岡山大学算数・数学教育学会誌
『パピルス』第28号（2021年）29頁～38頁

算数の事象を統合的・発展的に捉えて問題設定する方略
―What　if　Not方略の援用を通して―

黒﨑東洋郎[1)]・杉能道明[2)]　宮崎唯[3)]

要　約

変動の激しい時代を見据えて算数科では「数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える」という方向性が示されている。その実現に向け「事象を数理的に捉え、数学の問題を見いだし、自立的、協働的に解決し、解決過程を振り返る」という問題発見・解決の過程が提言されている。変革の時代では、変化し続ける事象で何が問題かを見つける力が重要であり、算数の授業においても、問題発見力を育むことが不可欠である。ところが問題発見は軽視されがちで、問題設定は、教師主導で教科書通りの日常事象を数理化する問題設定が大半で、子どもが「算数の事象を統合的・発展的に捉えて問題発見する」という授業研究は進んでいない。算数は指導の系統性を重視する教科である。ゼロベースではなく、既習事項を基礎にして算数の事象を統合の観点から発展的に関わり、子ども自らが「問題発見・設定する授業」を探究することが喫緊の課題である。

キーワード　統合的・発展的　問題設定　足場作り　what　if　not方略

1　問題の所在

未来予測の困難な変革社会を迎え、新しい算数教育では、変革社会に柔軟に対応するためにどんな資質・能力をどのように育成すればよいのか世界中が関心をもって探究している。学習指導要領が改訂され（2017)、「数学的な見方・考え方を働かせ、数学的な活動を通して、数学的に考える資質・能力の育成を目指す」と算数・数学で育成すべき資質・能力が示され、その教育が始まっている。算数の問題発見・解決の過程については、Polya (1954) [5)]「いかにして問題をとくか」の中で「問題理解」「計画」「実行」「振り返り」の過程を示しており、広く共通認識されている。ところが、算数の授業では問題解決型の授業スタイルに流され,内実が伴っていない傾向がある。具体的に、どのような数学的な見方・考え方を働かせて、本質的な「数学的に考える力」を育もうとするのか、目指す姿への実際のアプローチが伴っていない場合が少なくない。特に、「問題」については、理解することは重要しても、問題自体を子どもに発見させ、設定することについては、余り注意を払っていない。解決すべき問題を教師が一方的に与え，その問題を理解し、いかに問題解決すればよいか、その解決方策に軸足を置く授業が多い。

主体的で、対話的な深い学びが推奨されているけれども、算数の問題を子どもは自分の問題と意識して自己決定していない現状がある。これでは、主体的な算数の学びと「ズレ」が生じている。

Polya (1954) も問題発見[5)]に言及しているが、それは，問題解決した後の「振り返り」の過程の中で、気付きとして「新しい問題」を発見することを示唆している。つまり、問題解決したらそれで終わりではなく、これに続く探究すべき新たな算数の問題を発見するという「問題解決学習」の連鎖の在り方を述べている。それは、単元の学習展開の中で次々と新たな問題を発見とその解決をサイクリックに繰り返すことで、強い問題解決力を創出することを意図している。

本研究で対象としている問題は、サイクリックに繰り返される問題発見・設定ではない。これまでの分野・領域の異なる新たな算数の事象に直面する場合の「問題」の設定の在り方である。新しい単元の冒頭において、算数の事象はそれまでの文脈と違う場面であり、戸惑い、不安を感じる。戸惑いながらも子ども自身が算数の事象にかかわって数学的な疑問や問いを見いだし、探究すべき新しい「問題」を自己決定

1）岡山大学名誉教授　2）ノートルダム清心女子大学
3）岡山大学教育学部附属小学校

していくことを研究の対象としている。

よって、新規の単元ではそれまでの算数の学びと領域が異なり、算数学習の文脈が子どもの意識にないので、問題発見、問題設定することへの学習抵抗は大きいものがある。系統的指導を原則としている算数科にあっては、「算数の事象を数学化して問題設定することは大切」という認識はあるものの，実際の指導では，有効な指導方法が見いだせず、実現には至っていない状況にある。ここに、どのような算数の事象と出会わせ、具体的にどんな数学的な見方・考え方を働かせて数学化し、問題発見させるようにすればよいか、その効果的な方策を探究すべき課題点がある。

