期待する程の進展は生まれなかった。

予測困難な時代に直面し、世界中が変革の時代に相応しい資質・能力の育成を探究するようになった。日本の算数・数学教育も大改訂が実行された(平成29年)。「数学的な考え方」を「数学的に考える」とし、数学的活動を通して育成する基本方針が告知された。数学的に考えるという資質・能力を育成するためには、算数・数学の一貫教育に資する相応しい活動として、従前の「算数的活動」は「数学的活動」と整理統合された。改訂された数学的活動は、「事象を数理的に捉えて、算数の問題を見だし、問題を自立的、協働的に解決する過程を遂行することである」と定義されている。数学的活動は、問題発見・解決の過程における様々な場での活動を数学的活動として包括的に述べている。算数のどんな学びの場や段階で、どのような活動にすれば、変革の時代に相応しい「数学的に考える力」を内面的に創発するのか、その分

析・検討をすることが喫緊の課題となっている。

従前は、「日常生活や社会の事象を数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題を解決し、解決過程を振り返り得られた結果の意味を考察する」という現実世界の数学化が、算数科は主流であった。ところが、新たに系統的な学びを重視して、「数学の事象について統合的・発展的に捉えて新たな問題を設定し、数学的に処理し、問題を解決し、解決過程を振り返って概念を形成したり、体系化したりする」という数学の世界を数学化する問題発見・解決学習をも求めている。算数の問題発見・解決学習をデュアルシステムで構成し、実現することを求めているのである。決まり切った指導として日常事象の数理化するのではなく、教材の位置づけを多角的に分析・考察して「数学事象を統合・発展的に捉えて新たな課題を設定する」という数学的活動を開発することが求められている。

4 数学的活動の役割

数学的活動の主要な役割は、目標の解説で述べられている通り、「数学的に考える」という資質・能力の育成である。それは、事象を数学的に考えることによって数量や図形の概念や性質は形成されるとみなすことができるからである。数学的に考える力を育成するため、「何か上手い指導方法はないものかと技術的方法論を探索する」教師は少なくない。そのように安直に数学的に考える力を創発できるものではない。「技術的方法によって誰も与えられない。子ども自ら発達すべきである」と、バーガー、マッキンタイヤーは述べていることに同意する。借り物ではなく、子ども自らの数学的活動によって内面から生成される思考力は、同じ考えに見えても、微妙に異なるアイデンティティを有する。それなのに、教師が一方的に教科書どおりの考えに画一的にまとめ上げていく場合が意外に多い。

「数学的活動の取り扱いにおける配慮事項」に示す通り、算数の知識・技能の習得、新たな学びに向かう力を付ける場合についても数学的活動は、主要な数学的に考える力を生成する働きをする。知識を形成する場合、思考・表現する場合、意欲付けの場合の各場面で数学的活動が中心的な役割を果たすものではあるが、各場面の目的達成に相応しい最適な数学的活動にする必要がある。意欲付けの場面では、事象について数学的な関心・意欲を創発する外的活動または内面的数学的活動を通して新たな課題を意

識し、発見する考える力が必要である。自力解決場面の数学的活動は、教材の前後関係から多様な数学的活動が考えられ、新たな数量や図形概念や原理の形成の原動力となる数学的に考える力も連動して多角的な思考力となる。どんな数学的な活動が相応しいか、多角的・分析が不可欠である。課題解決の過程や結果を振り返って省察する数学的活動を通して、協働的・批判的に考えて精緻な概念にブラッシュアップしていく。算数の学びは1回のサイクルでは終わらない。課題解決しても、新たな課題が生まれ、数学的活動を通じた探究活動が不断に続き、次々と新たな算数の概念や原理を統合的・発展的に考察し続けて真正の算数の学びを発達させていく。こうしたサイクリックな真正の学びを実現する原動力として数学的に考える力は位置付くと考える。つまり、「知識」、「思考力・表現力」「学びに向かう力」の3つをつなぐのが「数学的に考える」であり、この考える力を次々と内発する地下のマグマが数学的活動であると考えられる。

