

超伝導渦糸揺らぎ状態におけるスピnhall効果の 理論

岡山大学大学院自然科学研究科
学際基礎科学専攻
量子多体物理学研究室

51502403

平 拓也

2023 年 3 月

概要

本研究では、超伝導渦糸揺らぎ状態におけるスピnhall効果について理論的に調べた。多くの超伝導体ではスピン-重項クーパー対が実現しているが、これはスピン偏極を持つことができない。したがって、スピンを運ぶ担い手としてはボゴリューボフ準粒子が考えられ、これまでに多くの研究がされてきた。しかし、第二種超伝導体においては特定の磁場下で超伝導渦糸状態が実現し、そこでは超伝導渦糸がスピン偏極を持てるために、渦糸の運動によってもスピンを運ぶことができる。渦糸の運動は横方向の電圧を誘起するため、これは渦糸の運動によるスピnhall効果と考えられる。本研究はこの新しい機構のスピnhall効果の振る舞いを超伝導揺らぎの範囲で明らかにするために行った。近年、超伝導体/強磁性絶縁体の接合系におけるスピンゼーベック効果の実験で、電気抵抗が急激に減少する温度領域で逆スピnhall電圧がピーク構造を示すことが報告された。この実験結果について、当初はコヒーレンスピーク効果の観点から解釈されていたが、その後スピンゼーベック効果ではコヒーレンスピーク効果は現れないことが理論的に指摘され、その解釈に問題が残ったままであった。そこで本研究では、(逆)スピnhall効果に焦点を当て、その振る舞いを明らかにすることで新しい解釈を提案することを試みた。電気抵抗が有限の温度領域では超伝導揺らぎの影響が支配的である。そこで、本研究では、超伝導渦糸の運動によるスピnhall効果について超伝導揺らぎの理論に基づいて考察し、”vortex スピnhall効果”という新しいスピnhall効果として提案した。Vortex スピnhall効果の振る舞いを明らかにするために、久保公式に基づいてスピnhall伝導度を微視的に計算し、その温度依存性を調べた。特に、その計算過程の一つであるスピン流ヴァーテクスの導出は本研究で初めて行われ、熱流ヴァーテクスとの関係を明らかにした。得られた結果は vortex スピnhall効果と vortex ネルンスト効果に強い類似性があることを示した。また、得られた逆スピnhall電圧の温度依存性をスピンゼーベック効果の実験結果と比較することで、vortex スピnhall効果は実験結果を説明できることを示した。さらに、本研究で明らかにされた vortex スピnhall効果と vortex ネルンスト効果の類似性によって、温度依存性に着目すると両者は同じ振る舞いを示すため実験的に区別することが困難という問題が生じる。そこで、両者を実験的に区別できるのかについても調べ、温度勾配依存性に着目することで両者を区別して測定可能であることを明らかにした。

目次

第 1 章	序論	3
1.1	超伝導スピントロニクス	3
1.2	スピンホール効果	4
1.3	スピンゼーベック効果	5
1.4	超伝導体におけるスピンゼーベック実験とその解釈	6
1.5	本研究の目的	8
1.6	本論文のアウトライン	9
第 2 章	定式化	10
2.1	Vortex スピンホール効果の提案	10
2.2	モデル	12
2.3	久保公式による vortex spin Hall 伝導度の計算	13
第 3 章	Vortex spin Hall 効果の計算	18
3.1	スピン流/電流ヴァーテクス	18
3.2	ガウス揺らぎの範囲における vortex スピンホール伝導度	27
3.3	Hartree 近似による非ガウス揺らぎへの拡張	31
3.4	電気抵抗率の温度依存性	36
3.5	Vortex spin Hall 効果の温度依存性	38
第 4 章	Vortex spin Hall 効果の検出方法	45
4.1	Vortex Nernst/Ettingshausen 効果との類似性	45
4.2	温度勾配依存性による両者の区別	46
第 5 章	まとめ	48

第 1 章

序論

1.1 超伝導スピントロニクス

電子の電荷自由度に着目した電子技術をエレクトロニクスと呼ぶのに対して、電子のスピン自由度にも着目した電子技術をスピントロニクスと呼ぶ。スピントロニクスは主に通常金属や半導体を舞台として研究されてきた。スピントロニクスは既に実社会への応用もされるようになっており、身近な例では巨大磁気抵抗効果を応用したハードディスクドライブの高密度化などがある。しかし、スピントロニクスはこのような金属・半導体にとどまらず、超伝導体を舞台としたものも考えられてきた。実際、1976 年に Aronov が超伝導体へのスピン注入を議論 [1] してからこれまでに、超伝導体におけるスピン輸送現象について理論的な研究 [2–14] 及び実験的な研究 [15–23] が盛んに行われており、超伝導スピントロニクスと呼ばれる分野の出現につながっている。特に、実験技術が発展して超伝導体中のスピン輸送現象の測定が行われるようになってきた 21 世紀以降において、超伝導スピントロニクスは大きく注目されるようになった。超伝導スピントロニクスと従来のスピントロニクスの大きな違いの一つにスピン流のキャリアの違いがある。例えば通常金属であれば伝導電子がスピンを運ぶことができるが、超伝導体では電子はクーパー対を組むため問題が生じる。スピン三重項クーパー対であればクーパー対そのものがスピン流の担い手となることができる [24] が、スピン一重項クーパー対だとスピン偏極できないためスピン流の担い手になれない。そのため、別のキャリアを考える必要があるなど超伝導特有の問題が生じる。超伝導スピントロニクスはその基礎の部分においてもまだ未解明なことも多いため基礎研究が多いが、応用に関する研究も増えつつあり、例えば省エネルギーな計算機の開発 [25] があり、これからの社会への応用が期待される。

1.2 スピンホール効果

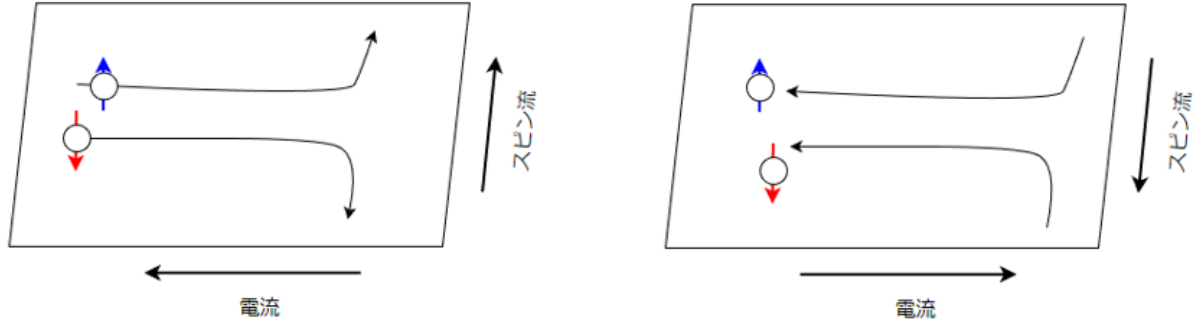


図 1.1: スピンホール効果（左）と逆スピンホール効果（右）の概念図

非磁性体中を流れる電流を考えると、電子はスピン軌道相互作用による散乱が起こるが、アップスピンとダウンスピンでは散乱の方向が異なる。これによって、図 1.1 の左のように、非磁性体を流れる電流からその垂直方向にスピン流が生じる。この現象はスピンホール効果と呼ばれており、その逆過程の、スピン流が流れているときにスピン軌道相互作用によってその垂直方向に電流が生じる現象（図 1.1 の右）は逆スピンホール効果と呼ばれている [26–28]。スピンホール効果のミクロな機構はいくつか知られているが、そのうちの一つである skew scattering 過程について説明する。これは不純物によるスピン軌道相互作用によってスピン依存の散乱が起こる効果である。簡単のためにポテンシャルとしてデルタ関数型のポテンシャル $V = v\delta(\mathbf{r})$ の場合を考える。このとき、スピン軌道相互作用を波数表示で表すと、散乱前後の波数を $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$ として

$$\begin{aligned} H_{so} &= \lambda_{so} \int d^3r c^\dagger [(\nabla V \times \mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\sigma}] c \\ &= i\lambda_{so}v \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}'}^\dagger [(\mathbf{k}' \times \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}] c_{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (1.1)$$

という形で表される。この相互作用の形に従って散乱後の波数 $\mathbf{k}'$ は電子スピン $\boldsymbol{\sigma}$ の向きに応じて垂直方向に曲げられる。アップスピンとダウンスピンでは符号が反転するため、入射電流に垂直方向にスピン流が生じる。これがスピンホール効果の skew scattering 過程と呼ばれるものである。この過程以外にも、スピン軌道相互作用によって電流演算子に

補正項

$$\delta \mathbf{J}_c = -ie\lambda_{so}v \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}'}^\dagger [(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \times \boldsymbol{\sigma}] c_{\mathbf{k}} \quad (1.2)$$

が加わることで生じる side jump 過程や、不純物ではなく物質のバンド構造に起因する内因性スピンホール効果などが知られている。

スピンホール効果は上で見たように電流 $\mathbf{J}_c$ とスピン $\boldsymbol{\sigma}$ に垂直な方向にスピン流 $\mathbf{J}_s$ が生じるので、

$$\mathbf{J}_s = \theta_{SH} \mathbf{J}_c \times \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (1.3)$$

のように書くことができる。逆過程の逆スピンホール効果についても同様に

$$\mathbf{J}_c = \theta_{SH} \mathbf{J}_s \times \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (1.4)$$

と表せる。ここで係数の θ_{SH} はスピンホール角と呼ばれ、物質によって決まるパラメータである。逆スピンホール効果によってスピン流を電氣的に測定することが可能なため、スピントロニクス研究において極めて重要な現象である。

1.3 スピンゼーベック効果

金属に温度勾配をかけることでその方向に電流が生じる現象はゼーベック効果としてよく知られているが、スピン流も温度勾配によって駆動することが可能である [29, 30]。図 1.2 のように強磁性絶縁体と非磁性体の接合系を考えて、温度勾配を印加する。すると、強磁性体の磁化の歳差運動が熱的に励起され、その緩和に伴って非磁性体にスピン流が注入される。その過程は次のランダウーリフシッツ－ギルバート方程式（LLG 方程式）

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H} + \frac{\alpha}{M} \mathbf{M} \times \frac{d}{dt} \mathbf{M} \quad (1.5)$$

において熱揺らぎの効果を取り込んで現象論的に説明することができる。LLG 方程式に熱揺らぎの効果を取り込む方法として、外部磁場 $\mathbf{H}$ に加えて熱的に揺らぐランダムな磁場 $\mathbf{h}$ を取り込む方法がある。例えば、完全にランダムな場合は

$$\langle h_i(t) h_j(t') \rangle = AT \delta_{i,j} \delta(t - t') \quad (1.6)$$

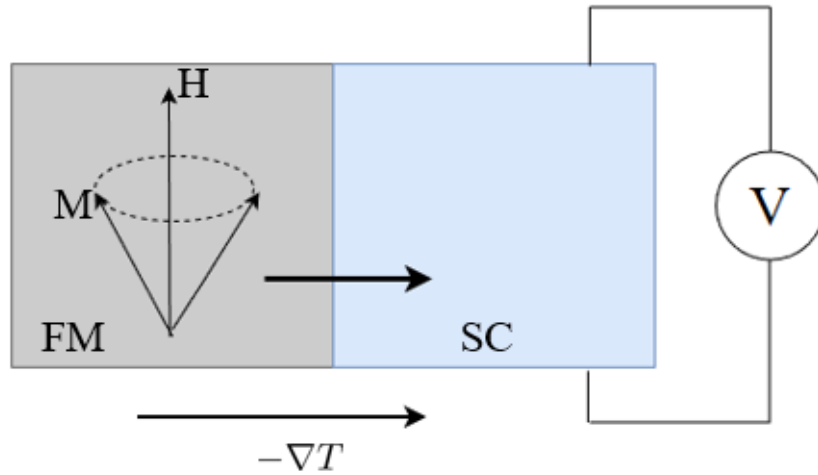


図 1.2: スピンゼーベック効果の概念図。温度勾配によって強磁性体からスピン流が注入され、逆スピンホール効果で電流に変換される。

を満たすようなホワイトノイズの磁場 $\mathbf{h}$ を導入すれば良い。ここで A は比例係数、 T は温度。このような磁場を考えると、絶対零度では熱揺らぎがないので磁化 $\mathbf{M}$ は外部磁場の方向を向いているが、温度が上がるにつれ、熱揺らぎによる有効磁場によって磁化が運動する。特に、 $\langle \mathbf{M} \times d\mathbf{M}/dt \rangle$ も有限になるため、これは磁化にかかるトルクなのでそれによって歳差運動が励起され、ターゲットへスピン流が注入される。

このように熱的な駆動力によって非磁性体へ注入されたスピン流はその後、前節で説明したようにスピン軌道相互作用によって垂直方向に電流が生じる逆スピンホール効果が起こる。したがって、温度勾配を印加するとそれによってスピン流が誘起され、それが逆スピンホール効果で電流に変換される。この一連の現象をスピンゼーベック効果という。

1.4 超伝導体におけるスピンゼーベック実験とその解釈

2018 年に Umeda らによって超伝導体 NbN とフェリ磁性絶縁体 $\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$ (YIG) の接合系におけるスピンゼーベック効果の実験が報告された [21]。そこでは、図 1.3 右のように電気抵抗が急激に減少している超伝導転移温度近傍で逆スピンホール電圧の信号がピーク構造を持つことが観測された。そこでは、2017 年に報告された超伝導体へのスピンプンピング（強磁性体にマイクロ波を照射することで磁化の歳差運動を励起させ（強磁

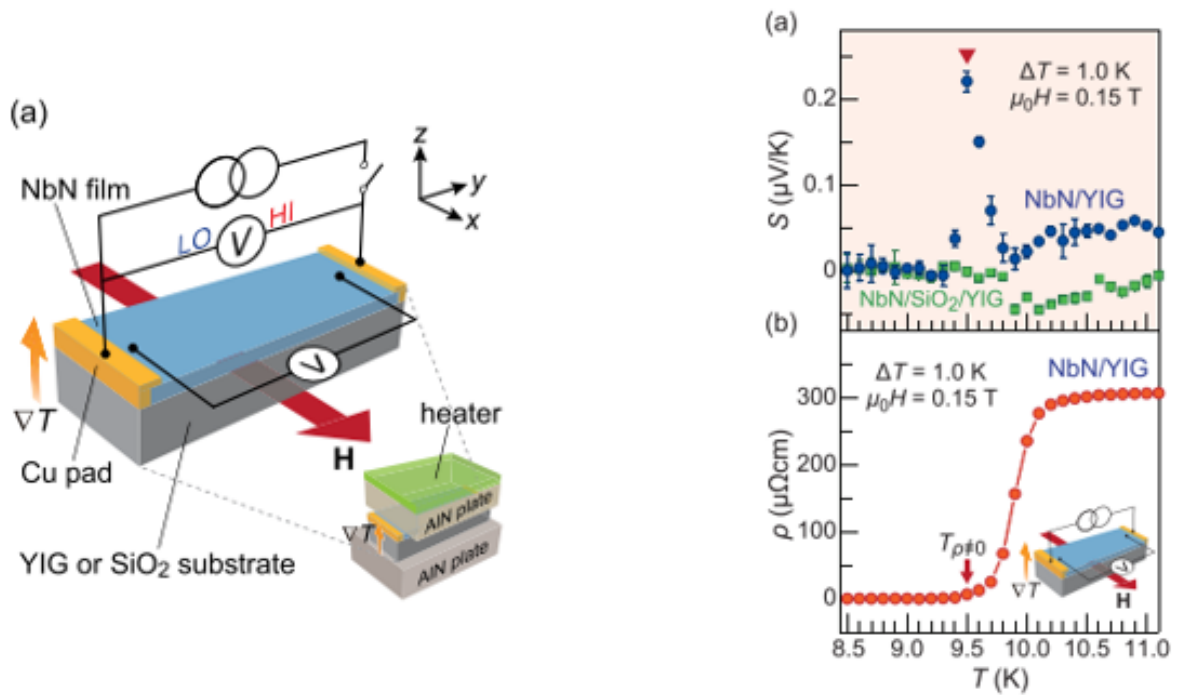


図 1.3: 超伝導体 NbN を用いたスピントルク効果の実験。左が実験の配置図。右 (a) が逆スピンホール電圧の温度依存性。右 (b) が電気抵抗率の温度依存性。Reprinted from Ref. [21], with the permission of AIP Publishing.

