

数学的に考える力を生成する数学的活動

数学的に考えることの授業実践研究

黒崎東洋郎¹⁾

宮崎唯²⁾

変革の時代に資する数学力が世界中で叫ばれている。我が国では「数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える」と数学的に考えることが(2017)が強調されている。これを実現するために、「個別最適な学び、協働的な学び」(2021)が推奨されている。資質・能力と学び方はどちらも重要なことであるが、学び方ばかりに目が向き、数学的に考える指導が洗い流されている。両者を関連付けて同時達成する必要がある。その成否の鍵は、「数学的活動」にあると考える。ところが、数学的活動は、総花的、表層的に捉えられ易い。数学的に考える力を生成するには、活動をどのような視座から数学化すればよいか、数学的に考える力を生成・創発する機能的な数学的活動にするにはどうすればよいか、そのアプローチはまだ解明されていない。そこで、数学的に考える力を生成する真正な「数学的活動のアプローチ」と「変容」の在り方を探究する。

キーワード：活動を数学化する 非線形型 最適化 柔軟性のある変容

I 問題の所在と目的

AIの進展はめざましく、人間に取って代わりかねない時代に直面し、変革の時代を生きるために相応しい本当の数学的な資質・能力が問われている。変化のない時代では、知識・技能に特化する「教授パラダイムの学習」であっても、問題視されることは少なかった。AIが著しく発展する時代である。Rogers(1967)は変革の時代を生きるため、下記のように「学習パラダイム」の転換を提言している。

教えることや知識を与えることは変化のない環境において意味をなす。現代人に言える真実は、絶えず変化し続ける環境にあり、今までと異なった状況に直面していると言える。だから、教育の目的は、変化と学びを促進することである。学び方を学び、適応し変化し続ける方法を学び、安定した静的な知識などないことを知り、新たな知識を探究し続ける「変化」と「プロセス」が教育の目的となる。

算数科では、変革の時代の要請に応えるべく、従前から探究されてきた「数学的な考え方」という資質・能力が見直され、「数学的に考える」に転換された(2017)。主たる理由は、「数学的な考え方」は、表現と相まって技術的な思考法として捉えやすいという問題があった。算数の知識・技能を「上手な解法のテクニック」を駆使して教授できるように、数学的思考力も卓越した指導技術によって育成できるという捉え方に

基づく授業実践研究を数多く見かける。

「数学的な考え方」は、「数学的な思考」そのものか、または、これを育成する「思考方法」なのかが曖昧である。そのため、「考えること」の教育は、算数を担当する専門家(教師)の解法のテクニックで伝授できる」という教育の暗喩が潜在的に受け継ぎ続けられている観がある。

複雑に多角的に変化する時代に直面し、世界中が、本当に相応しい算数・数学の資質・能力を分析・検討し、探究している。我が国でも時代の要請に応じて教育改革が行われ、学習指導要領(2017)では、算数の資質・能力を「数学的な考え方」から「数学的に考える」に転換された。これにより、解法のテクニックや計算のアルゴリズムなどによる解き方ではなく「数学的に考える力」という数学的思考力を育成する方針が鮮明に告知された。しかしながら、算数教育が目指すべき「数学的思考力」を「数学的に考える」と子どもにも分かる平易な言葉で定義したところで、直ちに「数学的に考える力」を育成することができる程、簡単に達成できるものではない。例えば、かけ算九九や筆算にかかわる知識・技能は、百マス計算のような手法を何回も繰り返せば、スキルアップできることが広く知られている。ところが、数学的に考える力は、知識・技能とは学力の性質が異なり、その育成する容易ではない。数学的に考える力を、知識・技能と同様に捉えて、「数学的に考える範例」を示して、これを何回も繰り返せば達成できると誤認識する人がある。子ども自らが考えて生成する「数学的に考える力」になっていない。数学的に主体性、創造性、創発性が欠