5 数学的活動と数学的思考の関連

算数の問題発見・解決過程における主要な学習活動は数学的活動である。数学的活動は、「事象を数理的に捉えて算数の問題を見だし、問題を自立的、協働的に解決する過程を遂行する活動」と定義されている。主要な役割は4で述べた通り、「数学的に考える（思考力）」を生成し、発達させることにある。「数学的に考える」は、従前は、「数学的な見方・考え方」と捉えて研究されてきたが、「考え」ではなく「考え方」という語感が数学的思考力というよりも思考方法論とみなされるという問題があった。新しく数学的思考力は「数学的に考える」であると平易な用語に置き換えても、説明仕切れるものではない。学習指導要領で「筋道を立てて考える」が目標にあり、これを「数学的に考える」だという人もいる。筋道を立てて考える論理的思考は、算数科に限ったものではない。筋道を立てて考えることは他の教科・領域でも重視されている。論理的思考には、「類推的思考」、「帰納的思考」、「演繹的思考」の3つがある。算数科では、1事例を取りあげて類推思考させる授業が多い。数事例から帰納的に考えさせたり、習った知識を活用して演繹的に考えさせたりするように次第に移行すべきである。学習指導要領は、筋道を立てて考えることを目指しているが、子どもの思考の流れは、試行錯誤的で、行き詰まる

と、別の考えに変化する。Steen は「直線に思考するとは限らず、多角的な複数路線で思考する」と述べている(1999)。

ここで、各学び段階の数学的活動を通して子どもが創発すべき思考面の特徴を述べたい。

(1) 課題発見の数学的活動と思考

「日常生活を数理化する活動」を通して課題発見する場合と「既習の算数を拡張して統合的・発展的に捉える活動」を通して、新たな課題を設定する場合では、数学的活動も創発される「数学的な考える」は同じではない。どのような違いがあるのであろうか。

① 生活を数理化する数学的活動と思考

——<直観的思考>

子どもの身近な生活場面を数学的な見方・考え方を働かせて数理化する場では、生活場面をパッと観て瞬時に本質的な数量や図形にまつわる概要を直観的に捉える力は数学的直観力と言える。「直観によって論理が始まる」と言われるが、生活から瞬時に数量や図形につながる本質的な疑問や問いを意識して課題発見につなげる力は、数学的直観力とみなすことができる。

② 算数を数学化する数学的活動と思考

——<統合的・発展的思考>

算数科ほど学びを系統的・体系的に積み上げて行く教科は他にはない。算数の学びはゼロベース（日常事象）からではなく、既に習った算数の概念や原理を出発点にして、統合的・発展的に拡張して発見することが大切である。エンゲストロームは、学びを拡張する原動力は、拡散思考ではなく、垂直思考であると述べている。中島（2015）も統合的・発展的に考えることが相応しいと述べ、系統性のある垂直思考を推奨している。中央教育審議会（2017）でも、第二の課題発見・解決過程として、「数学の数学化」を取りあげ、

「数学事象を統合的・発展的に考えて、新たな課題を設定する」

と、課題発見において統合的・発展的に考えることを強調する。第二のアプローチは、中学校「数学」が相応しいと考える人もいる。しかしながら、系統的に算数の学びを積み上げ続ける算数科の特性を勘案すれば、分析・検討した上で、第二の「数学の数学化」を目指して課題設定を実行する方が最適と考える。もちろん、容易ではないが、系統的指導力の脆弱な教師のカリキュラムマネジメント力を発達させるとともに、学ぶ力の脆弱な子どもに統合的・発展的に新し