現在の「理論と実践の往還」重視の算数教育においても、教科書の決められた問題をいかに主体的、対話的に問題解決するかに主眼が置かれ、問題設定の在り方に研究の焦点が置かれていないのが現状にある。変革の時代では、予測することが困難な複雑で高度な見慣れない新たな問題が次々と生まれている。こうした変革の激しい中で問題を見つけ、自ら問題設定する力を育む算数の授業改革は進んでいないのは問題である。変革の時代を自ら切り拓く力を育むには、問題を他の誰かが与えてくれるのを待つのではなく、複雑で，見慣れない，非定型な出来事を数学的に、多面的・分析的に考察し、自ら算数の問題設定することが大切である。

教科書の決まりきった問題を問題解決過程に即して解決する様相に主体性もみられる。質的な主体性の観点からみれば，柔軟性に乏しく、問題を自分で見付けたわけではなく借り物で、本当の主体的な学びになっていない。変化の時代に相応しい算数の問題は、算数の事象について、子ども自身が数学的に多面的な見方・考え方を働かせ、疑問をもち、今解決すべき「問い」かを検討し、算数の学びに相応しい問題を自己決定することが大切である。変革の社会の柔軟に生き抜くには、算数の授業において、教師が与えた決まりきった問題を解く授業から、子ども自らが算数の事象にかかわっていく中で「疑問」「問い」を見いだし、「問題設定」して、能動的に数学力を発揮して問題設定する授業への転換は、喫緊の課題であると考える。

2　研究の内容

（1）　問題設定の意義

①　変化し続ける学びの促進

変革の時代に相応しい学びについて Rogers (1969) [7] は、下記の示唆をしている。

> 「変化のない時代にあっては、問題を与え、知識や技能を習得させ、教えることは問題視されることはなかった。しかし、変化の時代にあっては、絶えず変化し続けるこれまで経験したことのない状況や問題に直面する。教育の目的は、変化に適応し、変化し続ける学び方を促進することにある」

Rogers は、決まりきった問題を解決させ、静的な知識・技能の習得させるような学びは変動の時代には相応しくないと断定し、時代のニーズに相応しい算数教育への方向転換を求めている。絶えず変化し続ける時代においては、これまで経験したことのない状況が生まれるので、ヘルバルトのいう教育的タクト（様々な状況に臨機に対応する力）をもつには、直面する様々な算数の事象を，多角的、数理的に捉えて「疑問」「問い」をもち、子ども自らが探究すべき算数の問題を設定・解決するような授業づくりを促進し、変化し続ける算数の学び方を学ばせることが大切だと指摘する。

②　主体的な算数の学び

主体的な学びについて、Haan (1975)は、「しなければならないことを知っている必要は無い。むしろ、自分自身で学ばなければならないことを発見することが大事」と示唆する。Haan の指摘は、直面した問題を，自分の力を発揮して問題解決することは大切である。しかし、それ以上に大事なのは、直面する様々な出来事の中から、解決すべき「問題・課題」を発見することの方が、本質的な学びであることを示唆している。

今日、能動的な学びとしてアクティブラーニングを「主体的で、対話的な、深い学び」の３つの要素をキャッチフレーズにして叫ばれている（中央教育審議会答申、2017)。「主体的な学び」について、M. Knowels (1975) [8] は、「他者の助けを伴うかどうかに関係なく、自分たちの学習ニーズを突き止め、学習の目的を自己決定し、学習のための材料を集め、適切な学習方略を選び実行し、個々人が真の主導権を握る」と述べている。この M. Knowels の示唆は、算数科の問題解決型の学びにおいては、算数の問題を子ども自身が自己決定することの大切さを強調している。子ども自らが様々な算数の事象に自ら数理的かかわって，逐次数学的に捉える中で、既習と未習を比較検討して，自分自身にと

って未知なる算数の学びのニーズを突き止めることが，どれだけ重要かを示唆している。問題設定する主体性は教員ではなく、子どもにあると明確に示唆している。

（2） 問題発見・解決過程と「問題設定」

中央教育審議会答申（2017）[1)]には、資質・能力を育成する上で、算数の問題発見・過程の果たす役割は重いとして、下記の問題発見・解決の過程がイメージとして示されている。