性共鳴)、ターゲットヘスピン流が注入される現象) でコヒーレンスピークが生じるという理論研究 [10] に基づいて解釈が行われた。しかし、2019 年に Kato らによって超伝導体におけるスピントルク効果について理論的に調べられた結果、スピントルク効果ではスピントラップで見られたようなコヒーレンスピーク効果は生じないことが示された [13]。この研究は温度勾配によって強磁性体から超伝導体ヘスピン流が注入される部分に着目して理論計算が行われている。それによると、スピントルク効果は超伝導ギャップより十分大きいエネルギーのマグノンからの寄与があるために、超伝導ギャップより十分低いエネルギー領域でしか現れないコヒーレンスピーク効果が消えてしまう (図 1.4)。これが、マイクロ波の周波数でエネルギースケールが決まるスピントラップとの違いである。

以上のことから、超伝導体におけるスピントルク効果の実験で観測された逆スピンホール電圧の急激な増大について、どのように解釈すればよいのかという問題が残ったままとなった。

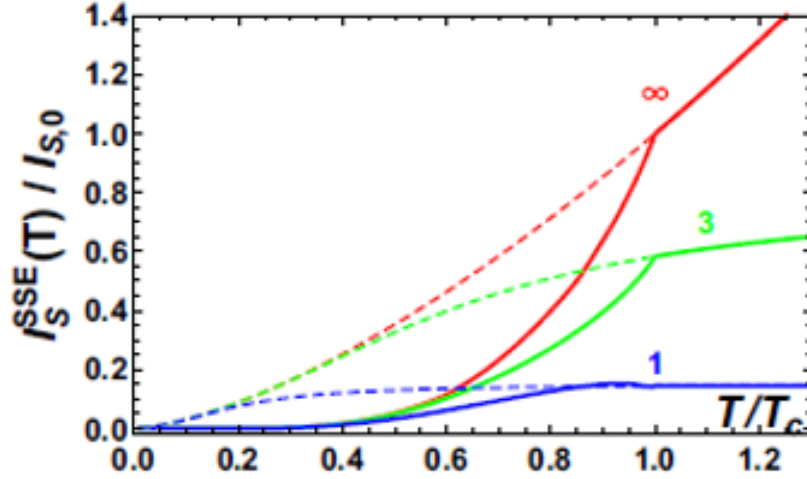


図 1.4: スピンゼーベック効果で超伝導体に注入されるスピン流の温度依存性。グラフ内の数字はマグノンのカットオフエネルギー。Reprinted with permission from Ref. [13]. Copyright (2019) by the American Physical Society.

1.5 本研究の目的

本研究では、1.4 節で紹介した超伝導体 (NbN)/強磁性絶縁体 ($\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$) におけるスピンゼーベック効果の実験 [21] に新しい解釈を与えることを目的としている。先行の理論研究 [13] では、スピンゼーベック効果における熱的なスピン流注入の部分に着目して理論研究を行い、コヒーレンスピーク効果が現れないことを示した。

そこで、本研究では、スピンゼーベック効果で起きているもう一つの現象、すなわち注入されたスピン流が電流として検出される、逆スピンホール効果について着目する。実験で観測された逆スピンホール効果のピークが現れる温度は、電気抵抗が急激に減少し始めてゼロに落ちるまでの間の温度領域である。そのような温度領域においては超伝導揺らぎの影響が支配的となることが知られている。また、実験で用いられている超伝導体 NbN は第二種超伝導体であり、印加されている磁場の強さを考えると超伝導渦糸状態が実現している。このような超伝導渦糸状態の有限電気抵抗領域は、超伝導ゆらぎの理論で記述されることが知られている。したがって、本研究では、超伝導渦糸揺らぎ状態におけるスピ

ンホール効果について、その振る舞いを明らかにすることを目的として行った。そしてスピitzerバック効果の実験 [21] に適用して実験結果に対する新しい解釈を提案することを目指した。

1.6 本論文のアウトライン

本論文では、超伝導渦糸の運動によって生じる新しいスピナーホール効果” vortex スピナーホール効果” について、超伝導渦糸揺らぎが与える影響に着目して理論的な解析を行う。

第 2 章では、先行研究の問題点を解消し、スピitzerバック効果の実験結果を説明できる理論として、”vortex スピナーホール効果”を提案する。vortex スピナーホール効果を微視的な理論に基づいて議論するために、線形応答理論の久保公式に基づいて vortex スピナーホール伝導度の定式化を行う。また、対応する Feynman ダイアグラムを示し、実際にどのような計算をするのかについて述べる。

第 3 章では、2 章の定式化に基づいて vortex スピナーホール効果の理論的な解析を行う。まず、上記の Feynman ダイアグラムに現れるスピナー流/電流ヴァーテクス関数の計算を行う。特にスピナー流ヴァーテクスの計算は本研究で初めて明らかにされたものであり、先行の研究がある熱流ヴァーテクスとの関係についても示す。その後、得られた結果を用いてハートリー近似の範囲で超伝導揺らぎを取り込み、vortex スピナーホール効果の温度依存性について議論する。また、本研究の理論結果を実験結果に適用して vortex スピナーホール効果による新しい解釈を提案する。

第 4 章では、本研究で提案された vortex スピナーホール効果の実験的検出方法について述べる。(逆) vortex スピナーホール効果と類似性のある現象として、vortex ネルンスト効果 (エッティングスハウゼン効果) を紹介する。この両者が実験的に区別できるのかが問題になる。そこで、温度勾配の依存性に着目することでそれらを区別して実験的に検出することが可能であることを示す。

なお、本論文では、 $\hbar = k_B = c = 1$ の単位系を用いる

第 2 章

定式化

2.1 Vortex スピンホール効果の提案

この節では、本研究で新しく提案される”vortex スピンホール効果”のアイデアについて述べる。

第 II 種超伝導体と呼ばれる超伝導体は、超伝導転移温度 T_c 以下で超伝導体に磁場を印加したとき、それが下部臨界磁場 H_{c1} と上部臨界磁場 H_{c2} の間であれば超伝導が部分的に壊れて磁束が侵入する超伝導渦糸 (vortex) 状態が実現する。今、この vortex が運動する状況を考える (図 2.1)。まず、図 2.1(a) のように、始め十分に離れていた二点 P_1, P_2 の位相差がほとんど 0 だったときを考える。その後、vortex がその二点間を横切ると、vortex の周りを一周すると位相が 2π ずれることを考えれば、 P_1, P_2 の位相差は大きくなる。このとき、ジョセフソンの加速方程式

$$\frac{d}{dt}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{2e}{\hbar} V_{12} \quad (2.1)$$

に従って vortex の運動方向の垂直方向に電圧が生じる。例えば、温度勾配を印加して vortex の運動を駆動した場合、vortex は温度勾配の方向に流れるので電圧は温度勾配に垂直に生じる。すなわち、超伝導渦糸状態の超伝導体に温度勾配が印加されると、温度勾配による熱流が vortex の運動を介して電流に変換される。これは vortex ネルンスト効果と呼ばれている [32, 33]。(vortex ネルンスト効果については後で再び詳しく触れる。)

本研究では、この超伝導渦糸の運動によって横方向に電流が生じることに着目した。図 2.2 に表されているように、超伝導渦糸内部にはスピン偏極が存在できるため、その状況下では超伝導渦糸の運動はその方向にスピンを運ぶことになる。このことと、上記で説明

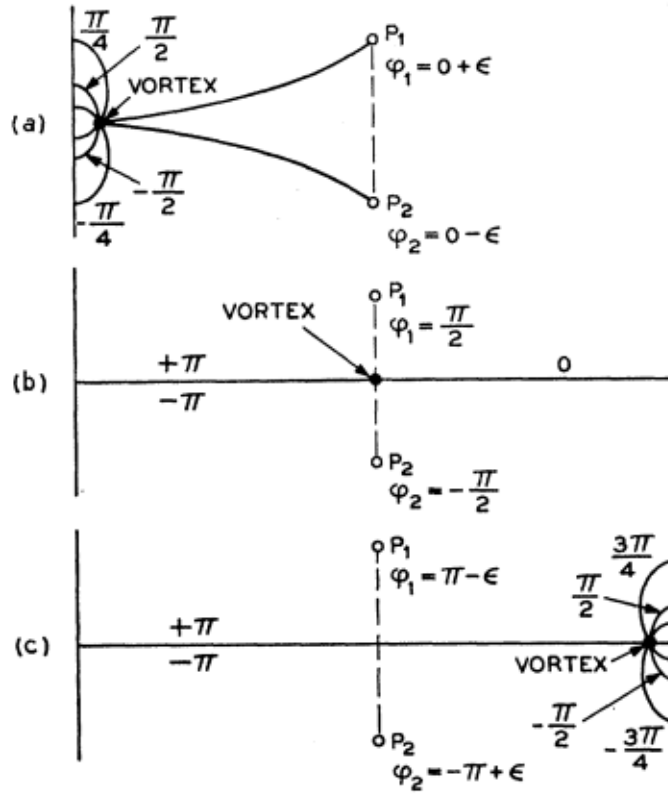


図 2.1: vortex の運動による電圧誘起の概念図。vortex が右に動くに連れて、P1,P2 での位相が変化していることが分かる。Reprinted with permission from Ref [31]. Copyright (1966) by the American Physical Society.

した超伝導渦糸の運動でその横方向に電圧が生じることを組み合わせて考えると、超伝導渦糸に束縛されたスピンによるスピン流があるとき、その横方向への電流に変換される。したがって、スピン流が電流に変換されているので、これはスピントラップ効果であるといえる。この超伝導渦糸の運動によるスピントラップ効果は、1.2 節で説明したような従来のスピントラップ効果とは異なり、スピン軌道相互作用を必要としない新しい機構のスピントラップ効果となっている。

本研究ではこの超伝導渦糸によるスピントラップ効果について考察する。さらに、本研究では超伝導渦糸揺らぎの影響についても考慮して議論を行う。これは、電気抵抗が温度低下とともに急激に減少し始めてから電気抵抗が 0 となるまでの、有限の電気抵抗を示す温度領域においては超伝導揺らぎが支配的な影響をもたらすからである [34–37]。実際、本研究のモチベーションである超伝導体におけるスピントラップ効果の実験 [21] におい

ても、電気抵抗が有限の温度領域で逆スピンホール電圧がピーク構造を示している。したがって、その実験結果を説明するためには、超伝導揺らぎの理論に基づいた議論をする必要がある。関連する理論の先行研究としては [38] があるが、これは平均場的なアプローチであり、上記のような温度依存性を説明することはできない。ゆえに、本研究で超伝導揺らぎの理論に基づいた超伝導渦糸の運動によるスピンホール効果を考察する意義は大きく、以降では、この現象を”vortex スピンホール効果”と呼ぶことにする。

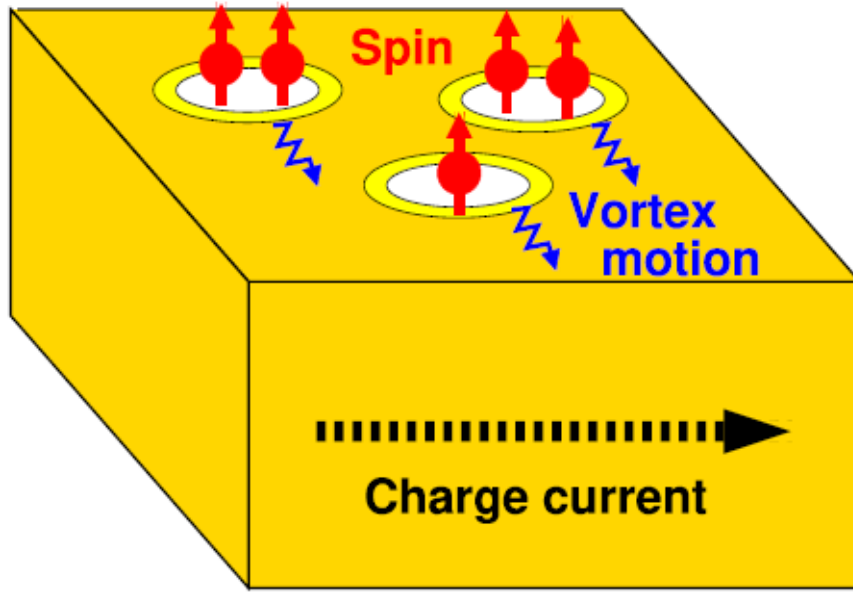


図 2.2: vortex スピンホール効果の概念図。超伝導渦糸が運動するとき、その横方向に電流が生じる。超伝導渦糸はスピン偏極を持てるので、スピン流が電流に変換されたとみなすことができる。

2.2 モデル

本研究では超伝導体として s 波超伝導体を考え、その BCS ハミルトニアンは以下のよう表される。

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - |g| \int d^3r \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) \quad (2.2)$$

ここで g は引力相互作用の強さ、 $\Psi(\mathbf{r}) = \psi_-(\mathbf{r})\psi_+(\mathbf{r})$ は秩序変数、 $\psi_\sigma(\mathbf{r})$ はスピン σ の電子の場の演算子である。また、 $\mathcal{H}_0$ は一粒子ハミルトニアンで、

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\sigma} \int d^3r \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) \left[\frac{(-i\nabla + |e|\mathbf{A})^2}{2m} + U(\mathbf{r}) \right] \psi_{\sigma}(\mathbf{r}) \quad (2.3)$$

と表される。ここで、 $e(< 0)$ は電子の電荷、 $\mathbf{A}$ はベクトルポテンシャル、 $U(\mathbf{r})$ は不純物ポテンシャルである。また、不純物についてはランダムネスを仮定し、以下の不純物平均についての関係式を満たすものとする。

$$\langle U(\mathbf{r})U(\mathbf{r}') \rangle = \frac{1}{2\pi N(0)\tau} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.4)$$

ここで、 $N(0)$ はフェルミ面での状態密度、 τ は不純物散乱による電子の緩和時間である。また、2.1 節で説明したように、vortex スピンホール効果はスピン軌道相互作用を仮定しないスピンホール効果のため、ハミルトニアンにスピン軌道相互作用の項は入っていない。本研究では、超伝導の影響は超伝導揺らぎとして取り込むので、グリーン関数は正常相のものを用いる。このときの温度グリーン関数は

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{p},\sigma}(\varepsilon_n) &= \frac{1}{i\tilde{\varepsilon}_n - \epsilon_{\mathbf{p}} + \mu_{\sigma}} \\ &= \frac{1}{i\tilde{\varepsilon}_n - \xi_{\mathbf{p}} + \sigma\mu_s/2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

である。ここで $\tilde{\varepsilon}_n = \varepsilon_n + \text{sgn}(\varepsilon_n)/2\tau$ 、 $\varepsilon_n = 2\pi T(n + 1/2)$ はフェルミオニックな松原振動数、 $\epsilon_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/2m$ 、 μ_{σ} はスピン依存化学ポテンシャルである。また、 $\xi_{\mathbf{p}} = \epsilon_{\mathbf{p}} - \mu_0$ と定義し、 $\mu_0 = (\mu_+ + \mu_-)/2$ はフェルミエネルギー、 $\mu_s = \mu_+ - \mu_-$ はスピン蓄積と呼ばれる物理量である。また、本研究では dirty limit な超伝導体を考えて、 $1 \gg 2\pi T_{c0}\tau$ が成り立っているものとする。 T_{c0} はゼロ磁場における超伝導転移温度である。この温度グリーン関数を用いて次節の久保公式の計算を行う。

2.3 久保公式による vortex spin Hall 伝導度の計算

上記のモデルに基づいて vortex スピンホール効果を議論する。一般に、伝導度を求めるためには以下のように自由エネルギーをベクトルポテンシャルで二回汎関数微分することで得られることが知られている。

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\Omega} \frac{\delta^2 F_{GL}(\Omega)}{\delta A_i \delta A_j} \Big|_{\Omega \rightarrow 0} \quad (2.6)$$

これを相関関数で表したものが次の久保公式であり、それを用いて vortex スピンホール伝導度を計算する。

$$\sigma_{xy}^{(\text{SH})} = \frac{1}{i\Omega} \left(K_{xy}^{(\text{SH})R}(\Omega) - K_{xy}^{(\text{SH})R}(0) \right) \Big|_{\Omega \rightarrow 0} \quad (2.7)$$

ここで、 $K_{xy}^{(\text{SH})R}(\Omega)$ は遅延相関関数と呼ばれるものであり、次のように松原相関関数 $K_{xy}^{(\text{SH})}(i\Omega_m)$ から解析接続することで求められる。

$$K_{xy}^{(\text{SH})}(i\Omega_m) = \frac{1}{V} \int d^3r \int d^3r' \int_0^\beta du e^{i\Omega_m u} \left\langle T_u \mathcal{J}_x^{(s)}(\mathbf{r}, u) \mathcal{J}_y^{(c)}(\mathbf{r}', 0) \right\rangle \quad (2.8)$$

$$K_{xy}^{(\text{SH})R}(\Omega) = K_{xy}^{(\text{SH})}(i\Omega_m \rightarrow \Omega + i0_+) \quad (2.9)$$

ここで、 V は超伝導体の体積、 $\beta = 1/T$ は逆温度、 u は虚時間、 T_u は時間順序積を表している。また、 $\mathcal{J}^{(c)}$ と $\mathcal{J}^{(s)}$ はそれぞれ電流演算子、スピン流演算子であり、次のように定義される。

$$\mathcal{J}^{(c)} = \frac{-|e|}{2m} \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger} (-i\nabla + |e|\mathbf{A}) \psi_{\sigma} + H.c., \quad (2.10)$$

$$\mathcal{J}^{(s)} = \frac{-|e|}{2m} \sum_{\sigma} \sigma \psi_{\sigma}^{\dagger} (-i\nabla + |e|\mathbf{A}) \psi_{\sigma} + H.c., \quad (2.11)$$