い算数の課題発見を促し、自立的な算数の学びを自己決定する。方策としては、既習の算数を拡張を促進する数学的活動を設定し、系統的に教材の前後関係を意識的に探究しやすくする。自ら考える数学的活動を通して、何が分かっている、何が分からないのか、探究すべき新たな課題に気付く「数学的活動」にする。例えば、方策としては、「what if not」という数学的活動が考えられる（ブラウン、ワルター、1986）。第5学年の「小数のかけ算」を用いる場面で述べる。「1 m80 円のリボン 2.3 mでは何円か」という乗数が小数に拡張する問題では、「単価×買った長さ」という言葉の式を援用して、小数の乗法の場面理解を導く授業がある。言葉の式の援用は否定はするものではない。しかし、「単項演算」「二項演算」といった演算概念を基礎にする「数学事象の数学化」のアプローチに進むことが可能なのに、道を切り拓いて数学力を発達させようとしていないのは問題である。数学の事象について統合的・発展的に捉えて新たな課題を設定するには、唐突に未知の 2.3 mという数値を与え、言葉の式の援用で教え込むものではない。例えば、意図的に買った長さを□mとし、□に当てはまる数値を「what if not?」を出発点にして、子ども自ら既知の整数から思考を進め、整数の場面を未知の数値の小数に子ども自身が拡張する活動にする数学的活動を工夫する必要がある。こうすることで、子どもは if 思考を創発し、□の値がもし既習の 2 m、3 mでは、 80×2 、 80×3 の式になり、もし、2.3 mと小数になったときも同じように 80×2.3 の式になると拡張して考えるようになると想定される。ここから本当の統合的・発展的に考える学びが始まる。つまり、「なぜ、かけ算になるのかな?」と、自問自答し始めていくのである。

・□mの値が2、3のとき・・・ 80×2 、 80×3 同じように、□の当てはまる数が 2.3 になったから。

・□mの値が 2.3 のとき・・・ 80×2.3 と形式不易的に帰納的に考えて説明する。この説明は、根拠が不明瞭で、小数のかけ算の意味を統合的・発展的に捉えているものではない。そこで、小数のかけ算の式の表す意味を深く探究させるために、2 mのときは、「なぜ 80×2 の式になるのか」と「 $\times 2$ 」の意味を反省的思考を働かせて問い直させる。大抵の場合、2 mの値段は「1 m80 円の 2 つつ分だから」と既有的「単位の いくつつ分」という考えを基にして説明する。

続いて、「 80×2.3 の式になるのは、なぜ」と説明を求めるようにする。この場面がザッケローニのいう PTM（指導者が本当に関わるべき授業の山場）である。無意識に「1 m80 円の 2.3 つつ分」と、「いくつつ分」で答える子どももいるが、「いくつつ分」を整数を表した経験意識が強い子どもから、「あれ！2.3 つつ分とは言わないよ」と異論がでて、戸惑い始める。この戸惑いを見逃さないで、「2 つつ分、3 つつ分」と表現するけれど、「2.3 つつ分」とは表現できないことを強く意識させていく。こうして生まれた戸惑い、不協和を共有化して、「 80×2.3 の計算の意味をどう考えたらよいのだろう」と新たな課題を設定する。こうすることで、かけ算の意味を再考して「何のいくつつ分」と「何の 何倍」を想起し、「何の 何倍」という見方に発想転換して考える。すると、「2 mの値段は、1 m80 円の 2 倍」とし、2.3 mの値段は「1 m80 円の 2.3 倍の値段になる」と整合性のある考えを生成する。重要な PTM は、かける数が整数から小数に拡張されても、共通するのは「倍で考える」のが自然、という気づきである。この気づきこそが、整数の場合と関連付けて、統合的・発展的に小数のかけ算の意味を体系的に捉え直して乗法概念を体系的に形成させていく成否の鍵を握る数学的な考えである。倍概念を基に演算の意味を統合的・発展的に考えることは易しくないが、第6学年で分数倍へとさらに拡張・深化する大切な「数学的に考える力」である。

（2）自力解決する数学的活動と思考

自立的に解決する段階の数学的活動と思考は多様である。6 年間という算数を学ぶ発達段階においては、数学的活動や思考は、質量ともに各段の差があると考えられる。

- ① 低学年の場合
- ＜試行錯誤的思考＞
 - ＜操作的思考＞
 - ＜図的思考＞

初期の段階から数量や図形の課題を頭の中で考えることは無理である。ブロックを手で操作して試行錯誤的に操作的思考したり、絵やテープ図にかいて図的思考したりする。低学年の子どもは活動的で、「活動を通して数学的に考える」の発達段階に適している。操作的思考⇒図的思考へとごく自然に発達させるのが普通である。

- ② 高学年の場合
- ＜操作的・図的思考＞
 - ＜言語・記号的思考＞

高学年になっても、外的な活動を伴う操作的思考、図的思考が相応しい場合もある。しかし、

系統的に学ぶ算数科にあつては、出発点が常に操作的思考、図的思考とは限らない。既に知っている知識を活用して言語的、記号的思考の方が最適と考えられる場なのに、操作活動を押しつけている授業がある。操作的活動や図を用いるイメージ思考を内面化し、逐次、言葉や数式と結びつけ、言語思考、記号的思考できるようにすることが相応しい。