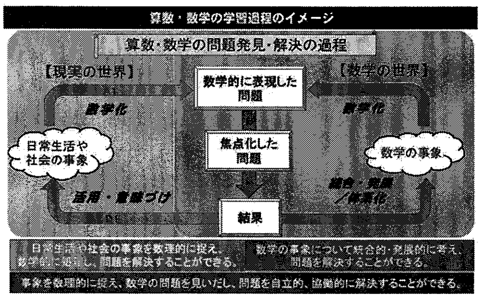

図１　算数・数学の学習過程のイメージ

図１は、次の２つの問題発見・解決過程のイメージを簡潔に示したものである。

① 日常生活や社会事象を数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題解決し、解決過程を振り返り得られた結果の意味を考察する。

② 数学の事象について統合的・発展的に捉えて新たな問題を設定し数学的に処理し、問題解決し、解決過程を振り返って概念を形成したり体系化したりする。

＊アンダーラインを引いたところが問題設定に関する記述箇所

問題発見・解決の①の方策は、算数科の学習内容である数量や図形の概念や原理は抽象的で、初めてこれらについて学習問題を捉えることは容易ではないことから，その方略を示している。具体的には、日常事象と算数を関連づけることから始め、「日常生活や社会事象を数理的に捉え」とし、子どもの身近な日常生活や社会の出来事に数学的な見方を働かせて着目し、事象を数理的に捉えて算数の舞台に載せ、真実感のある身近な数量や図形について問題設定し、解決することを示唆している。

問題発見・解決の②の方策は、系統的な算数・数学の学習指導を基盤として展開する方略を示している。「数学（算数）の事象について統合的・発展的に捉えて新たな問題を設定すること」を示している。「統合的・発展的に捉えて」は、算数の事象を統合的・発展的な見方・考え方を働かせてかかわることを示唆する。そして、既習と未知の学習事項を見比べて整理・統合して探究することが相応しい問題を設定することを提言している。指導の系統性を重視して数量や図形の学習内容を積み上げていく算数・数学教育にあっては、いつも日常事象と関連づけてゼロベースで始めることは這い回る算数指導であり、合理性に欠けている。２つの問題発見・解決のアプローチの方略を示すことで、変革の時代に相応しい算数の学習指導として臨機に対応して積極的に取り組む方策を促進するものである。特に算数教育では、抽象的な数量や図形の学習は学習抵抗が大きいという固定観念から、日常事象を数理化して問題設定する前ページに述べた①の型に偏重している傾向がある。系統的に数量や図形の学習を積み重ねているにもかかわらず、②の型の算数の事象から問題設定する授業に消極的なことは、系統的に数理を探究して体系的に学ぶことを目指す算数科の目指す姿と乖離する問題がある。したがって、算数の事象から問題設定することについて、新規に「統合的・発展的に捉えて」という要件が付加され、「数学の事象について統合的・発展的に捉えて新たな問題を設定」をどのように実現すればよいのか、その具体的な方策を検討する必要があると考える。

（3） 問題と課題の捉え方

算数・数学教育では、問題解決型とか課題解決型の授業が重要と言われている。ところが、問題と課題を厳密に使い分けしていない現状にある。辞書（広辞苑）には、「問題とは、研究・論議して解決すべき事柄」であり、「課題とは、「課せられた題・問題」と定義している。教育学と心理学でも異なる意味で使われている。「生きる力」の定義では「自ら課題を見つけ、自ら学び、自ら考える（中央教育審議会答申、1997）」と示され、課題は，自分で見つけるものであると定義されている。様々な問題はあるけれど，今解決すべき問題を焦点化した問題を「課題」として心理学の観点から位置づけていると思われる。しかしながら、問題は教師が与えるのが相応しいとは考えられない。まして、教科書のような決まりきった問題を提示して問題設定を行い、子どもが「図にかいて考えて

みよう」という課題を見いだす授業は、変革の時代に相応しい授業とかけ離れている。絶えず変化し続ける変革の時代には,変化に対応して、子ども自らが問題をリサーチクエッションして単元を貫く「問題設定」することが不可欠である。

（4） 算数の問題を設定する要件

中央教育審議会答申 (2017) には、「日常事象を数理化して新たな問題を設定する」場合と「算数の事象を統合的・発展的に捉える問題設定する」場合を示している。後者は系統的な算数の指導を基盤にした問題設定である。この場合、数学的な見方・考え方を働かせといわないで一歩踏み込んで、統合的・発展的な見方を働かせて、算数の事象にかかわることを強調している。それは、変化し続ける算数の学びを促進する場合,絶えず一般化・体系化を図り、変化に対応する算数の学びの体系的な数理化を目指すという「あるべき姿」を示している。