1) 岡山大学名誉教授

2) 倉敷市立玉島南小学校

如している。これでは新たな課題に転移する力は身につかない付かない (Schoenfeld, 1987)。

こうして、既習の知識・技能を総動員して数学的に考えれば簡単に数理的に処理できる問題でさえ、数学的に考えられないで四苦八苦する子どもが少なくないという出来事が教室で起きている。例えば、6段の九九を創るとき、「かける数が1増えると、6ずつ増える」という規則性に気付かせ、かけ算のきまりとして算数の知識を教授しても、九九を創る際にそのきまりを活用してかけ算九九を構成することができない事態が生まれている。折角、数学的に考えてきまりを見いだしても、算数の知識としての「かけ算九九のきまり」を理解せよと強調しても、これを活用して数学的に考えることを強く意識させないで終わる。結果、 6×7 の答えを忘れたとき、かけ算のきまりを活用して数学的に考えればよいことの着想に至らないのである。数学の転移力が身についていないという要因は、既習事項を活用して数学的に考えることを強く意識化していないことに起因すると思われる。課題発見・解決するとき、既習の知識・技能を活用する力が必要と認識されているにもかかわらず、その原動力である数学的に考える力と遊離している。具体的に既習のどんな算数の知識・技能と結びつけて、どのように考えを進めればよいか多角的に分析、考察しないため、考えることの指導が洗い流されている。

McIntyre (1992) は、「教師の力量は、自ら発達させるべきもの」と述べている。この指摘は、算数教育にも適応できる。数学的に考えることを他者が与えることはできないし、誰かが発達させてくれるものではなく、子ども自身が自分自身で発達すべきものであることを意味する。すなわち、数学的に考える力は、学習者である子ども自身が事象(課題)に数学的な見方・考え方を働かせて試行錯誤しながら積極的に関わっていく苦勞の伴う活動の中で、算数の文脈を作り出し、数学的に考える力を事例に即して具体的に創発し、逐次発達させていくと考える。Freudenthal (1978) は、数学教育(算数教育)を既に完成した教科ではなく、新しく創る教科であると述べている。そして、算数・数学の概念や原理を創る活動を「実践的活動」「導かれた再発明」と名付けている。このFreudenthalの提言は、算数の学習過程は「実践的活動」であり、算数の資質・能力である数学的に考える力

は、実践的活動する中で育成されることを意味している。

算数科の学びの実践的活動は「数学的活動」そのものが該当する。では、数学的活動は、算数教育でどのような重みで位置づけされているのか、検討する必要がある。

小学校学習指導要領、算数科編(2017)には、算数科の総括目標が示され、その中で数学的活動は下記のように示されている。

1 教科の目標 (2) 目標について

小学校学習指導要領の算数科の目標

数学的な見方・考え方を働かせ、数学的な活動を通して、数学的に考える資質・能力を育成することを目指す。

「数学的活動」は、従前の「算数的活動」を算数・数学教育の一貫する資質・能力重視の観点から名称変更されたものである(2017)。日本の子どもは算数・数学の「成績はよいけれども意欲は低い」(TIMSS, 2000)と公表された。算数・数学の関心・意欲が低い状況を鑑み、近いうちに日本の子どもの数学力が低下し、地下資源がなく食料自給率も低い科学立国日本の未来を危惧して各界から数学教育危機の声が上がった。この危機を乗り越える切り札として登場したのが「算数的活動」(*数学科は「数学的活動」)である(2008)。初めて登場した「算数的活動」とは何かと、戸惑う教員も少なくなかった。算数的活動の趣旨及び具体的な活動内容が分からず、授業への位置づけ、算数的活動の組織化が不明瞭であったからである。小学校学習指導要領に「目的をもって主体的に取り組む、算数に関わる様々な活動」と定義(解説書、算数編)を示されても抽象的・総括的であった。そのため、各学年の内容項目に算数的活動の例示を上げて周知徹底が図られた。ところが、この例示のみが算数的活動と捉えられ、局所的に解釈され、算数的活動の趣旨が浸透せず、意図実現に結びつかなかった。結局、「目的」を分析・考察しないまま、決まりきった日々の算数の全ての活動が「算数的活動」といういい加減に解釈する人も少なくなかった。

複雑に高度化する変革の時代に対応する算数・数学の資質・能力を一貫して育成する観点から「算数的活動」が、「数学的活動」に変更(2017)された。単に用語が変わっただけと認識してはいけない。未だに出口の見えない算数

の転移の問題を解決するには、学びの中核を為す「数学的活動」の改善を促進することが大切である。今一度、改訂の趣旨（2017）を振り返り、「数学的活動」の目的、意義を精緻に多角的に分析・考察して捉え直すことが必要である。具体的な数学的活動の検討作業として、

- ・「数学的な見方・考え方」「数学的に考える」の関連性や位置づけの明確化
- ・どんな数学的活動にすると数学的に考える力を生成できるのか
- ・数学的活動の重要な目的・意義は何か
- ・数学的活動を機能化する要素は何か
- ・数学的活動を最適化する方策