(3) 振り返って検討する数学的活動と思考

自力解決したら終わりではなく、解決過程や結果を振り返って自分の考えと他者の考えを照らし合わせて協働的に省察して考えを深めることが大切である。協働的な振り返りには、「説明する段階の場面」「協議する段階の場面」の2つの場がある。

① 説明する活動と思考——

＜筋道を立てて考える＞

協働的に学ぶには、まず、自力解決を通して見いだした互いの考えを情報交換する足場を設定し、自分の考えを理路整然と分かり易く説明する数学的活動が大切である。動的な操作や視覚に訴える図を援用したり、共有する知識を活用したりして、考えを分かりやすく説明する。それには、根拠を基に筋道を立てて説明し、他者が考えを苦も無く自然と受け入れて理解や共感を生むようにする必要がある。このような説明にするには論理的思考、すなわち、筋道を立てて考える力が主要な働きをする。

② 検討する活動と思考

＜批判的思考力＞

＜論理的思考力＞

結果や問題解決の過程を振り返り、協働的に省察する数学的活動では、批判的な思考を働かせ、疑問が生じれば質問し、自分の考えとズレを感じたら異論や反論を述べ、議論する中で考えを精緻に深めることが大切である。松下(2017)は、協働的な学びになっていないと指摘し、「グループワークの設定」「座席の配置」などの授業スタイルではなく、情報発信された考えは、根拠は何か、操作的思考を言語・記号化するとどのように結びついて概念形成されるのかそのアプローチが重要と述べている。多様な考えを通り一辺倒に説明させ、質問や意見はないかと問い、無ければ教師が補足説明する授業をよく見かける。そこには、結果や解決過程を振り返って協働的に検討する省察活動の場を設定されていない状態がある。

操作的思考、図的思考をして終わりではない。他者の考えの参画を促し、協働的に言語・記号

と結びつけて内面化することが大切である。逆に、言語・記号的思考の考えは、操作的活用や図的活動に置き換えて可逆的に議論し、内的な活動と外的な活動を往還して、思考の融合・一体化を図ることが大切である。

さらに、記号的思考して創った新しい概念を既習の体系に関連付けることも大事である。例えば、第3学年の $2/7+3/7$ の基本的な考えである「 $1/7$ が $(2+3)$ こ」は、既習の $2+3$ 、 $20+30$ と関連付けて、統合・発展的に学びの系統性を強く意識させたいと考える。それは、新しい算数の概念を既習のものと関連付けて体系化する指導が極めて乏しいからである。従前の知識と関連付けて、どのように拡張して深化したかを強く意識させることは、算数の学びの発達を共通認識できる機能がある。体系化は、中学校「数学」以降の話ではなく、算数指導でも適時、小さな体系化を促進し、発達させるべきである。

6 数学的活動を最適化する原理

数学的活動の主要な目的は既に述べた通り、「数学的に考える力」の育成にある。では、どのような数学的活動を構成することが大事なのであろうか。数学的に考えることが重要としながらも、それを内発する「数学的活動」を最適化する要因や原理の探究は進んでいない。

数学的な学びは、「課題発見」「自力解決」「振り返って省察」など、各段階の活動は、目的に応じた特徴的な数学的活動で構成される。各段階の数学的活動の目的が違えば、活動から内発される思考も違う。

「為すことによって学ぶ」と主張するDewey(1988)は、行動と思考の一体性を提唱する。これは、数学的活動と数学的思考の表裏一体性を強調していると考えられる。また、Dienes(1977)も「力動性の原理」「活動性の原理」の重要性を指摘し、数学的活動を通して深く考えることで数学的な概念や原理が構成されるという活動の重要性、優先性を述べている。そこで、どのような数学的活動を構成すれば最適化を図れるのか、要因、原理を分析する。

① ねらいの明確な活動にする：＜目的性原理＞

数学的活動については、「児童が目的意識をもって主体的に取り組む活動」(学習指導要領解説、2017)と活動の目的の重要性を示している。Tolman(1932)は、行動は目的指向性があり、目的を達成するためにどの道を選択するかを自己決定して継続的に行動すると言う。算数の学