中島(2015)は、数学教育の現代化で統合的・発展的に考察することを強調した際、統合と発展を別々に捉えるのではなく、「統合の観点で発展的に捉えることが相応しい」と述べている。発展的考察は,拡散思考・水平思考をイメージするが、統合の観点は、垂直思考を示し、算数の学びを系統的に質の高い水準に発達させることを求めていると考える。したがって,問題設定する算数の問題は、単に,既習事項を拡張した新しい算数の知識を生み出すだけでなく、統合の観点から既習事項を発展的に拡張し,体系化につながることが大事な要件になると考える。

3 算数の事象から問題設定する方略

（1）「What If Not」方略

数学的事象(算数の事象)から問題を発見する問題設定の方略の先行研究については、S.I.ブラウン／M.I.ワルターの提唱する「What If Not」方略(1990)[4]がある。

第0水準　出発点を選ぶ
第I水準　属性の目録づくり
第II水準　What If Not
第III水準　問題設定
第IV水準　問題分析

図2　「What If Not」方略の段階

この問題設定の方略については平林(1990)が訳本「いかにして問題をつくるか」[4]に紹介して久しい。残念ながら算数・数学教育の現場には,今もって浸透していない現状にある。その要因は何か。それは、問題設定することよりも、問題をいかに解くかに主眼があるからである。教科書の決まりきった問題を批判的に分析・考察することもなく適切な問題として提示し、結果的に概念や原理を理解させ、その習得に価値を見いだしている。問題解決型の算数の授業で「算数の事象を統合的・発展的に捉える問題を設定する」を強調しても、子ども自身が問題設定することが重要だという認識がなく、無関心なのである。「What If Not」方略は、問題設定の有効な活用方法として一般化されているわけではない。大切なのは,算数の学びの発達段階に応じて、試行錯誤しながら,具体的な援用方法を具体的にリサーチしていくことであると考える。例えば、第1水準の目録をつくる場合、期待する新しい算数の学びにつながる「問い」を生成する目録が見つかるとは限らない。そのため、「What If Not」の方略の方法知は役に立たないと決め込んで「洗い流し効果 (Zeichner、1990)」を生みやすい。

「What If Not」の方略には、洗い流してはいけない価値があると考える。絶えず変化し続ける時代には、「生きる力」として、変化する出来事にかかわり、自分で何が問題なのかを見いださないと生き抜くことは難しい。したがって、子ども自らが算数の事象に能動的にかかわって疑問を抱き、探究すべき算数の「問い」にしていくことが不可欠である。算数の事象に直面させ、新たな算数の問題をみつけようと問いかけられても、教師の問いかけだけで新しい算数の学びにつながる「問題」を設定するに至らないのである。この点、「What If Not」の方略には、算数の事象の構成を固定的に捉えないで、構成する属性を「もし、aではなくbだったら、・・」と発想して属性をいろいろ取り出す働きがある。第1水準の「目録づくり」を次々と生成することができるのである。「What if Not」の方略で見いだした目録を、統合の観点から発展的に関連づけて既習と未習に整理させれば、子どもは探究すべき本質的な算数の問題を見いだすことができると考える。「統合的に考察する」ということは、本研究では未習事項とこれから学ぶ新規事項と共通する系統性のある算数の文脈を生むことであると捉え

ている。単元の冒頭で非定型な算数の事象に直面して、統合の観点から発展的に未習事項を創生する方略が「What If Not」の方略である。子ども自らが算数の事象にアクションリサーチして問題設定する有効なアプローチであると期待している。

（2）変革の時代に相応しい算数の問題

OECD 教育研究革新センター（2015）は，変革の時代に不可欠な創造的数学力を育成する上で相応しい数学問題は、「複雑で、見慣れない、非定型的問題（Complex, Unfamiliar, and Non—routine, CUN）」[3)] であると示唆する。教科書のような決まりきった定型問題を設定して、アルゴリズムを探究する授業を危惧している。それは、決まりきった問題で画一的に問題解決させても絶えず変化する状況や問題に臨機に対応する創造的な数学力は育成できないからである。