上記のスピン流演算子の定義においてスピン σ だけでなく電荷 e も含まれているのは電流演算子と次元を合わせるためである。以上より、vortex スピンホール伝導度を求めるためには式 (2.8) を計算すればよいことがわかる。この計算を実行するために、ファインマン・ダイアグラムのアプローチを用いる。カレント-カレント相関のダイアグラムは二次までの範囲でもいくつかあることが知られているが、その中でも最も支配的な寄与をもたらすと考えられる Aslamasov-Larkin 項 (AL 項) について考える。AL 項が最も支配的であると考えられる理由は、後に説明される、vortex スピンホール効果と vortex ネルンスト

効果の類似性によるものである。vortex ネルンスト効果に関する先行研究では AL 項が最も支配的であることが報告されている [39]。したがって、本研究でも AL 項が支配的であるとして計算を行う。

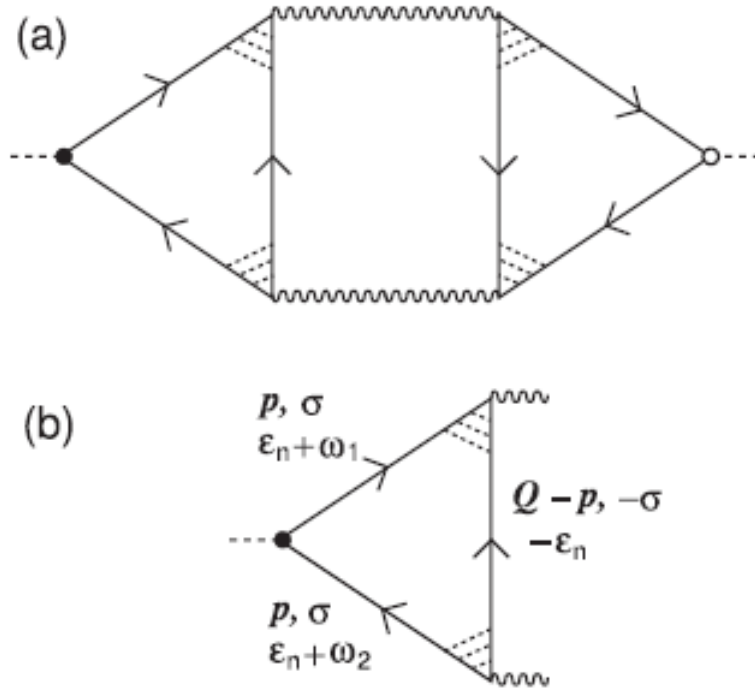


図 2.3: AL 項のファインマン・ダイアグラム。実線がグリーン関数、波線が超伝導揺らぎである。点線は不純物によるバーテックス補正でクーペロンと呼ばれる。

図 2.3 は AL 項のファインマン・ダイアグラムである。ここで、以降の計算では運動量表示で考えたいが、今、磁場中の超伝導体を考えているので、まず位置表示から考え運動量表示との関係を示す。

磁場中の温度グリーン関数はゼロ磁場下の温度グリーン関数と次のような関係が成り立つ。

$$G_{\epsilon_n, \sigma}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_{\epsilon_n, \sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \exp \left(i|e| \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right) \quad (2.12)$$

このとき、ダイアグラムのトライアングル部分 B (図 2.3(b)) に着目すると、

$$\begin{aligned}
B &= \int_r \int_{r_1} \int_{r_2} \Psi^*(\mathbf{r}_1) G_{\varepsilon_n, \sigma}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) G_{-\varepsilon_n + \omega, -\sigma}^H(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G_{\varepsilon_n, \sigma}^H(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}_2) \\
&= \int_r \int_{r_1} \int_{r_2} \Psi^*(\mathbf{r}_1) G_{\varepsilon_n, \sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) G_{-\varepsilon_n + \omega, \sigma}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) G_{\varepsilon_n, \sigma}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \\
&\quad \times \exp\left(i|e|\left(\int_r^{r_2} + \int_{r_1}^{r_2} + \int_{r_1}^r\right) \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}\right) \Psi(\mathbf{r}_2)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

となる (ここでの議論ではクーペロンなどは本質的でないので一旦無視している)。ここで、

$$\int_r^{r_2} + \int_{r_1}^{r_2} + \int_{r_1}^r = 2 \int_{r_1}^{r_2} \tag{2.14}$$

より

$$B = \int_r \int_{r_1} \int_{r_2} \Psi^*(\mathbf{r}_1) G_{\varepsilon_n, \sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) G_{-\varepsilon_n + \omega, \sigma}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) G_{\varepsilon_n, \sigma}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \exp\left(2i|e| \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}\right) \Psi(\mathbf{r}_2) \tag{2.15}$$

となる。また、恒等式

$$\exp\left(2i|e| \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}\right) \Psi(\mathbf{r}_2) = \exp(-i(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \mathbf{Q}(\mathbf{r}_1)) \Psi(\mathbf{r}_1) \tag{2.16}$$

が成り立つことが知られている。ここで $\mathbf{Q} = -i\nabla + 2|e|\mathbf{A}$ はゲージ不変な運動量である。また、ゼロ磁場下では温度グリーン関数は並進対称性があるので運動量表示することができる。

$$G_{\varepsilon_n, \sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) = \int_{p_1} G_{\varepsilon_n, \sigma}(\mathbf{p}_1) e^{i\mathbf{p}_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)} \tag{2.17}$$

などのフーリエ変換をもちいて整理すると

$$\begin{aligned}
B &= \int_{r, r_1, r_2} \int_{p, p_1, p_2} \Psi^*(\mathbf{r}_1) G_{\varepsilon_n, \sigma}(\mathbf{p}_1) G_{-\varepsilon_n + \omega, -\sigma}(\mathbf{p}_2) G_{\varepsilon_n, \sigma}(\mathbf{p}_3) \\
&\quad \times e^{i(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)\mathbf{r}_1} e^{-i(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1)\mathbf{r}_2} e^{i(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)\mathbf{r}} e^{-i(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\mathbf{Q}(\mathbf{r}_1)} \Psi(\mathbf{r}_1)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

となる。 $\mathbf{r}, \mathbf{r}_2$ についての積分を行うと $\delta(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1 - \mathbf{Q})\delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)$ の因子が出てくるため、運動量についても積分すると

$$B = \int_{r_1} \int_{p_1} \Psi^*(\mathbf{r}_1) G_{\varepsilon_n, \sigma}(\mathbf{p}_1) G_{-\varepsilon_n + \omega, -\sigma}(\mathbf{Q} - \mathbf{p}_1) G_{\varepsilon_n, \sigma}(\mathbf{p}_1) \Psi(\mathbf{r}_1) \quad (2.19)$$

のようにまとめられる。 $\mathbf{Q}$ については最終的に常に級数展開して計算するため、ただの運動量として扱うことができ、図 2.3(b) のような運動量表示のダイアグラムを考えて良いことが明らかとなった。したがって、これ以降では、全て運動量表示に基づいて計算を行う。

第 3 章

Vortex spin Hall 効果の計算

3.1 スピン流/電流ヴァーテクス

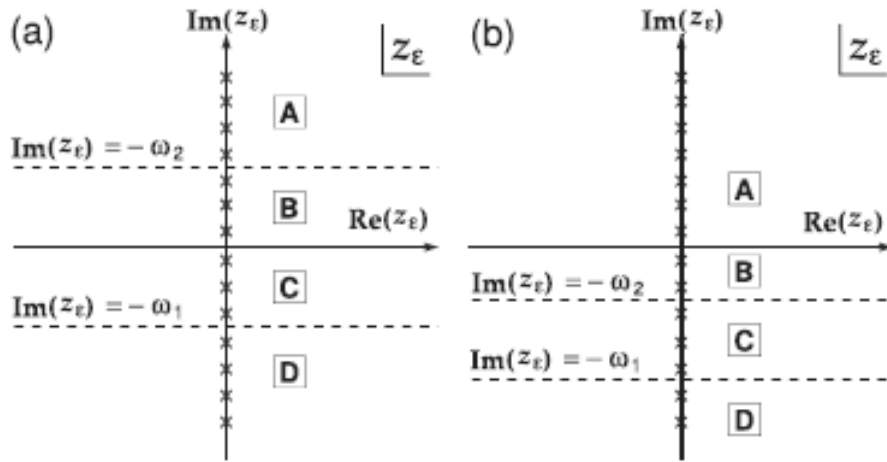


図 3.1: 松原和を取るときの ω の正負の組み合わせによるパターン。

この節では 2.3(b) で示されるダイアグラムの計算を行う。。このダイアグラムは頂点が電流、スピン流の場合にそれぞれ電流ヴァーテクス $\mathbf{J}^{(c)}$ 、スピン流ヴァーテクス $\mathbf{J}^{(s)}$ といい、グリーン関数を用いて

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{(c)} = & |e|T \sum_{\varepsilon_n} \sum_{\sigma} \int_{\mathbf{p}} \mathbf{v}_{\mathbf{p}} G_{\mathbf{Q}-\mathbf{p},-\sigma}(-\varepsilon_n) G_{\mathbf{p},\sigma}(\varepsilon_n + \omega_1) G_{\mathbf{p},\sigma}(\varepsilon_n + \omega_2) \\ & \times C_{\mathbf{Q},\sigma}(\varepsilon_n + \omega_1, -\varepsilon_n) C_{\mathbf{Q},\sigma}(\varepsilon_n + \omega_2, -\varepsilon_n) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{(s)} = & |e|T \sum_{\varepsilon_n} \sum_{\sigma} \sigma \int_{\mathbf{p}} \mathbf{v}_{\mathbf{p}} G_{\mathbf{Q}-\mathbf{p},-\sigma}(-\varepsilon_n) G_{\mathbf{p},\sigma}(\varepsilon_n + \omega_1) G_{\mathbf{p},\sigma}(\varepsilon_n + \omega_2) \\ & \times C_{\mathbf{Q},\sigma}(\varepsilon_n + \omega_1, -\varepsilon_n) C_{\mathbf{Q},\sigma}(\varepsilon_n + \omega_2, -\varepsilon_n) \end{aligned} \quad (3.2)$$

と表される。ここで、 $\mathbf{v}_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/m$ 、 $\int_{\mathbf{p}} = \int d^3p/(2\pi)^3$ である。また、

$$C_{\mathbf{Q}}(\varepsilon_n + \omega_{\nu}, -\varepsilon_n) = \frac{\tau^{-1} \Theta(\varepsilon_n(\varepsilon_n + \omega_{\nu}))}{|2\varepsilon_n + \omega_{\nu}| + DQ^2 - i\sigma\mu_s \text{sgn}(\varepsilon_n)} \quad (3.3)$$

はクーペロンと呼ばれるヴァーテックス補正である。ここで、 $\Theta(x)$ はステップ関数、 $D = v_F^2 \tau / 3$ である。

まず初めに、電流ヴァーテックス (3.1) 式を計算する。松原周波数の和を取るときに 3.1 のような 4 つの領域に分けることができる。まず $\omega_1 > 0$ 、 $\omega_2 < 0$ のときを考える。このとき、領域 A,B,C,D におけるクーペロンの引数の松原周波数の符号はそれぞれ次のようになっている。

$$A : \varepsilon_n > 0, \varepsilon_n + \omega_1 > 0, \varepsilon_n + \omega_2 > 0$$

$$B : \varepsilon_n > 0, \varepsilon_n + \omega_1 > 0, \varepsilon_n + \omega_2 < 0$$

$$C : \varepsilon_n < 0, \varepsilon_n + \omega_1 > 0, \varepsilon_n + \omega_2 < 0$$

$$D : \varepsilon_n < 0, \varepsilon_n + \omega_1 < 0, \varepsilon_n + \omega_2 < 0$$

このとき、クーペロンの寄与が効いてくるのは式 (3.3) のステップ関数が 0 にならないとき、すなわちクーペロンの 2 つの松原周波数が異符号のときなので、領域 A、D を考えれば良いことがわかる。次に $\omega_1 > 0$ 、 $\omega_2 > 0$ のときについて考える。先ほどと同様に、各領域における松原周波数の符号を調べると、次のようになっている。

$$A : \varepsilon_n > 0, \varepsilon_n + \omega_1 > 0, \varepsilon_n + \omega_2 > 0$$

$$B : \varepsilon_n < 0, \varepsilon_n + \omega_1 > 0, \varepsilon_n + \omega_2 > 0$$

$$C : \varepsilon_n < 0, \varepsilon_n + \omega_1 > 0, \varepsilon_n + \omega_2 < 0$$

$$D : \varepsilon_n < 0, \varepsilon_n + \omega_1 < 0, \varepsilon_n + \omega_2 < 0$$

この場合についてもクーロンが有限の寄与をもたらすのは領域 A、D の場合になっている。 $\omega_1 < 0$ 、 $\omega_2 > 0$ の場合は ω_1 と ω_2 を取り替えれば同じ結果になり、 $\omega_1 < 0$ 、 $\omega_2 < 0$ の場合についても全体の符号が反転するだけでやはり同様の結果になるのでここでは省略する。したがって、以降では図 3.1 に表されるような場合について計算を行う。

まず、式 (3.1) の運動量積分、

$$B_{Q,\sigma} \equiv \int_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} G_{\mathbf{Q}-\mathbf{p},-\sigma}(-\varepsilon_n) G_{\mathbf{p},\sigma}(\varepsilon_n + \omega_1) G_{\mathbf{p},\sigma}(\varepsilon_n + \omega_2) \quad (3.4)$$

について考える。この積分を行うにあたって、松原周波数 ω_1, ω_2 は十分小さいので最低次の寄与だけを考えるために $\omega_{1,2} \rightarrow 0$ とする（後で見るように、スピン流ヴァーテックスは ω の 1 次の寄与をもたらすので、電流ヴァーテックスでは 0 次だけを考えればよい）。このとき、グリーン関数の具体的な表式を代入して

$$\begin{aligned} B_{Q,\sigma} &= \int_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} G_{\mathbf{Q}-\mathbf{p},-\sigma}(-\varepsilon_n) G_{\mathbf{p},\sigma}(\varepsilon_n) G_{\mathbf{p},\sigma}(\varepsilon_n) \\ &= \int_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} \frac{1}{(-i\tilde{\varepsilon}_n - \xi_{\mathbf{Q}-\mathbf{p}} - \sigma\mu_s/2)} \frac{1}{(i\tilde{\varepsilon}_n - \xi_{\mathbf{p}} + \sigma\mu_s/2)^2} \\ &= -N(0) \int d\xi_{\mathbf{p}} \left\langle \frac{v_{\mathbf{p}}}{(\xi_{\mathbf{p}} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q} + i\varepsilon_n + \sigma\mu_s/2 + i/2\tau)} \frac{1}{(\xi_{\mathbf{p}} - i\varepsilon_n - \sigma\mu_s/2 - i/2\tau)^2} \right\rangle_{FS} \end{aligned} \quad (3.5)$$

となる。ここで、

$$\xi_{\mathbf{Q}-\mathbf{p}} = \frac{(\mathbf{Q} - \mathbf{p})^2}{2m} - \mu_0 \simeq \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu_0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q} = \xi_{\mathbf{p}} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q} \quad (3.6)$$

と、 $\int_{\mathbf{p}} = N(0) \int d\xi_{\mathbf{p}} \langle \cdots \rangle_{FS}$ を用いた。 $N(0)$ はフェルミ面の状態密度、 $\langle \cdots \rangle_{FS}$ はフェルミ面平均である。上記の積分は留数定理を用いることで実行でき、

$$\begin{aligned} B_{Q,\sigma} &= -2\pi i N(0) \left\langle \frac{v_{\mathbf{p}}}{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{Q} - 2i\varepsilon_n - \sigma\mu_s + i/\tau)^2} \right\rangle_{FS} \\ &\simeq 2\pi i N(0) \langle (1 + 4\varepsilon_n\tau - 2i\sigma\mu_s\tau + 2i\tau\mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}) v_{\mathbf{p}} \rangle_{FS} \\ &= -4\pi N(0) \tau^2 DQ \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる。ここで $\langle \mathbf{v}_p \rangle_{FS} = 0$ 、 $\langle (\mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}) \mathbf{v}_p \rangle_{FS} = v_F^2 \mathbf{Q}/3$ を用いた。したがって、式 (3.1) は

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{(c)} &= -4\pi N(0)|e|\tau^2 D \mathbf{Q} T \sum_{\varepsilon_n} \sum_{\sigma} C_{\mathbf{Q},\sigma}(\varepsilon_n, -\varepsilon_n) C_{\mathbf{Q},\sigma}(\varepsilon_n, -\varepsilon_n) \\ &\equiv -4\pi N(0)|e| D \mathbf{Q} (S_A + S_D) \end{aligned} \quad (3.8)$$

となる。ここで、 S_A, S_D は領域 A,D における松原和であり、 $\omega_{1,2} \rightarrow 0$ のもとで

$$S_A = T \sum_{0 < \varepsilon_n < \infty} \sum_{\sigma} \frac{1}{(2\varepsilon_n - i\sigma\mu_s)^2} \quad (3.9)$$

$$S_D = T \sum_{-\infty < \varepsilon_n < 0} \sum_{\sigma} \frac{1}{(-2\varepsilon_n - i\sigma\mu_s)^2} \quad (3.10)$$