などについて分析・検討することが喫緊の課題となる。

II 数学的活動

数学的活動とは、そもそも、どのような活動なのかを、具体的に捉えて、イメージしておくことが大事である。

1 外的な数学的活動

数学的活動は、当初は算数の活動（操作的活動の改訂）であった。数学的活動（2017）と用語変更しても、初期は算数の活動（2008）であり、何よりも数量や図形概念や原理にまつわる事象は抽象的で、語彙も算数の知識も脆弱な発達段階にある子どもにとってかかわりにくいものがある。抽象的な数量や図形に係る日常の事象に、自らかかわって数理化していく初発の段階は、試行錯誤的にアクションリサーチしながら外的な活動（体を動かす、具体物を手で動かす）を通して考えを進めていく方が、事象（課題）にかかわり易い。自ら学び、自ら考える関心・意欲を喚起し易く、活動が促進され易いと考える。

こうした、可視化できる外的な活動に位置する活動は、Bruner の EIS 理論に基づいて位置づけると、Enactive Representation の段階にあり、外的な数学的活動といえる。

- (E) Enactive Representation
 ↓（行動によって考える）
 (I) Iconic Representation
 ↓（念頭のイメージによって考える）
 (S) Symbolic Representation
 （数、式、記号を用いて考える）

図1 Bruner の EIS 理論
 （訳は筆者の解釈）

子どもが算数の事象（課題）に直面して教室で活動する外的な数学的活動は決まりきった一様なものではない。下記のように多義にわたる。有効という教育の暗喩により教科書通りの外的な活動に特化する傾向があるけれども、実際は想定した活動に出くわすことが多々生じる。

- ・教室外の作業的、体験的活動
- ・算数実験
- ・ブロックなどの具体物を手で動かす操作的活動
- ・図（情景図、テープ図、線分図、数直線、関係図）をかくなどの操作的活動

外的な数学的活動の中で代表的な活動は、操作的活動（manipulation）である。昭和 33 年の算数科の学習指導要領以降において、基礎・基本を習得するための中心的な指導法の役割を担ってきた。しかしながら、有効とされる具体物を手で動かす操作的活動、半抽象的なテープ図、線分図、抽象的な数直線、関係図について、いつ、どの段階で基礎操作として発達していくのか、関連性や指導方法の体系化は未だに未開発な部分が多いのも真実である。

2 内的な数学的活動

算数教育では、他教科に較べて各段に教科内容が系統的に組織・構成されている。常に「ゼロベース」の外的な数学的活動から出発するのは系統的指導の論理ではあり得ない出来事である。算数の学習経験が増すにつれ、新規の学びに拡張する場面では、一見初めて出会う事象であっても、既習の数学的な見方・考え方を働かせ、習った算数の知識と関連付けて数学的に考えれば、何とか解決の糸口を見いだし、問題解決することができるはずである。その場合は、操作的活動した数学的なイメージを頭の中で描きながら、内面化された数、式、記号を用いて考え進めていく。答えを辿り着いた段階では、思考過程を振り返って、どんな既習の知識・技能や数学的な見方・考え方を拠り所にして考えを進めてきたか思考プロセスを数、式、記号、言葉を用いて説明し、伝え合う。よりよい考えを探究し続け、場合によって柔軟に考えを変え、プロセスが内的な数学的活動である。Bruner の EIS 理論の Symbolic Representation（数、式、記号を用いて考える）に該当する。

例えば、第 5 学年「 $1 \div 2 - 1 \div 3$ の計算の仕方」において、既習の「等しい分数」「通分」「同分母分数の加減」と関連付けて多面的に見方・考え方を働かせ、これらを総動員して活用

して $1/5 + 2/5$ と統合・発展的に考える活動が内的な数学的活動に相応しい。

算数・数学を一貫した本当の数学力を育成するには、外的な数学的活動よりも、既存の数学的な見方・考え方を働かせ、既習の知識・技能を拠り所にして、言葉、数、式を用いて数学的に考える内的な「数学的活動」の方が大切である。既習の知識・技能、数学的な見方・考え方が十分身につけていないため、内的な数学的活動を取り込むのは無理と決めつないで、「ゼロベース」で始まる外的な数学的活動から移行を促したい。転移の問題がいつまで経っても解消できないからである。Fink(2013)は、「学び方を学ぶ」の重要性を述べている。この提案は、「算数の新たな数量や図形概念や原理は、何とか自分の力で既習の知識・技能を用いて創造的に構成する」という内的な数学的活動を指導の原理を強調している。