びでは、目標が「課題発見」「自力解決」「考えを深める省察」のいずれにあるのかで、数学的活動の目的は異なる。どの学びの場にあっても、数学的活動の目的を強く意識し、目的と照らし合わせて数学的に考える数学的活動にすることが大切である。前述した第 5 学年の小数のかけ算についての課題発見では、「1 m80 円のリボン□mでは何円か」の条件不足の問題について、□に当てはまる数量を既習の整数の場合から小数の場合へと統合的・発展的に拡張して考えを進めていく。そして、□の値が 2.3 の場合、立式した 80×2.3 の演算の意味が「何の いくつ分」では説明仕切れない危機的場面に直面し、発想を転換して未知の演算意味を再構成するため、新たな課題「どのように考えれば説明できるのか深く考えよう」を発見することが大切である。こうした目的意識を強く自覚して行う活動こそ、課題発見という目的に相応しい数学的活動であり、その過程で内発されるのが統合的・発展的に考える力である。

② 自らの活動にする：＜自由性原理＞

事象に数学的に関わっていく活動は、子ども自らが創発する見方・考え方で活動していくものあってこそ、数学的活動は数学的に考える力を内発する役割を発揮するものである。しかし、教師が教科書通りの着想や活動を示範して見せたり、DX プロジェクト通りのプログラムを援用してパソコン操作させたりして、子ども自身の発想で自己活動する数学的な活動が意外と欠落している。これらの活動は他者のプログラミング思考のものまねであり、子どもが試行錯誤する中で見いだす操作思考、図的思考の流れとかけ離れている。算数科では「筋道を立てて考える」が大切と言われているが、事象に直面して課題発見・解決する数学的活動は、理路整然と進むことはない。自ら学び、考えて活動する姿は、動的に操作しながら、あれこれと見方・考え方を変え、試行錯誤的に活動して考えを進めていく。行き詰まると、再度、他の新たな見方から挑戦して役に立ちそうな考えを探究し続け、やっと役に立つ「数学的に考える」を見いだしていく創造的な自己活動にすることが大切である。子ども自らの自由な数学的活動は放任主義を推奨するものではない。着眼点が異なり、複線型に進む子どもの数学的活動をよく観察し、子どものニーズに応じて個別最適な手助け(Maslow, 1968)が必要である。

③ 気づき、感じる活動：＜内発性、内面性＞

「数学的思考を生む活動が数学的活動」と島田茂は述べている。動的な操作的活動をすれば、数理につながる操作的思考を内発するのが「数学的活動」と言えるという。その動的な操作的活動を頭の中に思い浮かべることができるようになれば、イメージが生まれ、操作的活動を図に置き換えることもできる。つまり、図的思考の段階に移行できる。図を静的に観るのではなく、4 コマの漫画のように動的にイメージ操作してみる方が「気づき」や「感じる」を内発し、これが数理的イメージにつながる。この動的・数理的なイメージは、数学的思考を促進し有効な機能性をもつ。それは、図を自由に念頭操作するイメージ思考は、「一目みて直観的に数量関係や図形の構造の本質を直観的につかみ取る機能性」を有する。動的で数理的なイメージ図は、頭の中に浮かべて言葉や記号と結びつけを促進し、内面化する手がかりや手続きとなり、言語的思考や記号的思考を進めるのを手助けする重要な役割を果たすものとする。例えば、第 1 学年の「 $8+3$ 」の計算では、ブロック操作を通して「8 に 2 を加えると 10」というイメージ思考を内発して、「10 と いくつ」という数構成に基づく計算の仕方を内面化する。ブロック操作の動的なイメージは、十進数の数構成に基づく計算原理を構成する活動を促進すると考える。

④ 一般化を促進する活動：＜一般性原理＞

一般化は、数学的活動が目指している方向性であり、操作的活動、図的活動及び内的な活動をする過程で内発される着想は、数学的な思考へと一般化していくことが大切である。「 $8+3$ 」の計算の仕方をブロック操作で考える数学的活動は、