である。 S_D の松原和は $\varepsilon_n \rightarrow -\varepsilon_n$ と変数を取り替えることで S_A と同じであることが容易にわかる。また、 μ_s の一次の範囲で考えているので、

$$\begin{aligned} S_A &= T \sum_{0 < \varepsilon_n < \infty} \sum_{\sigma} \frac{1}{4\varepsilon_n^2} \left(1 - \frac{i\sigma\mu_s}{2\varepsilon_n} \right)^{-2} \\ &\simeq T \sum_{0 < \varepsilon_n < \infty} \sum_{\sigma} \frac{1}{4\varepsilon_n^2} \left(1 + \frac{i\sigma\mu_s}{\varepsilon_n} \right) \\ &= T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{16\pi^2 T^2} \frac{1}{(n + 1/2)^2} \\ &= \frac{1}{8\pi^2 T} \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

となる。ここで、スピンの和については $\sum_{\sigma} 1 = 2$ 、 $\sum_{\sigma} \sigma = 0$ であることを用いた。また $\psi^{(n)}$ はポリガンマ関数であり、

$$\psi^{(n)}(z) = (-1)^{n+1} n! \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(z+m)^{n+1}} \quad (3.12)$$

の関係式を満たす。以上の計算より、最終的に電流ヴァーテクスは

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^{(c)} &= -4\pi N(0)|e|D\mathbf{Q}(S_A + S_D) \\
&= -4|e|\xi_0^2 N(0)\mathbf{Q} \\
&\equiv t^{(c)} N(0)\mathbf{Q}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

となる。ここで $\xi_0 = \pi D/8T_{c0}$ である。なお、本研究では超伝導渦糸揺らぎが支配的な温度領域を考えており、後で示すようにそこでは揺らぎによる発散的な寄与があり、その温度範囲では $1/T$ の変化は無視できるため温度を T_{c0} に置き換えた。

次にスピン流ヴァーテクス (式 (3.2)) について考える。電流ヴァーテクス同様にまず運動量積分

$$B_{\mathbf{Q},\sigma} \equiv \int_{\mathbf{p}} \mathbf{v}_{\mathbf{p}} G_{\mathbf{Q}-\mathbf{p},-\sigma}(-\varepsilon_n) G_{\mathbf{p},\sigma}(\varepsilon_n + \omega_1) G_{\mathbf{p},\sigma}(\varepsilon_n + \omega_2) \tag{3.14}$$

について考える。領域 A の場合のとき、

$$\begin{aligned}
B_{\mathbf{Q},\sigma} &= \int_{\mathbf{p}} \mathbf{v}_{\mathbf{p}} G_{\mathbf{Q}-\mathbf{p},-\sigma}(-\varepsilon_n) G_{\mathbf{p},\sigma}(\varepsilon_n + \omega_1) G_{\mathbf{p},\sigma}(\varepsilon_n + \omega_2) \\
&= -N(0) \int d\xi_{\mathbf{p}} \left(\frac{\mathbf{v}_{\mathbf{p}}}{(\xi_{\mathbf{p}} - \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{Q} + i\varepsilon_n + \sigma\mu_s/2 + i/2\tau)} \frac{1}{(\xi_{\mathbf{p}} - i\varepsilon_n - i\omega_1 - \sigma\mu_s/2 - i/2\tau)} \right. \\
&\quad \left. \times \frac{1}{(\xi_{\mathbf{p}} - i\varepsilon_n - i\omega_2 - \sigma\mu_s/2 - i/2\tau)} \right)_{FS} \\
&= 2\pi i N(0) \left\langle \frac{-\tau^2 \mathbf{v}_{\mathbf{p}}}{(1 + 2\varepsilon_n \tau + \omega_1 \tau - i\sigma\mu_s \tau + i\tau \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{Q})} \frac{1}{(1 + 2\varepsilon_n \tau + \omega_2 \tau - i\sigma\mu_s \tau + i\tau \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{Q})} \right\rangle_{FS} \\
&= -2\pi i N(0) \langle (1 - 4\varepsilon_n \tau - \omega_1 \tau - \omega_2 \tau + 2i\sigma\mu_s \tau - 2i\tau \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{Q}) \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \rangle_{FS} \\
&= -4\pi N(0) \tau^2 D\mathbf{Q}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

となり、ここからは ω の一次の寄与は出てこず、電流ヴァーテクスのときと同じ寄与であることがわかる。領域 D についても同様の計算を行うことでやはり $B_{\mathbf{Q},\sigma} = -4\pi N(0) \tau^2 D\mathbf{Q}$ となる。よってスピン流ヴァーテクスは

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^{(s)} &= -4\pi N(0)|e|\tau^2 D\mathbf{Q}T \sum_{\varepsilon_n} \sum_{\sigma} \sigma C_{\mathbf{Q},\sigma}(\varepsilon_n + \omega_1, -\varepsilon_n) C_{\mathbf{Q},\sigma}(\varepsilon_n + \omega_2, -\varepsilon_n) \\
&\equiv -4\pi N(0)|e|D\mathbf{Q}(S_A^{(s)} + S_D^{(s)})
\end{aligned} \tag{3.16}$$

と書ける。松原和を評価するために、まず $\omega_1 > 0, \omega_2 < 0$ の場合を考える。このとき、

$$S_A^{(s)} = \sum_{-\omega_2 < \varepsilon_n < \infty} \sum_{\sigma} \frac{\sigma T}{(|2\varepsilon_n + \omega_1| - i\sigma\mu_s)(|2\varepsilon_n + \omega_2| - i\sigma\mu_s)} \tag{3.17}$$

$$S_D^{(s)} = \sum_{-\infty < \varepsilon_n < -\omega_1} \sum_{\sigma} \frac{\sigma T}{(|2\varepsilon_n + \omega_1| + i\sigma\mu_s)(|2\varepsilon_n + \omega_2| + i\sigma\mu_s)} \tag{3.18}$$

である。 $S_A^{(s)}$ を評価するために、 $\varepsilon_n \rightarrow \varepsilon_n - \omega_2$ と変数変換すると

$$\begin{aligned}
S_A^{(s)} &= \sum_{0 < \varepsilon_n < \infty} \sum_{\sigma} \frac{\sigma T}{(|2(\varepsilon_n - \omega_2) + \omega_1| - i\sigma\mu_s)(|2(\varepsilon_n - \omega_2) + \omega_2| - i\sigma\mu_s)} \\
&= \sum_{0 < \varepsilon_n < \infty} \sum_{\sigma} \frac{\sigma T}{(2\varepsilon_n - \omega_2 + \omega_{12} - i\sigma\mu_s)(2\varepsilon_n - \omega_2 - i\sigma\mu_s)}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

となる。ここで $\omega_{12} = \omega_1 - \omega_2$ と定義した。今、 $i\omega_1$ は上半面、 $i\omega_2$ は下半面にあるので解析接続は $i\omega_1, i\omega_2 \rightarrow \omega \pm i0_+$ の形であるので、式 (3.19) において $\omega_{12} \rightarrow 0$ としてよい。よって、

$$\begin{aligned}
S_A^{(s)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma} \frac{\sigma T}{(4\pi T(n + 1/2) - \omega_2 - i\sigma\mu_s)^2} \\
&= \frac{T}{16\pi^2 T^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma} \frac{\sigma}{n + 1/2 - \frac{\omega_2 + i\sigma\mu_s}{4\pi T}} \\
&= \frac{T}{16\pi^2 T^2} \sum_{\sigma} \sigma \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} - \frac{\omega_2 + i\sigma\mu_s}{4\pi T}\right)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

次に、 $S_D^{(s)}$ について考える。 $\varepsilon_n \rightarrow -\varepsilon_n$ とすると、

$$\begin{aligned}
S_D^{(s)} &= \sum_{\omega_1 < \varepsilon_n < \infty} \sum_{\sigma} \frac{\sigma T}{(|-2\varepsilon_n + \omega_1| + i\sigma\mu_s)(|-2\varepsilon_n + \omega_2| + i\sigma\mu_s)} \\
&= \sum_{\omega_1 < \varepsilon_n < \infty} \sum_{\sigma} \frac{\sigma T}{(2\varepsilon_n - \omega_1 + i\sigma\mu_s)(2\varepsilon_n - \omega_2 + i\sigma\mu_s)}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

であり、 $\varepsilon_n \rightarrow \varepsilon_n + \omega_1$ と変数を取り替えると、

$$S_D^{(s)} = \sum_{0 < \varepsilon_n < \infty} \sum_{\sigma} \frac{\sigma T}{(2\varepsilon_n + \omega_1 + i\sigma\mu_s)(2\varepsilon_n + \omega_1 + \omega_{12} + i\sigma\mu_s)} \tag{3.22}$$

となる。さきほどの計算でもしたように $i\omega_1, i\omega_2 \rightarrow \omega \pm i0_+$ と解析接続することを考えると $\omega_{12} \rightarrow 0$ としてよいので

$$\begin{aligned}
S_D^{(s)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma} \frac{\sigma T}{(4\pi T(n + 1/2) + \omega_1 + i\sigma\mu_s)^2} \\
&= \frac{T}{16\pi^2 T^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma} \frac{\sigma}{n + 1/2 + \frac{\omega_1 + i\sigma\mu_s}{4\pi T}} \\
&= \frac{T}{16\pi^2 T^2} \sum_{\sigma} \sigma \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \frac{\omega_1 + i\sigma\mu_s}{4\pi T}\right)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

である。以上をまとめると、

$$\begin{aligned}
S_A^{(s)} + S_D^{(s)} &= \frac{T}{16\pi^2 T^2} \sum_{\sigma} \sigma \left\{ \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} - \frac{\omega_2 + i\sigma\mu_s}{4\pi T}\right) + \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \frac{\omega_1 + i\sigma\mu_s}{4\pi T}\right) \right\} \\
&\simeq \frac{T}{16\pi^2 T^2} \sum_{\sigma} \sigma \left\{ \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right) + \psi^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right) \frac{-\omega_2 - i\sigma\mu_s}{4\pi T} + \psi^{(3)}\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{-\omega_2 - i\sigma\mu_s}{4\pi T}\right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right) + \psi^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right) \frac{\omega_1 + i\sigma\mu_s}{4\pi T} + \psi^{(3)}\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\omega_1 + i\sigma\mu_s}{4\pi T}\right)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

となる。今、スピン和を取るときに電流ヴァーテクスの場合とは異なって余分に σ があるので、 $\{\}$ の中身が σ の一次であれば有限の寄与が残る。第二項と第五項の σ に比例する項は互いにキャンセルし合うので、残るのは第三項と第六項であり、

$$S_A^{(s)} + S_D^{(s)} = \frac{2T}{(4\pi T)^4} \psi^{(3)}\left(\frac{1}{2}\right) \mu_s (\omega_1 + \omega_2) \quad (3.25)$$

と ω に比例する項が残る。これによって電流ヴァーテクスで ω の 0 次の項のみを考えていたのが正当化される。以上の結果より、スピン流ヴァーテクスは最終的に

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{(s)} &= -4\pi N(0) |e| D \mathbf{Q} (S_A^{(s)} + S_D^{(s)}) \\ &= -4 |e| \xi_0^2 \frac{\mu_s}{8T^2} (i\omega_1 + i\omega_2) N(0) \mathbf{Q} \\ &\equiv t^{(s)}(i\omega_1, i\omega_2) N(0) \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (3.26)$$

となる。解析接続 $i\omega_1 \rightarrow \omega + i0_+$ 、 $i\omega_2 \rightarrow \omega - i0_+$ を行くと、

$$\mathbf{J}^{(s)}(\omega) = t^{(s)RA}(\omega, \omega) N(0) \mathbf{Q} \quad (3.27)$$

$$t^{(s)RA}(\omega, \omega) = -4 |e| \xi_0^2 \frac{\mu_s}{8T^2} \omega \quad (3.28)$$

が得られる。

次に、 $\omega_1 > 0, \omega_2 > 0$ の場合を考える。このとき、

$$S_A^{(s)} = \sum_{0 < \varepsilon_n < \infty} \sum_{\sigma} \frac{\sigma T}{(2\varepsilon_n + \omega_1 - i\sigma\mu_s)(2\varepsilon_n + \omega_2 - i\sigma\mu_s)} \quad (3.29)$$

$$S_D^{(s)} = \sum_{-\infty < \varepsilon_n < -\omega_1} \sum_{\sigma} \frac{\sigma T}{(-2\varepsilon_n - \omega_1 + i\sigma\mu_s)(2\varepsilon_n - \omega_2 + i\sigma\mu_s)} \quad (3.30)$$

である。 $S_D^{(s)}$ において、 $\varepsilon_n \rightarrow -(\varepsilon_n + \omega_1)$ と変数変換すると、

$$S_D^{(s)} = \sum_{0 < \varepsilon_n < \infty} \sum_{\sigma} \frac{\sigma T}{(2\varepsilon_n + \omega_1 + i\sigma\mu_s)(2\varepsilon_n + \omega_1 + \omega_{12} + i\sigma\mu_s)} \quad (3.31)$$

となる。解析接続 $i\omega_1, i\omega_2 \rightarrow \omega + i0_+$ で $\omega_{12} \rightarrow 0$ となるので、残る項を評価すると

$$\begin{aligned}
S_D^{(s)} &= \sum_{0 < \varepsilon_n < \infty} \sum_{\sigma} \frac{\sigma T}{(2\varepsilon_n + \omega_1 + i\sigma\mu_s)^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma} \frac{\sigma T}{(4\pi T(n + 1/2) + \omega_1 + i\sigma\mu_s)^2} \\
&= \frac{T}{16\pi^2 T^2} \sum_{\sigma} \sigma \psi^{(1)} \left(\frac{1}{2} + \frac{\omega_1 + i\sigma\mu_s}{4\pi T} \right)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

また、 $S_A^{(s)}$ についても $\omega_{12} \rightarrow 0$ として、

$$\begin{aligned}
S_A^{(s)} &= \sum_{0 < \varepsilon_n < \infty} \sum_{\sigma} \frac{\sigma T}{(2\varepsilon_n + \omega_1 - i\sigma\mu_s)^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma} \frac{\sigma T}{(4\pi T(n + 1/2) + \omega_1 - i\sigma\mu_s)^2} \\
&= \frac{T}{16\pi^2 T^2} \sum_{\sigma} \sigma \psi^{(1)} \left(\frac{1}{2} + \frac{\omega_1 - i\sigma\mu_s}{4\pi T} \right)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

である。したがって、

$$S_A^{(s)} + S_D^{(s)} = \frac{T}{16\pi^2 T^2} \sum_{\sigma} \sigma \left\{ \psi^{(1)} \left(\frac{1}{2} + \frac{\omega_1 - i\sigma\mu_s}{4\pi T} \right) + \psi^{(1)} \left(\frac{1}{2} + \frac{\omega_1 + i\sigma\mu_s}{4\pi T} \right) \right\} \tag{3.34}$$

となり、さきほどの計算と同じ要領で、スピン和で残る項は $\{\}$ 内の σ の奇数次の項である。しかし $\{\}$ 内は σ について偶関数であり、スピン和を取ったときに残る項は存在しない。したがって、 $\omega_1 > 0, \omega_2 > 0$ の場合にはスピン流ヴァーテクスは 0 となる。

以上をまとめると、スピン流ヴァーテクスが有限の寄与をもたらすのは $\omega_1 > 0, \omega_2 < 0$ のように符号が異なる場合であり、そのときのスピン流ヴァーテクスは式 (3.27) で与えられる。

ここで、得られた電流ヴァーテクス (式 (3.13)) とスピン流ヴァーテクス (式

(3.27)) を見比べると、

$$\mathbf{J}^{(s)}(\omega) = \frac{\mu_s}{8T^2} \omega \mathbf{J}^{(c)} \quad (3.35)$$

の関係が成り立っていることがわかる。また、文献 [39] によると、電流ヴァーテクス $\mathbf{J}^{(c)}$ と熱流ヴァーテクス $\mathbf{J}^{(h)}$ の間には

$$\mathbf{J}^{(h)}(\omega) = \frac{-1}{2|e|} \omega \mathbf{J}^{(c)} \quad (3.36)$$

の関係が成り立っている。したがって、スピン流ヴァーテクス $\mathbf{J}^{(s)}$ と熱流ヴァーテクス $\mathbf{J}^{(h)}$ の間に次の関係式が成立する。

$$\mathbf{J}^{(s)}(\omega) = \frac{-|e|\mu_s}{4T^2} \mathbf{J}^{(h)}(\omega) \quad (3.37)$$

この関係は vortex スピンホール効果（スピン流-電流相関）と vortex ネルンスト効果（熱流-電流相関）に強い類似性があることを示唆している。また、ここに現れる係数 μ_s はこの 2 つの現象を区別するための重要な因子となることが 4 章で明らかにされる。