Ⅲ 三者の関連

1 数学的な見方・考え方や数学的活動と数学的に考えるの3者の関連とは何か

算数・数学科の総括目標(2017)には「数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える力」の育成が告知されている。この文言を読んで、「数学的な見方・考え方」と「数学的な活動」と「数学的に考える」の三つの柱は関連すると思われるが、浮体的な関連性や役割が曖昧である。

- ・「数学的な見方・考え方を働かせる」というけれど、働かせる状況は、数学的に考えている状況そのものではないか?
- ・外的、内的にせよ「数学的活動を通して」は、数学的活動をすれば、数学的に考えていない数学的活動はあり得ない?

こうした疑問が生まれ、「数学的に考える」は、「数学的な見方・考え方」や「数学的活動」に関連していると思われるが、その違いや特徴的な役割分担が精緻に分かりにくい。

よって、三つの柱の関連性や違い、特徴的な役割を精緻に分析・考察する必要がある。なお、次のような配慮事項が示されている。

<配慮事項>

算数科の目標をなす資質・能力の三つの柱は、数学的な見方・考え方や数学的活動に相互に関連をもたせながら、全体として育成されることに配慮する必要がある。

配慮事項の「三つの柱」とは、「数学的な見方・考え方」「数学的活動」「数学的に考える」である。配慮事項には関連付けに配慮せよと述べられているが、どんな配慮が必要なのか何も重要な要点が述べていない。授業者にゆだねられても戸惑いが生まれる。資質・能力は「数学的に考える」なので、一番重みがあるという認識は誰もが共有できる。しかしながら、それは授業の最終到達点であり、重要なのは、数学的な見方・考え方や数学的活動のそれぞれの役割分担と活動の様相(プロセス)を明確にすることである。

2 数学的活動と数学的に考えるの関連性

佐伯胖は「考えることの教育」(1991)の中で、子どもの考える力は、教師の指導技術で発達させることができるという教育技能説を排除して、「事象にかかわる活動をする中で考える力は創造的に生成され、発達していく」と活動説を述べている。すなわち、数学的活動の中で「数学的に考える」という力が創造的に生成されることを示唆している。算数を学ぶ子どもは数量や図形概念が内在する事象に多面的な見方・考え方から働きかけ、試行錯誤的な活動しながら数学的に考えを進めていき、五感を通して数量や図形を「感じ」「気付く」、次第に数学化していく発達段階にある。こうした「数学的活動」をする中で「感じ」「気づく」が「考える」の芽生えとなり、数学的に考える力が生成されていく。初めから、決まりきった数学的な考える力は存在しない。佐伯の活動説の通り、数学的活動するアプローチの中で派生するものと解釈するのが、無理がない。

3 数学的な見方・考え方の役割と数学的活動との関連性

授業の中では様々な子どもの活動が行われるが、その全てが数学的活動とは限らない。活動を数学的活動に相応しいと認識するには、事象にかかわって数学化する視座が必要である。視座とは、課題発見・解決に向け、活動を数理化する文脈へ思考の流れを生み、方向付け、その起爆剤の役目をする数学的な見方・考え方である。初めて直面する事象をみて直ぐ数学的な見方・考え方を想起するのは難しい。当初は見通しもなく、戸惑いながらも試行錯誤的にアクションリサーチする。あれこれと手探りしていく中で、有効で機能的に働くと思われる見方・考え方を「感じ、気付く」。こうして見つけた見方・考え方を道案内にし、次第に数学的に相応しい

ものにしていき、有機的な機能を果たすのが、数学的な見方・考え方の重要な役割である。

例えば、第5学年の通分では、「分母をそろえる」ことが数学的な見方・考え方ととらえ、分母をそろえることを数学的活動として教え込む授業が見受けられる。これでは、分母をそろえるテクニカルな技法が数学的な見方・考え方に置き換えられてしまっている。目指す「単位分数の いくつ分」という見方・考え方と乖離してしまっている。まず、分母が違うと、なぜ、解けないのかを考えて、単位分数が違うので、今までの「同じ単位分数の いくつ分」という見方・考え方では通用しないことを意識させることが大事である。次に、どうすれば単位分数を同じにすることができるかをアクションリサーチする必要がある。分母をそろえる技法を安易に注入しないで、「分数は大きさを変えないで表現できる」という等しい分数の性質に着目させ、この見方を働かせたい。表面的には「分母をそろえる」ことが数学的な見方・考え方にみえるが、分母をそろえる本当の意味は「単位をそろえること」であり、「単位分数の いくつ分」に着目させたい。こうして、等しい分数の性質を活用して異分母分数に共通する単位分数を見いだせば、既習の同分母分数場合と同じように「単位分数の いくつ分」という共通の数学的な見方・考え方から統合・発展的に通分するという事象を考察できる。

