氏　　　名	大本　豊数
授与した学位	博　士
専攻分野の名称	理　学
学位授与番号	博甲第　　　７３７４　　　号
学位授与の日付	２０２５年　９月　２５日
学位授与の要件	自然科学研究科　　　　数理物理科学専攻 （学位規則第４条第１項該当）
学位論文の題目	交代符号行列と数理物理モデルとの関係および組み合わせゲーム理論への応用
論文審査委員	准教授　鈴木　武史　　　教授　石川　雅雄　　　教授　寺井　直樹

学位論文内容の要旨

本論文は二部構成である。第 1 章では、Math. J. Okayama Univ.に掲載されている単著論文``The characterizations of an alternating sign matrices using a triplet” に基づいて、交代符号行列と六頂点モデルの間の全単射について述べる。0, 1 または-1 の 3 種類の成分から構成される n 次正方行列で、以下の 2 つの条件を満たすものを n 次の交代符号行列という:

(i)　　0 を除いて 1 と -1 が交互に現れる、

(ii)　　各行(および各列)の成分の総和は 1.

n次の交代符号行列全体の集合を$\mathcal{A}_n$ とすると、その個数が$\#\mathcal{A}_n=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(3k+1)!}{(n+k)!}$ であることが 1980 年代に予想されたが、長い間証明されていなかった。1996 年の論文で Kuperberg は、それまでの文脈とは全く異なる背景を持つ統計物理学に由来する六頂点モデルを用いることで証明した。六頂点モデルは格子状に配置された水の分子の状態を記述するための模型であり、水の分子が 6 種類の状態を取り得ることに由来して名付けられた。Kuperberg の証明においては、六頂点モデルの状態の成す集合 $SV(n)$ から $\mathcal{A}_n$ への写像 $\mathfrak{m}: SV(n)\longrightarrow\mathcal{A}_n$ が全単射であることが用いられるが、その証明は数学的に明瞭な形では述べられていない。

第 1 章の主結果として、分子の取り得る 6 種類の状態と 1 対 1 に対応する整数の 3 つ組を定義することにより、写像 $\mathfrak{m}: SV(n)\longrightarrow\mathcal{A}_n$ の逆写像を数学的に明確な形で述べ、全単射であることの厳密な証明を与えた。

第 2 章では、現在投稿準備中の高山義輝氏との共著論文 “A coin turning game on a partially ordered set related to alternating sign matrices” に基づいて、$\mathcal{A}_n$ に関連して定まるコイン裏返しゲームの Sprague-Grundy 関数を決定することを目的とする。$\mathcal{A}_n$ には自然な半順序構造が入るが、J. Striker により、或る半順序集合 $\mathbb{A}_n$ が定義され、$\mathbb{A}_n$ の順序イデアル全体の成す半順序集合 $J(\mathbb{A}_n)$ が $\mathcal{A}_n$ と順序同型になる。我々は有限不偏ゲームの中でポセットゲームと呼ばれる半順序集合上のコイン裏返しゲームを研究した。有限不偏ゲームは Sprague-Grundy 関数によって先手必勝か後手必勝かのいずれか一方に分類することができる。ここでは、半順序集合として $\mathbb{A}_n$ 上のコイン裏返しゲームを考察するが、そのルールにもいくつかバリエーションがあり、その中でも順序イデアルゲームと呼ばれるゲームについて Sprague-Grundy 関数の明示的な公式を与えた。半順序集合上のコイン裏返しゲーム理論の、表現論的な背景を持つ具体的な半順序集合への応用は未だ数少なく、本研究はその実践のひとつとして将来の研究への道を開くものである。

論文審査結果の要旨

大本豊数さんは交代符号行列および関連する組合せ論について研究を行ってきた。

交代符号行列 (Alternating Sign Matrix, 以下ASM) は、成分が 1, −1, 0 からなる正方行列のクラスであり、特に各行・各列において 1 と −1 が交互に現れる構造を持つ。ASM は平面分割をはじめとする多様な組合せ的対象と深く関わるだけでなく、代数系の表現論や数理物理学とも結びつき、これまで様々なアプローチによって多くの重要な研究が行われてきた。大本さんの研究もその延長上に位置づけられるものであり、本学位論文では ASM という共通したテーマに関する二つの研究結果が述べられている。

第１部では、ASM と六頂点模型の状態との対応に関する研究が展開されている。ASM に関して、その総数公式予想の解決は組合せ論における大きな成果の一つとされているが、特に G. Kuperberg による六頂点模型を用いた証明は、ASM と可積分系を結びつける研究として大きな注目を集めた。ただし、Kuperberg の議論においては、ASM の集合から六頂点模型の状態の集合への全単射の存在が鍵となっているのであるが、その全単射性の数学的に厳密な証明は明示されていなかった。本論文では、対応する写像の逆写像を独自の構成により具体的に与えることで、この点を厳密かつ明快に解決している。

第２部では、ASM に関連する poset に付随した組合せ的ゲームが研究されている。J. Striker は四面体型 poset を導入し、ASM を含む一連の組合せ的対象の poset 構造の統一的な記述を与えた。本論文では、そのうち ASM に対応する四面体型 poset の頂点にコインを配置したコイン裏返しゲームを考察している。このゲームは poset ゲームと呼ばれる有限型不偏ゲームのクラスに属するが、本論文第２部の主結果として、このゲームの必勝判定を与える Sprague–Grundy 関数の明示式が得られている。ASM に背景を持つ poset ゲームを考えることで、非自明かつ明示的な Sprague–Grundy 関数を持つ新たなゲームの例が得られたこととなり、組合せ的ゲーム理論に新たな視点を提供する成果であると考えられる。

上記の通り、本論文に示された結果は学術的に高い価値を有している。研究の独自性と完成度のいずれも十分に博士論文にふさわしい水準にあり、今後の関連分野の発展にも資するものと期待される。よって、審査委員会は、大本氏の学位論文を博士（理学）の学位授与に値するものと認め、同氏が学位を取得するに十分であると判断した。