3.2 ガウス揺らぎの範囲における vortex スピンホール伝導度

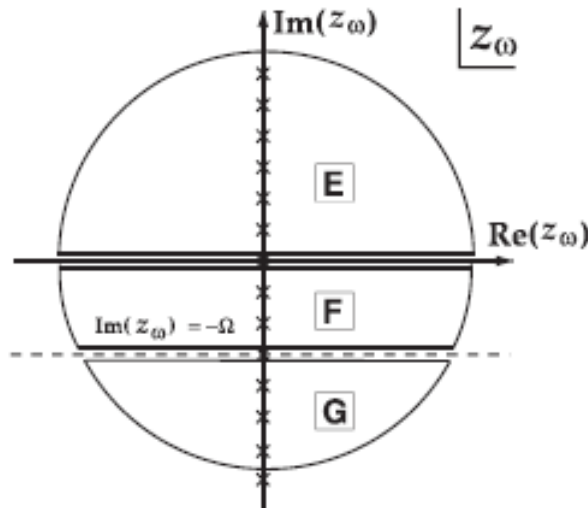


図 3.2: 松原和と複素周回積分の対応関係。領域 F からの寄与が最も支配的である。

ここからは、4.1 節で求めた電流ヴァーテックスとスピン流ヴァーテックスを用いて vortex スピンホール伝導度を計算する。スピンホール伝導度は本研究のターゲットである超伝導渦糸揺らぎによるものだけでなく常伝導状態でも存在するので、それらを別けて以下のように表す。

$$\sigma_{xy}^{(\text{SH})} = \sigma_{xy,N}^{(\text{SH})} + \delta\sigma_{xy}^{(\text{SH})} \quad (3.38)$$

第一項が常伝導成分で、第二項が vortex スピンホール伝導度である。図 2.3 のダイアグラムは、前節でもとめた電流/スピン流ヴァーテックスの表式を用いて

$$\begin{aligned} \delta K_{xy}^{(\text{SH})}(\text{i}\Omega_m) &= \frac{1}{2\pi r_H^2} \sum_{N_1, N_2} \langle N_1 | Q_x | N_2 \rangle \langle N_2 | Q_x | N_1 \rangle \\ &\times T \sum_{\omega_\nu} t^{(s)}(\text{i}\omega_{\nu+}, \text{i}\omega_\nu) t^{(c)} \int_q L_{N_1, q}(\text{i}\omega_{\nu+}) L_{N_2, q}(\text{i}\omega_\nu) \end{aligned} \quad (3.39)$$

のように表すことができる。ここで、 $\omega_\nu = 2\pi T\nu$ はボゾニックな松原周波数、 $\omega_{\nu+} = \omega_\nu + \Omega_m$ 、 $r_H = 1/\sqrt{2|e|H}$ である。また、 $|N\rangle$ は N 次のランダウ固有状態であり、生成消滅演算子 $\hat{a}_+, \hat{a}_-$ に対して

$$\hat{a}_+ \hat{a}_- |N\rangle = N |N\rangle \quad (3.40)$$

$$\hat{a}_\pm = \frac{r_H}{\sqrt{2}} (Q_x \pm \text{i}Q_y) \quad (3.41)$$

を満たす。また、

$$L_{N, q}(\text{i}\omega_\nu) = \frac{1}{\alpha_{N, q} + |\omega_\nu|/\gamma} \quad (3.42)$$

は N 次のランダウ準位の超伝導揺らぎ伝搬関数と呼ばれるものである（導出は付録 B 参照）。ここで、 $\gamma = 8T_{c0}/\pi$ 、 $\alpha_{N, q} = \alpha_N + \xi_0^2 q^2$ であり、

$$\alpha_N = \frac{T - T_{c0}}{T_{c0}} + h(2N + 1), \quad (3.43)$$

ここで、 $h = H/H_{c2}(0)$ 、 $H_{c2}(0) = 1/(2|e|\xi_0^2)$ は絶対零度における上部臨界磁場である。式 (3.41) を逆に解けば、

$$Q_x = \frac{1}{\sqrt{2}r_H} (\hat{a}_+ + \hat{a}_-) \quad (3.44)$$

$$Q_y = \frac{1}{-i\sqrt{2}r_H}(\hat{a}_+ - \hat{a}_-) \quad (3.45)$$

である。また、生成消滅演算子は

$$\hat{a}_+ |N\rangle = \sqrt{N+1} |N+1\rangle \quad (3.46)$$

$$\hat{a}_- |N\rangle = \sqrt{N} |N-1\rangle \quad (3.47)$$

を満たすので、これらを用いると内積は次のようになる。

$$\langle N_1 | Q_x | N_2 \rangle = \frac{\sqrt{N_1}\delta_{N_1,N_2+1} + \sqrt{N_2}\delta_{N_1+1,N_2}}{\sqrt{2}r_H} \quad (3.48)$$

$$\langle N_2 | Q_y | N_1 \rangle = \frac{\sqrt{N_1}\delta_{N_1,N_2+1} - \sqrt{N_2}\delta_{N_1+1,N_2}}{-i\sqrt{2}r_H} \quad (3.49)$$

よって、

$$\langle N_1 | Q_x | N_2 \rangle \langle N_2 | Q_y | N_1 \rangle = \frac{i}{2r_H^2} \{N_1\delta_{N_1,N_2+1} - N_2\delta_{N_1+1,N_2}\} \quad (3.50)$$

したがって、式 (3.39) は次のようになる。

$$\delta K_{xy}^{(\text{SH})}(i\Omega_m) = iT \sum_{N,\omega_\nu} \frac{(N+1)t^{(s)}(i\omega_{\nu+}, i\omega_\nu)t^{(c)}}{4\pi r_H^4} \quad (3.51)$$

$$\times \int_q \left(L_{N+1,q}(i\omega_{\nu+}) L_{N,q}(i\omega_\nu) - L_{N,q}(i\omega_{\nu+}) L_{N+1,q}(i\omega_\nu) \right) \quad (3.52)$$

次に、上記の松原和を計算する。よく知られているように、松原和の計算は図 3.2 で示されているように、各領域で複素周回積分を行うことで実行でき、具体的には以下の関係が成り立つ。

$$T \sum_{\omega_\nu} F(i\omega_\nu) = \int_C \frac{dz}{4\pi i} \coth\left(\frac{z}{2T}\right) F(z) \quad (3.53)$$

ここで、周回積分する領域は図 3.2 の領域 E,F,G に分割されている。4.1 節の議論を思い出すと、スピン流ヴァーテクスが有限の寄与をもたらすのは ω_1, ω_2 の符号が異なって

いて $i\omega_1, i\omega_2 \rightarrow \omega \pm i0_+$ となる場合のみだった。したがって、領域 E, G からの寄与は無く、領域 F のみに着目すればよい。よって、

$$\begin{aligned} \delta K_{xy}^{(\text{SH})}(i\Omega_m) &= iT \sum_N \frac{(N+1)}{4\pi r_H^4} \int_F \frac{dz}{4\pi i} \coth\left(\frac{z}{2T}\right) t^{(s)}(z + i\Omega_m, z) t^{(c)} \\ &\quad \times \int_q \left(L_{N+1,q}(z + i\Omega_m) L_{N,q}(z) - L_{N,q}(z + i\Omega_m) L_{N+1,q}(z) \right) \end{aligned} \quad (3.54)$$

となる。無限遠の外周の積分の寄与は無視できるので $z = 0, i\Omega_m$ にそった積分を考えれば良く、その結果

$$\begin{aligned} \delta K_{xy}^{(\text{SH})}(i\Omega_m) &= iT \sum_N \frac{(N+1)t'^{(s)}t^{(c)}}{4\pi r_H^4} \int d\omega \coth\left(\frac{\omega}{2T}\right) (2\omega - i\Omega_m) \\ &\quad \times \int_q \left(L_{N+1,q}(\omega + i0_+) L_{N,q}(\omega - i\Omega_m) - L_{N,q}(\omega + i0_+) L_{N+1,q}(\omega - i\Omega_m) \right) \\ &\quad - (2\omega + i\Omega_m) \int_q \left(L_{N+1,q}(\omega + i\Omega_m) L_{N,q}(\omega - i0_+) - L_{N,q}(\omega + i\Omega_m) L_{N+1,q}(\omega - i0_+) \right) \end{aligned} \quad (3.55)$$

となる。ここで、 ω の係数部分について、 $i\Omega_m \rightarrow \Omega + i0_+$ を考えると、

$$\begin{aligned} &L_{N+1,q}^R(\omega) L_{N,q}^A(\omega - \Omega) - L_{N,q}^R(\omega) L_{N+1,q}^A(\omega - \Omega) \\ &\quad - L_{N+1,q}^R(\omega + \Omega) L_{N,q}^A(\omega) + L_{N,q}^R(\omega + \Omega) L_{N+1,q}^A(\omega) \end{aligned} \quad (3.56)$$

であり、 Ω の一次の項を取り出すと

$$\begin{aligned} &\left(-L_{N+1,q}^R \frac{\partial L_{N,q}^A}{\partial \omega} + L_{N,q}^R \frac{\partial L_{N+1,q}^A}{\partial \omega} - \frac{\partial L_{N+1,q}^R}{\partial \omega} L_{N,q}^A + \frac{\partial L_{N,q}^R}{\partial \omega} L_{N+1,q}^A \right) \Omega \\ &= -\Omega \left(\frac{\partial}{\partial \omega} (L_{N+1,q}^R L_{N,q}^A) - \frac{\partial}{\partial \omega} (L_{N+1,q}^A L_{N,q}^R) \right) \\ &= -\Omega \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\text{Im}\{L_{N+1,q}^R L_{N,q}^A\}}{2i} \end{aligned} \quad (3.57)$$

となる。最後に $L^R = (L^A)^*$ の関係を用いて整理した。また、 $\text{Im}\{L_{N+1,q}^R L_{N,q}^A\}$ は ω の奇関数なので積分全体としては偶関数になる。一方、 Ω の係数部分については同様の議

論より被積分部分全体は ω の奇関数になるので積分すると 0 となる。以上より、スピンホール伝導度は

$$\delta\sigma_{xy}^{(\text{SH})} = \frac{t^{(s)}t^{(c)}}{8\pi T r_H^4} \sum_N (N+1) \int_q \int_\omega \frac{\omega}{\sinh^2\left(\frac{\omega}{2T}\right)} \text{Im} [L_{N,q}^R(\omega) L_{N+1,q}^A(\omega)] \quad (3.58)$$

と表される。今、高温領域を考えているので、古典極限 $\omega/T \ll 1$ を取って積分を実行すると

$$\begin{aligned} \int_q \int_\omega \frac{\omega}{\sinh^2\left(\frac{\omega}{2T}\right)} \text{Im} [L_{N,q}^R(\omega) L_{N+1,q}^A(\omega)] &\approx 2T^2 \int_q \frac{\alpha_{N+1,q} - \alpha_{N,q}}{\alpha_{N,q} \alpha_{N+1,q} (\alpha_{N,q} + \alpha_{N+1,q})} \\ &= \frac{T^2}{\xi_0 h} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_N}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_{N+1}}} - \frac{2}{\sqrt{\frac{\alpha_N + \alpha_{N+1}}{2}}} \right) \end{aligned} \quad (3.59)$$

したがって、vortex スピンホール伝導度は次のようになる。

$$\delta\sigma_{xy}^{(\text{SH})} = \frac{\mu_s h}{8R_Q \xi_0 T} \sum_N (N+1) \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_N}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_{N+1}}} - \frac{2}{\sqrt{\frac{\alpha_N + \alpha_{N+1}}{2}}} \right) \quad (3.60)$$

ここで、 $R_Q = 2\pi\hbar/4|e|^2$ は量子抵抗。今考えている超伝導渦糸揺らぎの温度領域では高次のランダウ準位の影響は小さく最低ランダウ準位を考えればよい。このとき、上式は

$$\delta\sigma_{xy}^{(\text{SH})} \approx \frac{\mu_s h}{8R_Q \xi_0 T} \frac{1}{\sqrt{\alpha_0}} \quad (3.61)$$

となる。

3.3 Hartree 近似による非ガウス揺らぎへの拡張

ここまでの計算では、超伝導揺らぎをガウス揺らぎの範囲で考えていた。しかし、この節では超伝導揺らぎを非ガウス揺らぎに拡張する。

非ガウス揺らぎの効果を取り込むために、まず以下のギンツブルグ-ランダウ自由エネルギーを出発点に考える。

$$F_{\text{GL}} = N(0) \int d^3r \left(a|\Psi|^2 + \xi_0^2 |\mathbf{Q}\Psi|^2 + \frac{b}{2} |\Psi|^4 \right), \quad (3.62)$$

ここで $a = (T - T_{c0})/T_{c0}$, $b = 7\zeta(3)/(8\pi^2 T_{c0}^2)$ である。ガウス揺らぎの場合は秩序変数の二次までの項に対応しているが、ここでは秩序変数の四次の項まで取り入れることで非ガウス揺らぎに拡張している。計算を簡単にするために、 $\mathbf{r}/\xi_0 \rightarrow \mathbf{r}$ 、 $\Psi \sqrt{\frac{N(0)\xi_0^3}{T}} \rightarrow \Psi$ と無次元化すると自由エネルギーは

$$\frac{F_{\text{GL}}}{T} = \int d^3r \left(a|\Psi|^2 + |\mathbf{Q}\Psi|^2 + \frac{b'}{2}|\Psi|^4 \right), \quad (3.63)$$

となる。ここで、 b' はゼロ磁場下での比熱の飛び ΔC と

$$b' = \frac{b}{\Delta C \xi_0^3} \quad (3.64)$$

の関係があり、実験的に決められる量である。

次に、以下のように秩序変数を最低ランダウ準位の固有関数 $u_{p,q}(\mathbf{r})$ で展開する。

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} r_H L_y L_z}} \sum_{p,q} \phi_{p,q} u_{p,q}(\mathbf{r}) \quad (3.65)$$

ここで固有関数 $u_{p,q}(\mathbf{r})$ の具体的な形は以下のようにになっている。

$$u_{p,q}(\mathbf{r}) = e^{-\frac{1}{2r_H^2}(x+pr_H^2)^2 + i(py+qz)} \quad (3.66)$$

ここで、 q は z 方向の運動量であり、 p は最低ランダウ準位内で縮退している数をカウントするパラメータで、その縮退数は超伝導渦糸の数 N_v に対応しており

$$N_v = \frac{L_x L_y}{2\pi r_H^2} \quad (3.67)$$

である。ここで、 L_x, L_y は系の x, y 方向の長さである。また、上記の表式はベクトルポテンシャルとしてランダウゲージ $\mathbf{A} = Hx\hat{\mathbf{y}}$ に取ったときの表式であることを注意しておく。

次に、最低ランダウ準位で展開したときの自由エネルギーの四次の項がどのようなのかを調べる。式 (3.65) を自由エネルギーの式に代入すると、四次の項 F_4 は

$$F_4 = \frac{b'}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} r_H L_y L_z}} \right)^4 \sum_{\{K_i\}} \int d^3r \phi_{K_1}^* \phi_{K_2} \phi_{K_3}^* \phi_{K_4} u_{K_1}^* u_{K_2} u_{K_3}^* u_{K_4} \quad (3.68)$$

となる。ここで K は p, q をひとまとめに表したものである。次に上式の x についての積分

$$I \equiv \int dx e^{-\frac{1}{2r_H^2} \{(x+p_1 r_H^2)^2 + (x+p_2 r_H^2)^2 + (x+p_3 r_H^2)^2 + (x+p_4 r_H^2)^2\}} \quad (3.69)$$

について考える。指数関数の肩の部分について、

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2r_H^2} \{(x+p_1 r_H^2)^2 + (x+p_2 r_H^2)^2 + (x+p_3 r_H^2)^2 + (x+p_4 r_H^2)^2\} \\ &= \frac{-4}{2r_H^2} \left\{ x^2 + \frac{1}{2} x r_H^2 (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) + \frac{r_H^4}{4} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2) \right\} \end{aligned} \quad (3.70)$$

ここで、

$$\left\{ x + \frac{r_H^4}{4} (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \right\}^2 = x^2 + \frac{1}{2} x r_H^2 (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) + \frac{r_H^4}{16} (p_1 + p_2 + p_3 + p_4)^2 \quad (3.71)$$

を用いて整理すると、

$$I = e^{-\frac{r_H^2}{2} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2)} e^{\frac{r_H^2}{8} (p_1 + p_2 + p_3 + p_4)^2} \int dx e^{-\frac{2}{r_H^2} \left\{ x + \frac{1}{4r_H^2} (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \right\}^2} \quad (3.72)$$

となる。積分部分についてはガウス積分なので簡単に実行でき、

$$\int dx e^{-\frac{2}{r_H^2} \left\{ x + \frac{1}{4r_H^2} (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \right\}^2} = \sqrt{\frac{\pi r_H^2}{2}} \quad (3.73)$$

である。また、運動量保存則 $p_1 + p_3 = p_2 + p_4$ を用いて係数部分を整理すると

$$\begin{aligned}
& -\frac{r_H^2}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2) + \frac{r_H^2}{8}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)^2 \\
& = -\frac{r_H^2}{2}\left\{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - \frac{1}{4}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)^2\right\} \\
& = -\frac{r_H^2}{2}\{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - (p_2 + p_4)^2\} \\
& = -\frac{r_H^2}{2}\{p_1^2 + p_3^2 - 2p_2(p_1 + p_3 - p_2)\} \\
& = -\frac{r_H^2}{2}\{(p_1 - p_2)^2 + (p_3 - p_2)^2\}
\end{aligned} \tag{3.74}$$