1, 2, 3 と述べてきたとおり、三つの柱の関係性は、数学的な見方・考え方によって、活動が課題発見・解決に方向付けられ、数理化されて数学的活動に相応しいものになる。数学的活動に相応しい活動をする中で数学的に考える力が芽生え、生成されて発達していくと捉えられる。

IV 数学的活動を機能化する

1 数学的な見方・考え方の創発

数学的な活動のアプローチは、学習指導要領には「数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える力を育成する」と直線型のプロセスで示されている。ところが実際の教室の授業では、初めからのえた数学的な見方・考え方を見つけて、これを働かせることは容易ではない。例えば、 25×30 の計算では、「30 を 3 の 10 倍」とみて、既習の 25×3 や 10 倍のかけ算を活用すれば簡単に考えて処理できると思い込みやすい。この思いに反して、授

業の実際は、思い描いた教科書通りの決まりきった筋書き通りに数学的活動が進むことは少ない。かける数の 30 を「3 の 10 倍」とみて 25×3 の 10 倍という文脈を創るのは容易ではない。初めて直面する 25×30 の場面に戸惑いながらも、かける数 30 という数をあれこれと思いつくままアクションリサーチして有効であろう数学的な見方・考え方を探していく。数学的活動は、試行錯誤的な非線形型のプロセスで始まるのが普通である。新規の算数の事象は子どもには距離感があり、どのような数学的な見方・考え方を働かせばよいか、理論通りには見当が付かないのが普通である。この溝を埋めるための手助けとして、G. ポリヤ (1950) は、「図をかけ、適当な記号を導入せよ」「関連する似た問題はないか関連付けよ」と述べている。ところが、下記のような図をかいたとしても、子どもの想起する見方・考え方には個人差があり、同じ図をかいたとしても、多様な見方・考え方が表出される。

25 25 25 25 25 25 25 25 25
25 25 25 25 25 25 25 25 25
25 25 25 25 25 25 25 25 25

- a 30 を、「3 の 10 倍」とみて、・・・
- b 30 を、「10 の 3 倍」とみて、・・・
- c 30 を、「6 の 5 倍」とみて、・・・
- d 30 を、「5 の 6 倍」とみて、・・・

図2 多様な子どもの見方・考え方

2 批判的・柔軟に考えて変容する数学的活動にする

図をかきあれこれと試行錯誤する中で、やっとな有効と思いき見方・考え方を感知、気づいて取り出す。この段階での数学的な見方・考え方は必ずしも目指す数学的活動にアプローチし、数理の体系化に連動するものばかりではない。比較検討して、批判的に省察し、他者の考えであっても「なるほど」と根拠や推論に妥当性があれば、柔軟に受け入れて自己の考えを変容させることが大切である。Torrance (1966) は、流暢性、柔軟性、精緻性の要素が創造的な数学力には大切であると述べている。中島 (2005) は、数理を創る観点から、統合的・発展的に考察することが重要と述べ、「明瞭性」「簡潔性」「一般性」の観点に照らして検討せよと述べている。

図2に取りあげたa、b、c、dの4つの考えは、「明瞭性」の観点から検討すると、全て既習の2・3桁×1桁のかけ算と関連し、分かり易い（明瞭性）。ところが、柔軟に観点を変えて簡単か（簡潔性）、他の場合にも使えるか（一般性）の観点から、bに較べてa、c、dのアイデアは計算が複雑で一般性に欠けることに気付く。これらの観点到照してもbの考えは、既習の25×3と結びつくと簡単に分かり、他の数値になっても使えることを実感する。振り返りでは、お互いに見いだした考えを多角的、精緻に分析・考察し、機に応じて柔軟に考えを変容し、よりよい考えに発達させてこと、新規25×30を既習の25×3と体系的に結びつけていくことが大切である。こうした有機的な機能をもつ数学的活動にすることが指導の要点である。