「ばら 8 個に 1 個ずつ数えたす活動」より、3 個を 2 個と 1 個に分け、「8 個に 2 個たして 10 をつくる活動」の方が相応しい数学的活動である。前者は「10 と いくつ」の見方は欠落するが、後者の活動は、十進数の数の構成につながる考えを内発している。ばら 10 個を 10 の棒に置き換えれば、さらに一般化したものとなる。なぜなら、操作的活動を内面化し、言葉や数と結びつけて「8 に 2 をたして 10、10 と 1 で、11」と十進数に基づく「繰り上げの原理」を自ら発見できるからである。操作的活動が最適でない場合は、一般性が欠落する。操作的思考で見つけた一般化への手がかりを数学化するには、操作的活動を念頭にイメージして、言葉や数と結びつけて、精緻に言語的・記号的に考え続けて、

数理的に「まず、8 を 10 にするには、3 を 2 と 1 に分ける。次に、 $8 + 2 = 10$ 、最後に $10 + 1 = 11$ 」と抽象化し、共有できる汎用性のある原理発見を促進する数学的活動にすることが大切である。

7 数学的活動の自己評価

「知識・技能」や「思考力・表現力」、さらに「意欲」についての評価は、各種アセスメントの報告にもあるように実行され、授業改善に生かされてきている。数学的活動についての評価研究の進捗状況をみてみよう。注目すべきは、数学的活動は指導方法のみでなく、算数科の目標及び指導内容として位置づけられている点である。目標や指導内容である数学的活動は、目標の到達度や目標を達成する相応しい活動内容になっていたかどうかを指導と評価の一体化の観点から評価することが不可欠である。しかし、現状では、この種の評価研究は余り進んでいない状況にある。では、数学的活動をどのように評価すればよいのか、評価する場合に気を付けたいことや評価の観点を述べてみよう。

1) 目的達成に至るまでの過程を評価する

数学的活動を通して、課題発見することを目的とする場合、目標軸から評価するには、活動を通して、課題発見することができたかである。指導内容軸からの評価は、数学的活動が課題発見を創発する内容構成になっていたかである。例えば、6 学年の「分数のかけ算の意味指導」における課題発見を目的とする数学的活動の評価の在り方を述べる。

<目標軸の評価観点>

かけ算の意味を、乗数を整数から分数へと拡張し、統合的・発展的に関連付ける活動を通して、分数のかけ算の意味を考えるという課題を発見することができたか。

<指導内容軸の評価観点>

課題発見を創発する活用内容により数学的活動は構成されていたか。

数学的活動の最適化を目指す指導では、数学的活動を通して、結果的に目標に到達できたかに目を奪われやすい。しかし、数学的活動で評価すべき視座は、目標に到達するアプローチ活動が、数式化に値する内容で構成されていたかを評価する必要がある。算数を発展的・統合的に考察して新たな課題を発見しやすくするシステムの数学的活動を構成したかに着目すべきである。具体的には、乗数を未知数の□とする CUN

問題で構成し、次に、 $2/5 \times \square$ のかけ算の意味を what if not 方略により、if 思考で「□が 3 のとき」 $\Rightarrow$ 「□が $1/3$ のとき」へと拡張し、乗数が整数の場合と分数の場合を統合的・発展的に探究することにし、最終的に課題発見につながる機能性のある数学的活動で構成されていたかその有無を評価することが大切である。授業中の出来事として、子どもは形式不易の推論で乗数が整数から分数になってもかけ算の式になると言う。この場面を捉えて、かけ算の式の表す意味を問い、かける数が 3 の場合は「3 個分」と説明できるか、「かける数が $1/3$ 」は、「何のいくつ分」では説明できない危機的場面を生み、「分数のかけ算の意味を考えよう」という課題発見に至るまでの数学的活動を細分化し、活動内容が連動して機能する働きがあったかどうかを評価すべきである。

2) 一般化の観点から数学的活動を評価する

算数を自ら学び、考える数学的活動は、教師があれこれ指示して活動するものでもなければ、友だちの物まね活動でもない。ノイズに左右されず、自らの見方・考え方で事象に働きかける自由な自己活動によって着想やアイデアが創発される。しかし、着想やアイデアは数理を探究するきっかけ、入り口を発見したに過ぎない。