となるので、 x 積分は最終的に

$$I = \sqrt{\frac{\pi r_H^2}{2}} V_{p_1-p_2} V_{p_3-p_2} \tag{3.75}$$

となる。ここで

$$V_{p-p'} = \exp\left[-\frac{r_H^2}{2}(p-p')^2\right] \tag{3.76}$$

と定義した。したがって自由エネルギーの四次の項は

$$\begin{aligned}
F_4 &= \frac{b'}{2} I \left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} r_H L_y L_z}} \right)^4 \sum_{\{K_i\}} \int dr^2 \phi_{K_1}^* \phi_{K_2} \phi_{K_3}^* \phi_{K_4} e^{i(-p_1+p_2-p_3+p_4)y} e^{i(-q_1+q_2-q_3+q_4)z} \\
&= \frac{g}{2} \sum_{\{K_i\}} V_{p_1-p_2} V_{p_3-p_2} \phi_{K_1}^* \phi_{K_2} \phi_{K_3}^* \phi_{K_4} \delta_{K_1+K_3, K_2+K_4}
\end{aligned} \tag{3.77}$$

となる。ここで、指数関数の積分については、

$$\int dy e^{i(p-p')y} = L_y \delta_{p,p'} \tag{3.78}$$

などを用い、また、 $g = b'/\sqrt{2\pi} r_H L_y L_z$ は超伝導揺らぎ間相互作用の強さに対応する。以上より、自由エネルギーを最低ランダウ準位で展開したものは

$$\begin{aligned} \frac{F_{\text{GL}}}{T} &= \sum_K (\alpha_0 + q^2) \phi_K^* \phi_K \\ &+ \frac{g}{2} \sum_{\{K_i\}} \delta_{K_1+K_3, K_2+K_4} V_{p_1-p_2} V_{p_3-p_2} \phi_{K_1}^* \phi_{K_2} \phi_{K_3}^* \phi_{K_4} \end{aligned} \quad (3.79)$$

である。

この四次の項をすべて取り込むことは困難なので、以下では自己無撞着なハートリー近似の範囲で考える。四次の項を自己無撞着に取り込むために、超伝導揺らぎの伝搬関数 $L_{0,q}$ に関するダイソン方程式

$$(\tilde{L}_{0,q})^{-1} = (L_{0,q})^{-1} - \Sigma \quad (3.80)$$

を考える。ここで、 Σ は自己エネルギーで、自己無撞着ハートリー近似の範囲では図 3.3 で表される項である。

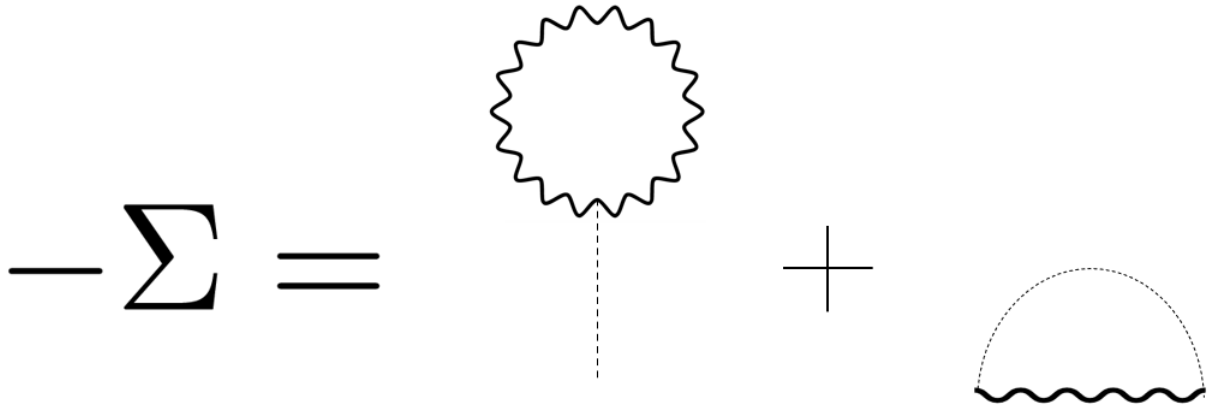


図 3.3: 自己無撞着ハートリー近似の自己エネルギー。太い波線が繰り込まれた揺らぎ伝搬関数で、点線が揺らぎ間相互作用である。(添字入れる)

このダイアグラムを数式で表すと

$$-\Sigma = \frac{g}{2} \sum_{p',q'} V_{p-p'} V_{p-p'} \tilde{L}_{0,q'} + \frac{g}{2} \sum_{p',q'} V_{p'} V_{p'} \tilde{L}_{0,q-q'} \quad (3.81)$$

であり、波数積分を行うと

$$\begin{aligned}
-\Sigma &= \frac{g}{2} \frac{L_y}{2\pi} e^{-r_H^2(p-p')^2} \sum_{q'} \tilde{L}_{0,q'} + \frac{g}{2} \frac{L_y}{2\pi} e^{-r_H^2 p'^2} \sum_{q'} \tilde{L}_{0,q-q'} \\
&= \frac{gL_y}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{r_H^2}} \sum_{q'} \tilde{L}_{0,q'}
\end{aligned} \tag{3.82}$$

となる。途中で二項目の変数を置き換えて波数和を取り直した。また、

$$\begin{aligned}
\sum_{q'} \tilde{L}_{0,q'} &= \frac{L_z}{2\pi} \int dq' \frac{1}{\tilde{\alpha}_0 + \xi_0^2 q'^2 + |\omega_\nu|/\gamma} \\
&\simeq \frac{\pi L_z}{2\pi \xi_0} \frac{1}{\sqrt{\tilde{\alpha}_0}}
\end{aligned} \tag{3.83}$$

と書けるので、ダイソン方程式 (3.80) は

$$\tilde{\alpha}_0 + \xi_0^2 q^2 + |\omega_\nu|/\gamma = \alpha_0 + \xi_0^2 q^2 + |\omega_\nu|/\gamma + \frac{gL_y}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{r_H^2}} \frac{L_z}{2\xi_0} \frac{1}{\sqrt{\tilde{\alpha}_0}} \tag{3.84}$$

となる。以上より、質量項 α_0 に関する自己無撞着な方程式

$$\tilde{\alpha}_0 = \alpha_0 + \frac{h}{2\pi} \frac{b'}{\sqrt{\tilde{\alpha}_0}} \tag{3.85}$$

が得られる ($h = \xi_0^2/r_H^2$ を用いた)。

以上の議論をまとめると、前節までのガウス揺らぎの範囲の議論で出てくる質量項 α_0 を自己無撞着な方程式 (3.85) で決定される繰り込まれた質量項 $\tilde{\alpha}_0$ に置き換えることで、非ガウス揺らぎをハートリー近似の範囲で取り込むことができる。 $b' = 0$ とすると $\tilde{\alpha}_0 = \alpha_0$ となり確かにガウス揺らぎになっている。

3.4 電気抵抗率の温度依存性

ここでは、vortex スピンホール効果の前に、前節で得られた結果をまず電気伝導度に応用してみる。超伝導揺らぎを考慮した電気伝導度は、先ほど求めた繰り込まれた質量項 $\tilde{\alpha}_0$ を用いると

$$\sigma_{xx} \approx \sigma_N + \frac{\pi}{16R_Q \xi_0} \frac{1}{\sqrt{\tilde{\alpha}_0}} \tag{3.86}$$

と表される（文献 [40]、付録?参照）。ここで σ_N は常伝導状態における電気伝導度である。これより電気抵抗率 $\rho = 1/\sigma_{xx}$ の温度依存性を計算すると図 3.4 のようになる。

図 3.4(a) は磁場 h を $h = 0.1$ に固定して、揺らぎ間相互作用の強さ b' を変化させたときの結果である。グラフを見ると、 $T/T_{c0} = 0.9$ 付近から電気抵抗率が大きく減少し始めており、それは b' が小さいほど顕著であることがわかる。これはガウス揺らぎにおける質量項 $\alpha_0 = T/T_{c0} - 1 + h$ が 0 となる温度 $T/T_{c0} = 1 - h$ に対応している ($h = 0.1$ のとき $T/T_{c0} = 0.9$)。ガウス揺らぎの場合ではこの温度で電気伝導度は完全に発散する（電気抵抗率は 0 になる）ため、ガウス揺らぎに近いパラメータ $b' = 0.001$ の場合では、電気抵抗率が急激に 0 に近づいている。一方で、揺らぎが強くなってくると（例えば $b' = 0.1$ ）、電気抵抗率の減少は緩やかになる。これは、繰り込まれた質量項は自己無撞着な方程式 (3.85) で決まるが、もはやこのときは質量項は 0 とはならず、 b' が大きいほど質量項も有限に残るためである。また、図 3.4(b) は $b' = 0.1$ に固定して磁場を変化させた場合の結果である。電気抵抗率が下がり始める温度が異なっているのは上で述べたように減少が始まる温度 $T/T_{c0} = 1 - h$ が磁場によってシフトしているためである。また、磁場が小さいほど傾きが急激になっているのは質量項の自己無撞着な方程式 (3.85) の第二項が b' だけでなく h にも比例しているためである。このような電気抵抗率の振る舞いは揺らぎの強い銅酸化物超伝導体では勿論のこと、従来型の超伝導体でも確認されている [41]。

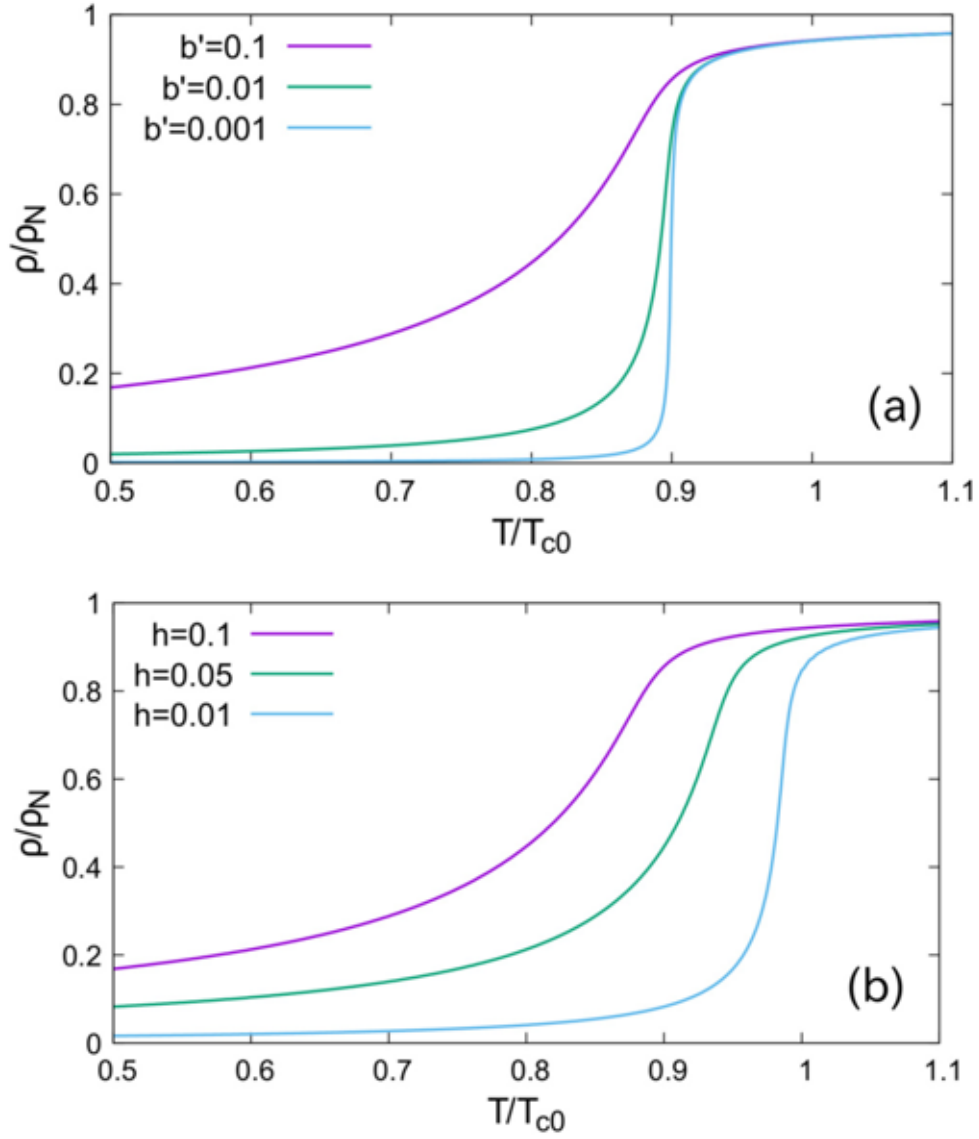


図 3.4: 電気抵抗率の温度依存性。(a) は $h = 0.1$ に固定した場合の温度依存性。(b) は $b' = 0.1$ に固定したときの温度依存性。全ての場合で $\rho_N/R_Q\xi_0 = 0.1$ としている。

3.5 Vortex spin Hall 効果の温度依存性

次に vortex スピンホール伝導度 $\delta\sigma_{xy}^{(SH)}$ の温度依存性について調べる。自己無撞着ハートリー近似の範囲での vortex スピンホール伝導度は、

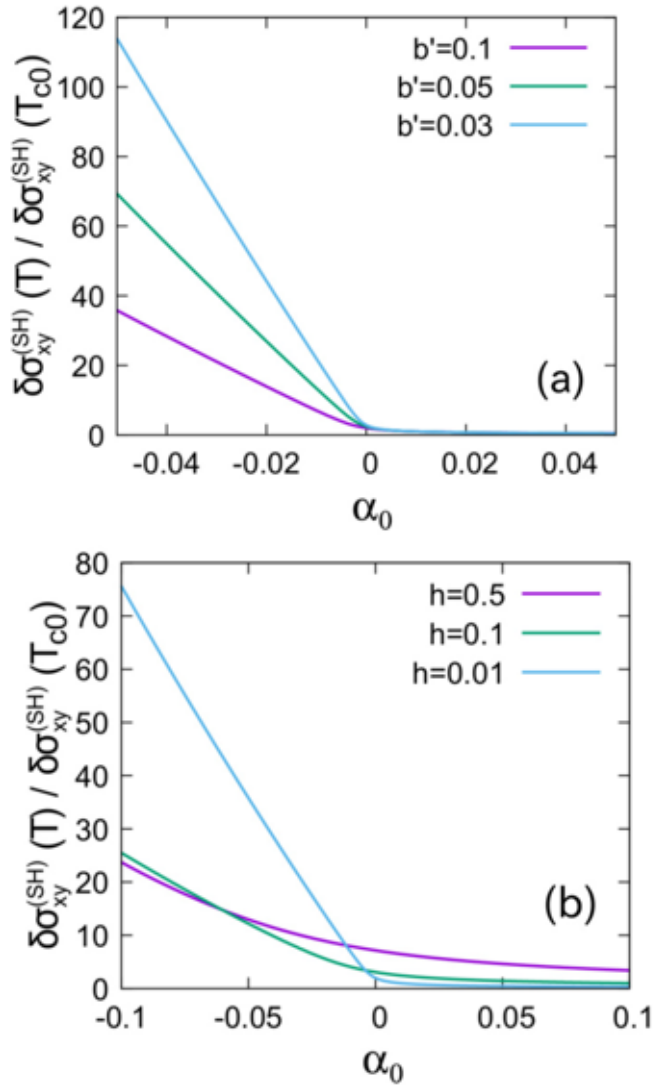


図 3.5: vortex スピンホール伝導度の温度依存性。横軸は $\alpha_0 = T/T_{co} - 1 + h$ としてある。(a) は $h = 0.01$ に固定した場合の温度依存性。(b) は $b' = 0.1$ に固定したときの温度依存性。全ての場合で $\rho_N/R_Q\xi_0 = 0.1$ としている。

$$\delta\sigma_{xy}^{(SH)} \approx \frac{\mu_s h}{8R_Q\xi_0 T} \frac{1}{\sqrt{\tilde{\alpha}_0}} \quad (3.87)$$

と表すことができる。図 3.5 はこれを横軸 $\alpha_0 = T/T_{co} - 1 + h$ でプロットしたものである。

図 3.5(a) は磁場を $h = 0.01$ に固定して揺らぎの強さを変えた場合の結果である。揺らぎの強さを変えても立ち上がりは $\alpha_0 = 0$ からであるので、揺らぎの強さは vortex スピンホール伝導度の揺らぎ領域には影響を与えず、その変化の度合いを特徴づけるパラメータであることがわかる。揺らぎが弱いと急激に発散的になるが、揺らぎが強くなるに連れて緩やかな上昇する。また、図 3.5(b) は揺らぎの強さを $b' = 0.1$ に固定して磁場を変化させた場合のふるまいである。磁場が大きい場合ではより広い領域で vortex スピンホール伝導度が生じていることがわかる。このことから、磁場は vortex スピンホール伝導度の大きさだけでなく、その揺らぎ領域を決めるパラメータにもなっていることがわかる。

次に、逆スピンホール電圧の温度依存性について調べる。上記の vortex スピンホール伝導度は直接実験で測定されるものではなく、実際に測定されるのは逆スピンホール電圧である。したがって、vortex スピンホール効果を考慮した逆スピンホール電圧の温度依存性を調べるのが重要である。