2 数学的活動の最適化を図る

Bere・Tagg（1995）は「子どもがいかに考え、行動し、感じるかをどのように手助けするかが決め手である」と述べている。これは、数学的活動の最適化とその手助けの留意点を指摘している。したがって、外的活動であれ、内的活動であれ、数量や図形の教材に子ども自ら働きかけ、数学的な考えを生成できる相応しい「数学的な活動」を組織化することが重要である。

1）外的な数学的活動の最適化

数学教育の危機（1997）が叫ばれたとき、改革の切り札として外的な数学的活動（当時は算数的活動）が強調された。それまでの操作的活動に算数実験や作業的・体験を付加し、算数の外的な活動が拡張された。数学的活動と用語が改訂してもこの方針は現在も継続中で重視されている（2017）。

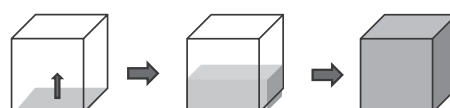
第6学年「立体の体積」では、角柱や円柱の体積を底面積×高さで求める授業が決まりきった指導の原理として実践されている。

数学的な疑問は「底面の面積」、つまり底面積には体積がなく、「0」であり、0は何倍しても0である。このような数学的な見方・考え方からみた子どもには、立体の体積＝底面積×高さの公式は成り立たないと言える。

直方体の体積＝縦×横×高さの言葉の式を基に、直方体の底面が長方形で、長方形の面積＝縦×横で求められることから、縦×横＝底面積と置き換えているが、底面の体積は0という疑問は一向に解消されないし、形式的・表層的に処理しようとしても、子どもに

は真実感のある本当の学びにつながらないと考える。

そこで、学習指導要領では取り扱っていないけれども、「平面が垂直に移動すると立体ができる」という図形の動的な見方・考え方導入する。そして、この動的な見方を働かせ「長方形の面（面積）が垂直に動く」と立体（体積）ができる」という「感覚」「気づき」を誘発し、直方体の体積を底面積×高さで求められることに結びつける外的な数学的活動にした。



*T 底面は長方形です。長方形が垂直に動くとき、どんな形ができますか？

C 長方形？

C いや、直方体が上に動いた跡に直方体ができる感じがします？

T では、色水を入れて、長方形を上を垂直に動かします

C 上の表面をみれば長方形だけど、全体的に直方体ができる。

C 長方形の面が動く」と直方体ができるから、体積を求めるには、・・・気がつきました・・・

図3 動的な見方を生成する算数実験

直方体の水槽に発泡スチロールの長方形を入れ、色水を少しずつ流し込む算数実験の動画を観察させた。これを見た子どもたちは、長方形が垂直に動く」と直方体ができるという見方・考え方を生成できた。この算数実験から生成した動的な見方・考え方を働かせて、なぜ、直方体の体積が「底面積×高さ」なのかを実感的に理解した。この動的な見方・考え方を拡張させ、三角柱、円柱の体積の場合も同じ算数実験を繰り返す中で、「三角形が垂直に動く」と三角柱ができる」「円が垂直に動く」と円柱ができる」と動的に考え、立体の体積＝底面積×高さで求められることを強く意識し体系化することができた。

この動的な算数実験は、立体の体積＝底面積×高さの公式を考察し、理解する上で有効な外的な数学的活動であるという示唆を得た。

（2）内的な数学的活動の最適化

①算数の学びが増すにつれ、見方・考え方が拡散して数学的活動は非線型になる

Ambrose(2010)は、「学習パラダイム」は、「プロダクトではなくプロセスと変化に関わる」と述べている。内的な数学的活動も、既習のどんな数学的な見方・考え方を発動して統合・発展的に考えるのか、そのプロセスと変化に注意したい。Engestrom(2010)は、拡張による学びは演繹的思考によって進むと内的活動を強調している。算数の学びを経験すればするほど、算数の知識、技能の幅が豊かになり、事象にかかわる数学的な見方・考え方も拡散し、数学的活動は多様な非線型になってくる。

第5学年「通分」における内的な数学的活動の最適化を以下述べる。この学年の中核は異分母分数の加減計算と捉える向きもあるが、通分である。それは、等しい分数と異分母分数の加減計算の仕方を創造的に橋渡して、数と計算の分野・領域をつないで体系化する中核的役割を果たすのが通分だからである。この通分指導は、分子が違うので、「分母をそろえること」という浅い直線型の「数学的活動」ではない。