着想やアイデアを真正な学びにするには、操作的活動、図的活動などの外的な数学的活動をしたり、既習の算数の概念や原理を活用する言語的・記号的思考活動などの内的な数学的活動をしたりして探究する。数学的な探究活動は目的性のある活動ではあるが、その目的に到達しているかどうかの重要な手がかりとする判定基準は「一般性」である。Sheffield (2013) は、「様々な方略の解決を既習の数学の知識やモデルと結びつけ、結果だけでなく、全ての問題解決のプロセスにおける自己活動を評価することが大切」と述べている。これは、結果が全てでないという指摘である。子どもの自由な数学的活動は量的・質的に変化し、プロセス全体を「観る」「感じる」をしないと数学的活動・思考は評価できないと示唆するものである。12-9 の計算指導では、楽しく操作的思考させ、急に数式化して思考させる授業が案外多い。内面化の過程は、頭の中でブロック操作をイメージ操作ができるようにし、さらに、言語、数、式に置き換えるという質の異なる数学的活動によって進む。学びの経過とともに次々と質的に変化する数学的活動を注意深くみて、内面化、抽象化する過

程を通して、記号的思考レベルに到達していく。このプロセス評価をする観点が「一般化」であり、結果だけみて「一般化」はあり得ない。

8 結語

活動主義の算数教育に本腰を入れる契機は「数学教育の危機」が叫ばれた時である。意欲良好でないため、対策の切り札として「算数的活動」が強調された。しかし、効果的な指導方法にすぎなかった。それが、次の学習指導要領の改訂（2008）では、「目標」「指導内容」「指導方法」であると位置づけられた。現行の学習指導要領で数学的活動に変更され、「数学的に考える」という算数科の資質・能力を育成する活動と重視されている。ところが、いかに「数学的に考える」を育成するかの研究には熱心であるが、それを内発する数学的活動の在り方の研究は、算数科の目標及び指導内容であるにも関わらず、余り進んでいない。指導と評価の一体化を叫びながら、認知面の「知識・技能」や情意面の「思考力」「意欲」を内発する最適な数学的活動にするには、どのような数学的な内容を構成すれば、有機的に機能するものになるのかに関心を寄せて、探究することが不可欠である。知識・技能は結果だけで切り取って評価できるが、思考力や学ぼうとする意欲は、課題発見や解決の過程の子どもの操作的活動、図的活動といった非言語で構成される一連の活動プロセスをよく観て、イメージ思考を感じとらないと、子どもが数理を内面化し、一般化する数学的活動の変化に目を向けなくて、表層的に言語・記号的に思考を促進したつもりになっているだけになる。数学的活動は、決まり切った活動ではなく、思考の流れに伴って数学的活動は変容することを強く意識し、真正の「数学的に考える」を生成する「数学的活動」の内容構成の在り方を、多角的に分析・考察して、探究することが喫緊の課題となっていると考えずにはおられない。

善、1975.

- 3) R. B. Davis、佐伯胖監訳、「数学理解の認知科学—創造的数学、説明されるべきことは何か」、国土社、1987.
- 4) OECD 教育研究革新センター「メタ認知の教育学—生きる力を育む創造的数学力、第章革新型社会における数学教育と問題解決能力—複雑で見慣れない、非定型型の問題を解くこと」明石書店、2015.
- 5) J. M. Keller. 鈴木克明監訳、「学習意欲をデザインする、関連性を確立し支援する作戦、目的の選択、ツールマン：目的行動」、北大路書房、2010.
- 6) 樋口直宏、「批判的思考の理論と実践—デュローイにおける「批判的思考」の概念—『思考の方法』を中心に—」、学文社、2013.
- 7) 中原忠男、「算数・数学教育における構成的アプローチの研究、数学的一般化と数学的抽象、反省的思考についての基礎研究」、聖文新社、1995.
- 8) 前田隆一、「算数教育論—数理的思考と帰納、見方によって変わる性質と変わらない性質、数学的直観」、金子書房、1979.

(令和7年2月25日 受理)

<主な参考文献・引用文献>

- 1) 佐伯胖、「考えることの教育—教育のやらせ主義を排し、考える教育とは」、国土社、1990.
- 2) 柿内賢信訳、G. Polya 「いかにして問題をとくか—近代発見学、有力な思考作用」、丸