電場 E_x とスピン圧勾配 $\nabla_y \mu_s$ が存在するときの電流 $j_x^{(c)}$ は

$$j_x^{(c)} = \sigma_{xx} E_x + \sigma_{xy}^{(\text{SH})} (-\nabla_y \mu_s) \quad (3.88)$$

と表される。ここで二項目はスピンホール効果による電流の寄与である。今、逆スピンホール電圧を測定することを考えて、開回路条件 $j_x^{(c)} = 0$ のもとで考えると

$$\sigma_{xx} E_x = \sigma_{xy}^{(\text{SH})} j_y^{(s)} \quad (3.89)$$

である。ここで、 $j_y^{(s)} = -\sigma_N \nabla_y \mu_s$ は超伝導体に注入されたスピン流である。このとき、係数のスピン伝導度について超伝導揺らぎを考えずに常伝導成分だけで書いているのは、超伝導揺らぎによる熱伝導度への発散的な寄与がないことが知られている [42, 43] ためである。4.1 節で見たようなスピン流ヴァーテクスと熱流ヴァーテクスの類似性から熱伝導度に対するこの知見を応用することは正当化される。

このとき、逆スピンホール電圧 V_{ISHE} は

$$\begin{aligned} V_{\text{ISHE}} &= \frac{w \sigma_{xy}^{(\text{SH})}}{\sigma_{xx} \sigma_N} j_y^{(s)} \\ &= \frac{w}{\sigma_{xx}} \left(\theta_N^{(\text{SH})} + \frac{\delta \sigma_{xy}^{(\text{SH})}}{\sigma_N} \right) j_y^{(s)} \end{aligned} \quad (3.90)$$

と書くことができる。ここで、 w は超伝導体の x 方向の幅、 $\theta_N^{(\text{SH})}$ は常伝導状態におけるスピnhall角である。

この温度依存性を計算したものが図 3.6 である。図 3.6(a) は磁場を $h = 0.05$ に固定して揺らぎの強さを変えたときの様子である。電気抵抗率同様、 $\alpha_0 = T/T_{c0} - 1 + h$ が 0 となる $T/T_{c0} = 0.95$ 付近で急激に大きくなっており、揺らぎが強いほど、その立ち上がりは緩やかになって揺らぎ領域が広がっていることがわかる。図 3.6(b) は揺らぎの強さを $b' = 0.1$ に固定して磁場を変化させたときの様子である。

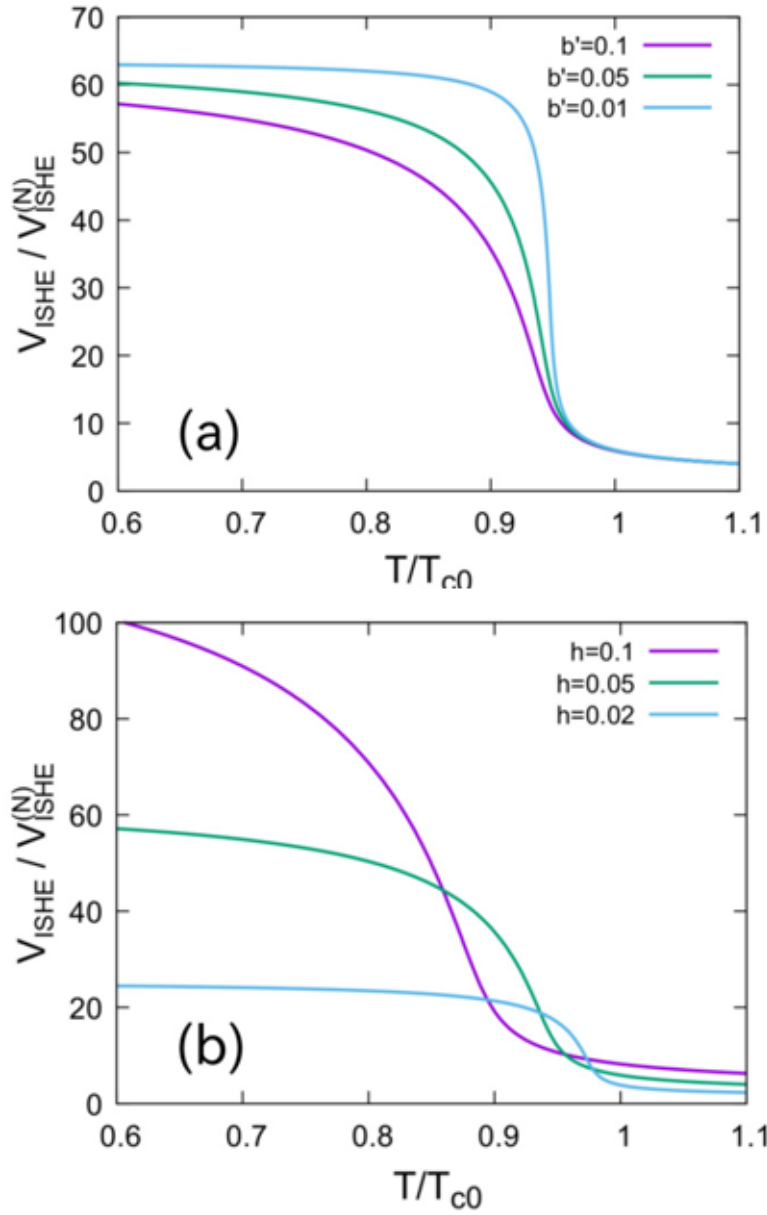


図 3.6: 逆スピンホール電圧の温度依存性。(a) は $h = 0.05$ に固定した場合の温度依存性。(b) は $b' = 0.1$ に固定したときの温度依存性。 $\rho_N/R_Q\xi_0 = 0.1, \mu_s/T_{c0} = 2.0, \theta_N^{(\text{SH})} = 0.001$ としている。

最後に、超伝導体におけるスピitzerバック効果の実験 [21] と本研究で得られた理論結果を比較する。今考えている試料 NbN では常伝導状態でもスピンホール効果を示すので [44–46]、それを考慮した上で逆スピンホール電圧の温度依存性を調べる。逆スピン

ホール電圧は (3.90) 式で表され、そのパラメータは、電気抵抗率の理論計算の結果が実験 [21] の電気抵抗率の温度依存性と一致するように決める（図 1.3 の電気抵抗率のグラフ参照）。

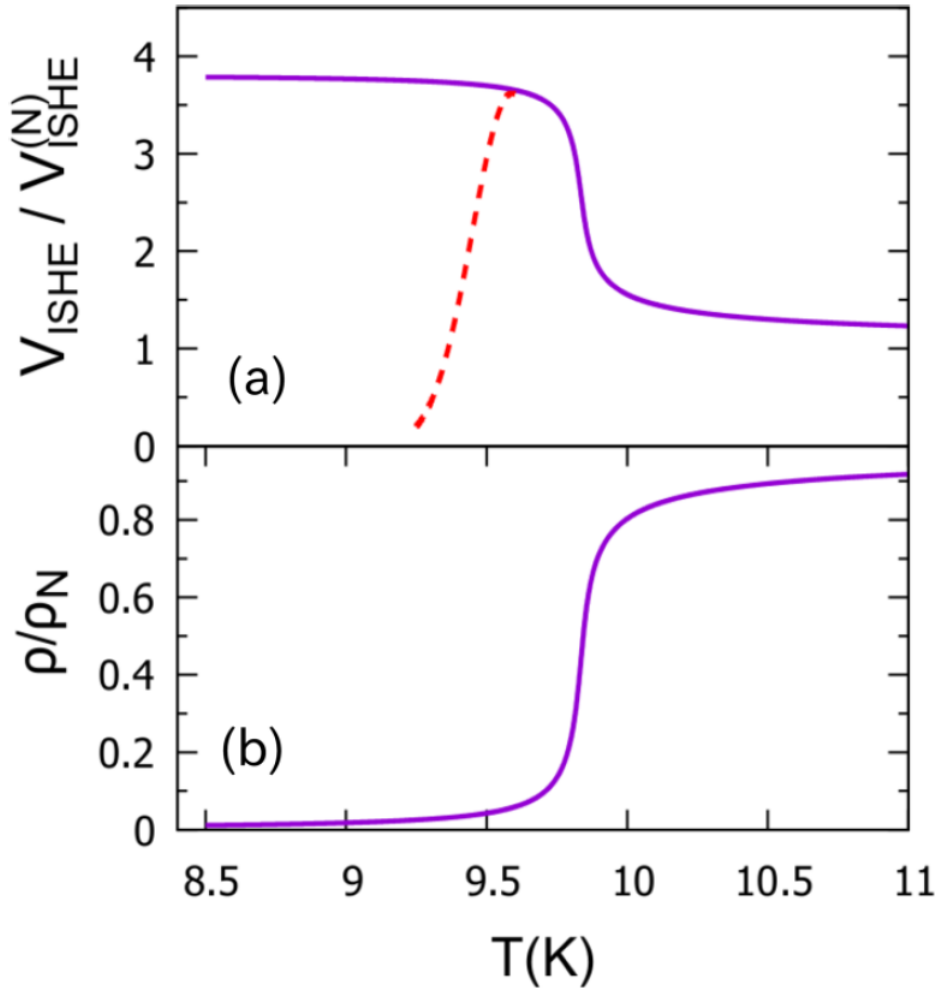


図 3.7: (a) $h = 0.015$ における逆スピンホール電圧の温度依存性。各パラメータの値は $T_{c0} = 10.0\text{K}$, $b' = 0.02$, $\rho_N/R_Q\xi_0 = 0.155$, $\mu_s/T_{c0} = 2.0$, $\theta_N^{(\text{SH})} = 0.005$ 。実線が計算結果で、点線はピンング効果を考慮したときの予測。(b) は同じパラメータでの電気抵抗率の温度依存性。

得られた結果が図 3.7 の実線である。電気抵抗率が急激に減少する温度領域で逆スピンホール電圧が大きく増大していることがわかる。この増大に関しては実験 [21] と整合している。一方、実験では低温で逆スピンホール電圧が下がり、ピーク構造になっている

が、計算結果では低温で一定値に飽和するような振る舞いになっている。これは低温では、本研究では無視していた超伝導渦糸が不純物や格子欠陥に束縛されて動かなくなるピンニング効果と呼ばれるものが生じるためと考えられる。ピンニング効果を定性的に考慮すると、低温では超伝導渦糸が動かなくなるため、vortex スピンホール効果の起源である超伝導渦糸の運動による位相変化（式 2.1）がそもそも起こらなくなるので、電圧も生じず、逆スピンホール電圧は低温で急激に減少すると考えられる。また、4.1 節で指摘したように vortex スピンホール効果と熱流に関する vortex ネルンスト効果には強い類似性がある。vortex ネルンスト効果ではピーク構造を示すことが知られているので [41]、その観点からも逆スピンホール電圧が減少すると考えられる。以上のことを考えて、ピンニング効果を取り込んだときに、図 3.7 の点線のような振る舞いをする事が予測される。ピンニング効果まで考慮すると実験 [21] のピーク構造まで含めて本研究で議論した vortex スピンホール効果で実験結果を解釈することが可能である。

第 4 章

Vortex spin Hall 効果の検出方法

4.1 Vortex Nernst/Ettingshausen 効果との類似性

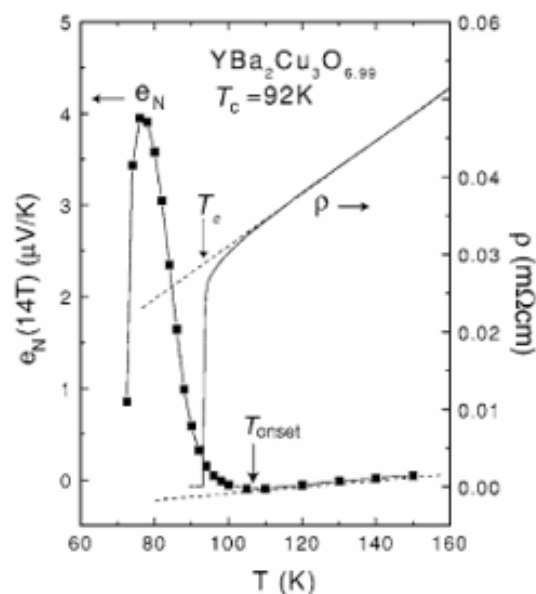
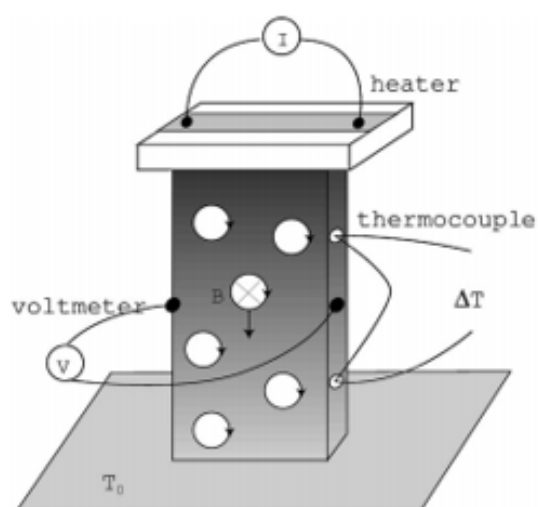


図 4.1: vortex ネルンスト効果の実験。左が実験の配置図で、超伝導体に温度勾配をかけて電圧測定を行っている。右が電気抵抗率と電圧の温度依存性。Reprinted with permission from Ref. [32]. Copyright (2006) by the American Physical Society.

vortex ネルンスト効果/エッティンクスハウゼン効果は超伝導渦糸の運動を介して熱流から電流（電流から熱流）に変換される現象であり、これまでに言及してきたように

vortex スピンホール効果との類似性が見られる。理論的には 4.1 節で触れたようにスピン流ヴァーテックスと熱流ヴァーテックスがともに ω の一次に比例する寄与をもたらすことによる。また実験的にもそれは現れており、図 4.1 は、銅酸化物超伝導体に温度勾配を加えて横方向の電圧測定を行った結果である。図 4.1 右を見ると、電気抵抗率が急激に減少する温度領域で、ネルンスト電圧が急激に増大し、ピーク構造を持っていることがわかる。このような振る舞いは超伝導体におけるスピnzeーベック実験 [21] でも見られる。したがって、4.5 節では逆スピンホール電圧の温度依存性に着目して vortex スピンホール効果で解釈できることを示したが、これは vortex ネルンスト効果によるものではないのか？という問題が生じる。実際、スピnzeーベック効果の場合にも温度勾配をかけているため、実験 [21] において vortex ネルンスト効果の影響もあると考えられるが、温度依存性に着目しても両者は区別できない。そこで、vortex スピンホール効果による実験の解釈をより正当化するためにも、vortex スピンホール効果を vortex ネルンスト効果と区別できる形で検出できるのか、について考える。

4.2 温度勾配依存性による両者の区別

vortex スピンホール効果を vortex ネルンスト効果と区別して検出できるかを考える。図 4.2 のように、温度勾配をかけてスピン流を注入し逆スピンホール効果で電圧測定する場合を考える。このとき、逆スピンホール電圧 V_{ISHE} は式 (3.90) より

$$\begin{aligned} V_{ISHE} &= w \frac{\sigma_{xy}^{(SH)}}{\sigma_{xx}\sigma_N} j_y^{(s)} \\ &= V_{ISHE}^{(N)} + \frac{w}{\sigma_{xx}\sigma_N} \frac{h\mu_s}{8TR_Q\xi_0} \frac{1}{\sqrt{\tilde{\alpha}_0}} j_y^{(s)} \end{aligned} \quad (4.1)$$

となる。ここで $V_{ISHE}^{(N)}$ は常伝導状態における逆スピンホール電圧である。

今、温度勾配によって熱的にスピン注入する状況を想定しているので、スピン蓄積 μ_s やスピン流 $j_y^{(s)}$ は温度勾配 ΔT に比例している。したがって、逆スピンホール電圧の揺らぎ成分 δV_{ISHE} は

$$\delta V_{ISHE} \propto (\Delta T)^2 \quad (4.2)$$

のように、温度勾配に関して対称である。次に vortex ネルンスト効果について考える。vortex スピンホール効果との違いは式 (4.1) においてスピン流 $j_y^{(s)}$ が熱流 $j_y^{(h)}$ になるこ