授業の実際には、Polya(195)のいう「図にかけ」を信じて、数直線や液量図をかかせる外的な数学的活動が多い。この指導法は、再検討が必要である。それは系統的に算数の知識、技能を積み上げてきいるにもかかわらず、これを活用させる機会を奪うからである。これでは、いつまで経っても既習の分数の意味、分数の性質を活用する力（転移力）が身に付くはずがない。Fink（2003）は、「学び方を学ばせる」ことがアクティブラーニングで大事と述べている。本当に転移力のある算数の知識の学び方は、

- ・新しい知識の創り方
- ・既習の知識の使い方

の両者を同時に達成することを示唆する。「通分」の授業では、新たに「通分」という概念を数学的につくることと、「通分」の概念をつくるために、既習の分数の知識、性質を総動員して使うこと」の同時達成が求められる。

②課題を目指す内的な数学的活動の最適化

通分の課題は分数の意味・性質、分数の大小比較は既に経験しているので、既知（分かる）から未知（分からない）へ活動を導く数学的活動にするのが適切である。

$1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 2/4, 3/4, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5$

いろいろな分数のうち、2つの分数を取りあげて大小比較する。すると、比較が簡単な分数とそうでない分数があることを感じ、気付く。

<比較しやすい分数>

A 同分母分数・・・既習(単位分数のいくつ分)

・ $1/3$ と $2/3$ 、 $2/5$ と $3/5$ のような同分母分数の比較は、単位とする分数の個数を表す分子で大きさを比べる。

B 同分子分数・・・同じ大きさを等分割する

・ $1/2$ と $1/3$ 、 $1/4$ と $1/5$
 $2/3$ と $2/4$

分母は同じ大きさ1や2を等分する数を表す。だから、分母が大きい方が分数は小さいなる。

<比較が難しい・・・課題発見>

c 比較が簡単でない：異分母分数の場合

・ $1/3$ と $3/5$

C $1/3$ は半分より小さいけど $3/5$ は半分を超えるから $3/5$ の方が大きいです。

・ $2/3$ と $3/5$

C 分母も分子も大きい $3/5$ の方が大きい？

C 確かに $3/5$ の方が大きい感じ。

でも、はっきり言い切れません。

*課題発見

「どちらが大きいかはっきりさせよう」

③課題解決を目指す内的な数学的活動の最適化

Torrance(1966)は算数の学びを創造的にするには流暢性が大事な要素となると述べている。「 $2/3$ と $3/5$ の大小比較」をする戦略的な数学的な見方・考え方は個人差があり、多様な見方・考え方でアプローチがみられる。

その1 小数化する

その2 分母をそろえる

その3 分子をそろえる

上記3つは、いずれも習った算数の知識・技能を活用し、数、式、言葉を使って演繹的に考える内的な数学的活動である。とりあえずは、概ね妥当な数理的アイデアを生むものである。

どの考えから取りあげてアプローチするのが最適なのかを検討する。ここでは、遠回りの小数化する考えから取りあげる。小数化は、既習の $a \div b = a/b$ の商分数を逆向きに活用するアイデアである。

C $2/3 = 2 \div 3 = 0.6666 \dots$

$3/5 = 3 \div 5 = 0.6$

だから、 $2/3$ が大きい。

小数化のアイデアは一応理解されるものの、「小数ではなく、分数の世界で解決できないの?」「どれだけ大きいかの分からない?」だって、 $0.0666\cdots$ 大きいと言われても、えっという感じ」などの異論が生まれる。

上記の異論を受けて、「通分」に結びつくアイデアに移行する。教師は等しい分数を使うとか、分母の最小公倍数を見つけさせると性急に表層的なアルゴリズムに走りやすいが、「分数は、大きさを変えないで数表現できる」という等しい分数の見方・考え方からアプローチさせるようにする。

$$\begin{array}{l} 2/3 \cdots 4/6, 6/9, 8/12, \\ 10/15 \\ 3/5 \cdots 6/10, 9/15 \end{array}$$

C 同じ分母 15 にそろえると、わざわざ小数にしなくても、分数のままで比べられます。

C $10/15 > 9/15$ なので、大きいと思っていた $3/5$ より、 $2/3$ の方が大きいので、びっくりです。

ここで、なぜ、分母をそろえるのがよいのかを探究し、本質的な見方・考え方を生成するため意図的に「分子をそろえる」というアイデアを紹介していく。

C $1/3$ と $1/5$ は分子が同じなので比べられます。 $2/3$ と $3/5$ も、分母、分子に同じ数をかけて、分子をそろえました。

$$\begin{array}{l} 2/3 \cdots 4/6, 6/9 \cdots \\ 3/5 \cdots 6/10 \end{array}$$

分子をそろえる方が簡単で、速いです。

どうですか。もちろん、分ける数 9 と 10 では 9 の方が小さいから、 $6/9$ の $2/3$ の方が大きいです。

④統合・発展的に体系化する活動にする

形式的に分母をそろえればよいと知っていた子どもも、分子をそろえても比較する方が簡単で速いと言われる、揺さぶられ、不調和が生まれる。「どっちがいいの?」と問いかけてくる子どももいる。その問いをそのまま子どもに返して、更に探究させていく。

C どちらの考えもあってます。どちらもいい。

C 意見。分子をそろえる考えは、分母が小さい方が分数は大きいというのは分かりにくい。分母をそろえた方が分子が大きい方が、大きいから、分かり易い。

C 別の考えです。違いがはっきりします。小数でも問題になりましたが、分子をそろえてもどれだけ大きいかわからないのではないですか。

C どういうことですか?

C 分母をそろえれば、

$$9/15 \cdots 1/15 \text{ が } 9 \text{ 個}$$

$$10/15 \cdots 1/15 \text{ が } 10 \text{ 個}$$

だから、 $10/15$ の方が $1/15$ が 1 個分 1 個分大きいです。

C 気付いたんだけど、 $2/5$ と $3/5$ のとき、「 $1/5$ の 何個分」で較べました。同じように分母が違うときは、等しい分数を使って、同じ単位を見つけて、その個数で較べればいいと気付いたよ。どうですか。

算数・数学を一貫した数学的に考える力を育成するには、今まで以上に統合的・発展的に考察する数学的活動の充実が大切である。しかしながら、子どもは、未知と既習の学びを自分の力で統合的／発展的に考えて体系化する視座をいつの段階でもつようになるか、何も説明されていない。だから、未知の課題に対して、似たような既習の学びを自分の力であれこれと関連付けてアクションリサーチする内的な活動が、算数の転移力を育成するためには不可欠である。この内的な数学的活動を充実することが、真正の算数へアプローチにつながるものと考えられる。

V 結語

算数・数学教育の本質は、数学的に考える力の育成である。そのためには、子ども自身が、課題発見・課題解決に向けて有効と感じる数学的な見方・考え方を試行錯誤的に見だし、外的な数学的活動や内的な数学的活動を実行する。数学的活動の中では、行き詰まったり、間違ったりすることがある。これを恐れては、考えることが窮屈になり、進まない。つまりいた場合は、柔軟に見方・考え方を換え、試行錯誤的によいと思われる転換させた新たな見方・考え方から考え直していく。そして、本当の数学的な考えを生成し、発達させていくようにする。こうした数学的な活動を手助けすることが大事である。個別最適な学びが叫ばれている (2021)。算数の学びにあつては、数学的活動の最適化がこれに該当する。ただし、本当の数学的活動は、教科書通りの決まりきったマニュアルで実行すべきではない。安易に教え込むと予測困難な時代を主体的に生きるための数学的に考える力は

創発されない。考える力は、他者が与えることのできない学力であり、子ども自らが数学的活動を通して生成し、発達させるしかない。数学的活動のプロセスは、活動を方向付ける見方・考え方が拡散し、行き詰まりや誤り、遠回りを伴う。「算数の授業は、つまづきや間違っている居場所であり、柔軟に考えを変容する」という真実感のある数学的に考える力を探究し続けるという生命力に満ちた姿を期待したい。

参考・引用文献

- 1 文部科学省、「小学校学習指導要領解説、算数編、2017、pp21-29.
- 2 佐伯胖、「考えることの教育」、国土社、1991、pp15-75.
- 3 コルトハーヘン、武田信子訳「教師教育」学文社、pp8-61.
- 4 柿沢賢信訳、G. ポリヤ「いかにして問題をとくか」、昭和60年、pp10-23、pp44-54、66-68.
- 5 OECD 教育研究革新センター編著、「生きる力を育む創造的数学力」、明石書店、2015、pp37-43.
- 6 エンゲストローム、「拡張による学習」新曜社、2010 pp5-11.
- 6 中原忠夫「構成的アプローチの研究」聖文新社、平成25年、pp196-197.

(令和5年12月25日 受理)