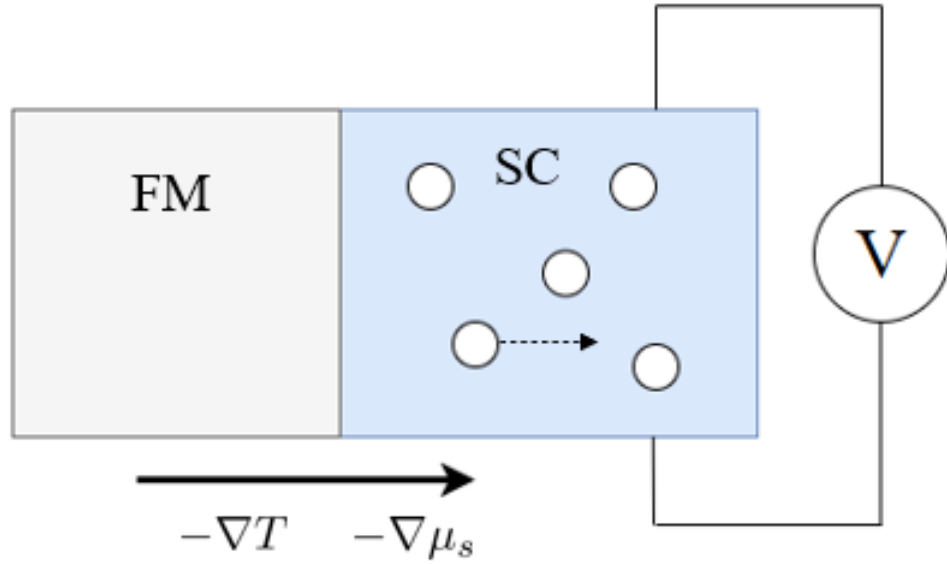


図 4.2: vortex スピンホール効果を検出するための配置図。温度勾配による vortex ネルンスト効果も考える。

と、係数の μ_s が現れないことである。これはスピン流ヴァーテクスと熱流ヴァーテクスの関係（式 (3.37)）から言えることである。熱流 $j_y^{(h)}$ については温度勾配 ΔT に比例しているが、係数 μ_s がないことでネルンスト電圧 V_{VNE} は

$$V_{VNE} \propto \Delta T \quad (4.3)$$

のように温度勾配に関して反対称である。

以上のことから、vortex スピンホール効果と vortex ネルンスト効果は温度依存性では区別できないが、温度勾配依存性に着目することで区別可能である。

第 5 章

まとめ

本論文では、超伝導渦糸揺らぎ状態におけるスピnhall効果について、超伝導揺らぎの理論と久保公式を用いた微視的なアプローチによる理論の研究を行った。

近年、超伝導体/強磁性絶縁体の接合系におけるスピnゼーベック効果の実験が行われ、電気抵抗が急激に減少する温度領域で逆スピnhall電圧がピーク構造を示すことが報告された。この実験結果について、当初はコヒーレンスピーク効果の観点から解釈が行われたが、その後、スピnゼーベック効果ではコヒーレンスピーク効果が現れないことが理論的に指摘され、実験結果の解釈に問題が残ったままとなっていた。そこで本研究では、逆スピnhall効果に焦点を当て、その振る舞いを明らかにすることで実験に対する新しい解釈を提案することを目的として研究した。

第二種超伝導体では、下部臨界磁場 H_{c1} と上部臨界磁場 H_{c2} の間の磁場下で超伝導渦糸状態が実現し、超伝導渦糸はその内部にスピン偏極を持つことができるため、超伝導渦糸の運動によってもスピnを運ぶことができる。また、超伝導渦糸が運動することによって生じる秩序変数の位相変化によって運動の横方向に電圧が生じることが知られている。これらを合わせて考えると、超伝導渦糸の運動によるスピn流がその横方向に電流を誘起させる。このようなスピn流と電流の変換現象はスピnhall効果と呼ばれているが、従来のスピnhall効果はスピn軌道相互作用によって生じるものであり、これはスピn軌道相互作用を仮定しない新しい機構のスピnhall効果と言える。本研究では、この新しいスピnhall効果について考察し、それによってスピnゼーベック効果の実験を説明することを試みた。このとき重要なことが、電気抵抗が有限の温度領域では超伝導揺らぎの影響が支配的であるということである。そこで、本研究では、超伝導渦糸の運動によるスピnhall効果について超伝導揺らぎの理論に基づいて考察し、“vortex スピnhall効果”という新しいスピnhall効果を提案した。

本研究の主要な成果について以下にまとめる。

1. 超伝導渦糸が運ぶスピン流ヴァーテックスの微視的導出

vortex スピンホール効果の振る舞いを明らかにするために、久保公式に基づいて超伝導揺らぎを考慮したスピンホール伝導度の微視的な導出を行った。そのためにはまずスピン流－電流相関を計算する必要がある、それはファインマン・ダイアグラムを用いる摂動計算に基づいて行った。このとき、いくつかのダイアグラムが現れるが、vortex ネルンスト効果との類似性から最も支配的であると考えられる Aslamazov-Larkin 項について計算を行った。ダイアグラム計算でまず行ったのがカレントヴァーテックス関数の導出である。特に、そのダイアグラムに現れるスピン流ヴァーテックスの導出については本研究で初めて行われたものである。スピン流ヴァーテックスの特徴的な点として、スピン流演算子はスピンを含むために、スピン和の計算から電流ヴァーテックスとは異なる結果が得られる。その計算の結果、スピン流ヴァーテックスは先行研究で既に知られている熱流ヴァーテックスと似た形で得られ、具体的にはスピン流ヴァーテックスは熱流ヴァーテックスとスピン蓄積の積に比例するということを明らかにした。この結果は、スピン流－電流相関から決まる vortex スピンホール効果が熱流－電流相関から決まる vortex ネルンスト効果と強い類似性があることを示している。また、このスピン蓄積に比例しているという事実は後で述べるように両者を区別して測定するために重要な役割を果たす。

2. Vortex スピンホール伝導度の微視的導出

久保公式に基づき、vortex スピンホール伝導度を微視的に計算した。この際、ガウス揺らぎの範囲では超伝導転移温度で電気伝導度が完全に発散するため、電気抵抗が有限の温度領域を記述することができない。そのため、超伝導揺らぎの効果をより適切に取り込むために有限の電気抵抗領域をうまく記述できることが知られている自己無撞着なハートリー近似の範囲で超伝導揺らぎを評価し、それを用いて vortex スピンホール伝導度の計算を行った。その結果、電気抵抗が急激に減少し始める温度で vortex スピンホール伝導度が急激に増大することが明らかとなった。その増大の程度としては電気伝導度と同じ程度であることも判明した。また、実際に実験で測定される物理量は逆スピンホール電圧なので、得られた vortex スピンホール伝導度から逆スピンホール電圧を求め、その温度依存性も調べた。その結果、電気抵抗が急激に減少し始める温度で逆スピンホール電圧は大きく増大することが判明した。また、電気抵抗がほぼ 0 となる低温領域では逆スピンホール電圧は飽和して一定値を取るという結果が得られた。しかし、この低温の振る舞いは、低温で超伝導渦糸が不純物や格子欠陥に束縛される現象の渦糸ピンニング効果が本研究では無

視していることによって生じたものであると考えられる。実際の系では渦糸ピンニング効果が存在するため、低温では超伝導渦糸の運動が起こらなくなる。そのため、超伝導渦糸の運動によって生じる位相変化も起こらなくなり、それにともなって逆スピホール電圧も減少すると考えられる。このことを考慮して改めて逆スピホール電圧の温度依存性を考えると、電気抵抗が急激に減少する温度領域でピーク構造を示すという結論が得られた。この結果を超伝導体/強磁性絶縁体接合系におけるスピンゼーバック効果の実験と比較することで、本研究で提案した vortex スピホール効果はこの実験結果を説明することができることを示した。

3.Vortex スピホール効果の検出方法

スピン流ヴァーテクスの導出で明らかにしたように、vortex スピホール効果と vortex ネルンスト効果には強い類似性がある。そのためネルンスト電圧の温度依存性の理論研究では vortex スピホール効果同様、ピーク構造を示すことが指摘されている。また、実験的にも、超伝導体に温度勾配をかけてネルンスト電圧を測定すると、やはりピーク構造を示すことが報告されている。この事実は、超伝導体におけるスピンゼーバック効果の実験で観測される電圧の温度依存性が、vortex スピホール効果によるものなのか vortex ネルンスト効果によるものなのか、区別できないことを示唆している。そのため、vortex スピホール効果を vortex ネルンスト効果と区別して検出できる方法について考える必要がある。そこで着目するポイントが、スピン流ヴァーテクスが熱流ヴァーテクスとスピン蓄積の積に比例していたという結果である。このことから、逆スピホール電圧の超伝導渦糸揺らぎからの寄与もスピン蓄積に比例していることが示せた。また、スピンゼーバック効果を考えているので、スピン蓄積や超伝導体に注入されたスピン流は温度勾配に比例している。したがって、逆スピホール電圧の超伝導渦糸揺らぎ成分はスピン蓄積とスピン流の両者に比例する、すなわち温度勾配の二乗に比例することを明らかにした。一方で、ネルンスト電圧についてはスピン蓄積に対応する部分がないので単純に熱流に比例する、すなわち温度勾配の一乗に比例することが知られている。これらの結果より、vortex スピホール効果は温度勾配依存性に着目することで vortex ネルンスト効果と区別して検出可能であることを明らかにした。

結論

以上のように、本研究では、超伝導体 (NbN)/強磁性絶縁体 ($\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$) のスピンゼーバック効果で観測された超伝導転移温度付近での顕著なピーク構造 [21] を契機として、

超伝導渦糸ゆらぎ状態における新しいスピinhall効果の存在を指摘し、これを vortex スpinhall効果と名付けて理論的に考察した。具体的には、超伝導渦糸が運ぶスピン流ヴァーテクスを微視的に計算し、久保公式にこの結果を適用して、vortex スpinhall伝導度の温度・磁場依存性を明らかとした。この vortex スpinhall効果には vortex ネルンスト効果が重畳しうるが、実験的に両者を区別する方法も提案した。そして、未解決問題とされた上記の超伝導体 (NbN)/強磁性絶縁体 ($\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$) 系のスピンゼーベック効果の実験結果 [21] が、vortex スpinhall効果によって見事に説明されることを示した。本研究の成果は、超伝導スピントロニクス of 新たな一面を切り開き、その進展に大きく貢献するものである。

謝辞

本研究を行うにあたり、安立裕人准教授にはお忙しい中、議論の時間を割いていただき、的確な指導・助言によって研究を遂行することができました。深く感謝いたします。市岡優典教授にはセミナー等の日々の研究活動において様々な助言をいただき、学会等の発表練習にも積極的に協力してくれました。深く感謝いたします。共同研究していただいた加藤雄介教授には特に超伝導渦糸の分野から様々なご意見・議論をしていただきました。また、研究室インターンシップを快く受けてくださり、貴重な体験をすることができました。心より感謝いたします。研究室の皆様には日頃の研究活動において様々な議論・助言をいただきました。深く感謝いたします。最後に、博士課程進学へ理解を示し、支えてくれた家族に心より感謝いたします。

本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2126 の支援を受けたものです。

参考文献

- [1] A. G. Aronov, Sov. Phys. JETP **44**, 193 (1976).
- [2] Y. Yafet, Phys. Lett. A **98**, 287 (1983).
- [3] S. A. Kivelson and D. S. Rokhsar, Phys. Rev. B **41**, 11693 (1990).
- [4] H. L. Zhao and S. Hershfield, Phys. Rev. B **52**, 3632 (1995).
- [5] T. Yamashita, S. Takahashi, H. Imamura, and S. Maekawa, Phys. Rev. B **65**, 172509 (2002).
- [6] S. Takahashi and S. Maekawa, Phys. Rev. Lett **88**, 116601 (2002).
- [7] J. P. Morten, A. Brataas, G. E. W. Bauer, W. Belzig, and Y. Tserkovnyak, Eur. Phys. Lett **84**, 57008 (2008).
- [8] S. Takahashi and S. Maekawa, J. Phys. Soc. Jpn **77**, 031009 (2008).
- [9] F. S. Bergeret, M. Silaev, P. Virtanen, and T. T. Heikkilä, Rev. Mod. Phys **90**, 041001 (2018).
- [10] M. Inoue, M. Ichioka, and H. Adachi, Phys. Rev. B **96**, 024414 (2017).
- [11] X. Montiel and M. Eschrig, Phys. Rev. B **98**, 104513 (2018).
- [12] T. Taira, M. Ichioka, S. Takei, and H. Adachi, Phys. Rev. B **98**, 214437 (2018).
- [13] T. Kato, Y. Ohnuma, M. Matsuo, J. Rech, T. Jonckheere, and M. T. Phys. Rev. B **99**, 144411 (2019).
- [14] A. Watanabe, H. Adachi, and Y. Kato, Phys. Rev. B **106**, 104504 (2022).
- [15] H. Yang, S. H. Yang, S. Takahashi, S. Maekawa, and S. S. P. Parkin, Nat. Mater **9**, 586 (2010).
- [16] F. Hübner, M. J. Wolf, D. Beckmann, and H. v. Löhneysen, Phys. Rev. Lett **109**, 207001 (2012).
- [17] C. H. L. Quay, D. Chevallier, C. Bena, and M. Aprili, Nat. Phys **9**, 84 (2013).
- [18] T. Wakamura, N. Hasegawa, K. Ohnishi, Y. Niimi, and Y. C. Otani, Phys. Rev. Lett **112**,

- 036602 (2014).
- [19] K. Ohnishi, Y. Ono, T. Nomura, and T. Kimura, *Sci. Rep* **4**, 6260 (2014).
 - [20] Y. Yao, Q. Song, Y. Takamura, J. P. Cascales, W. Yuan, Y. Ma, Y. Yun, X. C. Xie, J. S. Moodera, and W. Han, *Phys. Rev. B* **97**, 224414 (2018).
 - [21] M. Umeda, Y. Shiomi, T. Kikkawa, T. Niizeki, J. Lustikova, S. Takahashi, and E. Saitoh, *Appl. Phys. Lett* **112**, 232601 (2018).
 - [22] J. R. Jeon, C. Ciccarelli, A. J. Ferguson, H. Kurebayashi, L. F. Cohen, and M. G. Blamire, *Nat. Mater* **17**, 499 (2018).
 - [23] K. R. Jeon, J. C. Jeon, X. Zhou, A. Migliorini, J. Yoon, and S. S. P. Parkin, *ACS Nano* **14**, 15874 (2020).
 - [24] J. W. Serene and D. Rainer, *Phys. Rep* **101**, 221 (1983).
 - [25] I. M. Dayton, T. Sage, E. C. Gingrich, M. G. Loving, T. F. Ambrose, N. P. Siwak, S. Keebaugh, C. Kirby, D. L. Miller, A. Y. Herr, Q. P. Herr, and O. N. Naaman, *IEEE Mag. Lett.* **9**, 3301905 (2018).
 - [26] M. I. Dyakonov and V. I. Perel, *Sov. Phys. JETP Lett* **13**, 467 (1971).
 - [27] J. E. Hirsch, *Phys. Rev. Lett* **83**, 1834 (1999).
 - [28] J. Sinova, S. O. Valenzuela, J. Wunderlich, C. H. Back, and T. Jungwirth, *Rev. Mod. Phys.* **87**, 1213 (2015).
 - [29] K. Uchida, S. Takahashi, K. Harii, J. Ieda, W. Koshibae, K. Ando, S. Maekawa, and E. Saitoh, *Nature* **455**, 778 (2008).
 - [30] K. Uchida, H. Adachi, T. Ota, H. Nakayama, S. Maekawa, and E. Saitoh, *Appl. Phys. Lett* **97**, 172505 (2010).
 - [31] P. W. Anderson, *Rev. Mod. Phys* **38**, 298 (1966).
 - [32] Y. Wang, L. Li, and N. P. Ong, *Phys. Rev. B* **73**, 024510 (2006).
 - [33] A. Pourret, H. Aubin, J. Lesueur, C. A. Marrache-Kikuchi, L. Bergé, L. Dumoulin, and K. Behnia, *Nat. Phys* **2**, 683 (2006).
 - [34] W. E. Masker, S. Marcelja, and R. D. Parks, *Phys. Rev* **188**, 745 (1969).
 - [35] R. F. Hasing, R. R. Hake, and L. J. Barnes, *Phys. Rev. Lett* **30**, 6 (1973).
 - [36] R. Ikeda, T. Ohmi, and T. Tsuneto, *J. Phys. Soc. Jpn* **58**, 1377 (1989).
 - [37] S. Ullah and A. Dorsey, *Phys. Rev. B* **44**, 262 (1991).
 - [38] A. Vargunin and M. Silaev, *Sci. Rep* **9**, 5914 (2019).
 - [39] I. Ussishkin, *Phys. Rev. B* **68**, 024517 (2003).
 - [40] L. G. Aslamasov and A. I. Larkin, *Fiz. Tverd. Tela* **10**, 1104 (1968), [*Sov. Phys. Solid*

State **10**, 875 (1968)].

- [41] A. Pourret, P. Spathis, H. Aubin, and K. Behnia, *New J. Phys* **11**, 055071 (2009).
- [42] S. Vishveshwara and M. P. A. Fisher, *Phys. Rev. B* **64**, 134507 (2001).
- [43] D. R. Niven and R. A. Smith, *Phys. Rev. B* **66**, 214505 (2002).
- [44] M. Morota, Y. Niimi, K. Ohnishi, D. H. Wei, T. Tanaka, H. Kontani, T. Kimura, and Y. Otani, *Phys. Rev. B* **83**, 174405 (2011).
- [45] K. R. Jeon, C. Ciccarelli, H. Kurebayashi, J. Wunderlich, L. F. Cohen, S. Komori, J. W. A. Robinson, and M. G. Blamire, *Phys. Rev. Appl* **10**, 014029 (2018).
- [46] K. Rogdakis, A. Sud, M. Amado, C. M. Lee, L. McKenzie-Sell, K. R. Jeon, M. Cubukcu, M. G. Blamire, J. W. A. Robinson, L. F. Cohen, and H. Kurebayashi, *Phys. Rev. Mater* **3**, 014406 (2019).