転換

決まりきった問題 ➡ 非定型問題

創造的数学力を育成するためには、事象を数理的に捉えて、①次々に複数の数学的アイデアを流暢に見いだし（fluency）、②他と異なるアイデアを柔軟に考えだし（flexibility）、③今までにない希少で独創的なアイデアを生み出す（originality）ように指導することであると示唆する（トーランス、1966）。算数教育では，多角的思考重視の指導で，問題解決のアプローチを多様に見いださせる指導もあるが、これは問題解決の場に特化している。

創造的な数学力の 3 つの要素である流暢性、柔軟性、独創性は、問題解決のアプローチに限るものではない。問題設定においても、これらの創造的数学力を育むことができると考える。算数の事象に積極的にかかわって、数学化して捉え、複雑で見慣れない不定型問題を設定する場合にも見取ることができると考えられる。

例えば、算数の事象に能動的に関わって複数の問題を発見することは「流暢性」を、他と異なる様々な問題を発見することは「柔軟性」を、そして、未だ直面したことのない見慣れない問題を発見することは独創性を発達させていると考えることができる。したがって、CUN 問題は、流暢性、柔軟性、独創性につながる創造的な数学力を育み、変化に臨機に対応し、絶えず変化し続ける学びを発達させる授業方略であるという共通認識に立つことができる。

（3）体系的な数理を探究する相応しい算数の問題

絶えず変化し続ける変革に時代において、変化に対応する算数の学びの体系化を目指すことは基本である。今までにない問題発見・解決に発散的思考を働かせ、創造性の発達を助けるといっても、拡散的思考のみを強調するのは適切ではない。それは、創造的な数学力をどのような方向に発達させるのが相応しいかが不明瞭になるからである。すなわち、多様な考えのみを追究し、水平思考や拡散的思考を推奨するだけの授業に終始したのでは，創造的数学力は拡がりはあっても、質的な高まりや深まりは期待できないと考える。

「数学の事象について統合的・発展的に捉えて新たな問題を設定し・・・（以下省略）」と示されている（中央教育審議会、2017）。これは、算数の事象を漠然と数理的に捉えるのではなく、「統合的・発展的に捉える」という観点を示すことで、体系的な算数の学びづくりに資する「問題設定」のあるべき姿を明確に示している。

3 統合・発展的に捉える指導の構想

（1）算数の事象と問題設定のギャップ

シェーンフェルド（1987）は、「何世紀もかけて研究され発達してきた数学的構造を応用するように授業を通して学ばされてきた。それにもかかわらず、子どもたちは生活で出くわす簡単な問題に数学を活用できない」という転移の問題を指摘する。問題解決力がないと捉えられる。本当は問題設定する経験がないため、生活で予期しない出来事に直面しても「問題」として捉えられないとも考えられる。アインシュタインは「経験によって成長する」と言う。よって、自分の力で算数の問題を設定する経験をさせることが大事である。算数の問題設定については、「数学事象を統合的・発展的に捉えて問題設定する」と示されている（中央教育審議会答申、2017）。ところが，算数の事象と創発すべき新しい問題の両者の間には溝がある。算数の事象を統合的・発展的に捉えて問題設定するといっても、実際にどのようにアプローチして問題を設定すればよいか、その有効な方略の具体化が急がれる。

（2）ギャップを埋める足場づくりとその活用

算数の事象を統合的･発展的に捉えて問題設定する What if Not 方略を援用するためには,指導の系統性の強い領域・分野の早い段階に、算数の事象を統合的･発展的に捉えて問題設定することを経験する「足場」を位置づけ、今後の学びの基礎として設定する。具体的には、まず、系統性の強い直近の単元において、What if Not 方略を援用しやすいように、既習の算数の事象を「複雑で,不慣れな,非定型」に組織した。算数の事象を意図的に非定型にすることで、子どもは「もし、a が b になったら」と What if Not 方略を援用しながら、いろいろな属性を見いだしていく。見いだした属性を統合.発展の観点から関連付ける中で、新たな「問い」を創発し、問題発見につなげるようにする。

この足場づくりでの学びの経験を基盤にして,数学事象を子どもなりに統合・発展の観点から既習の数学事象から新しい数量や図形にまつわる「問い」を創発して問題設定する授業を構成した。

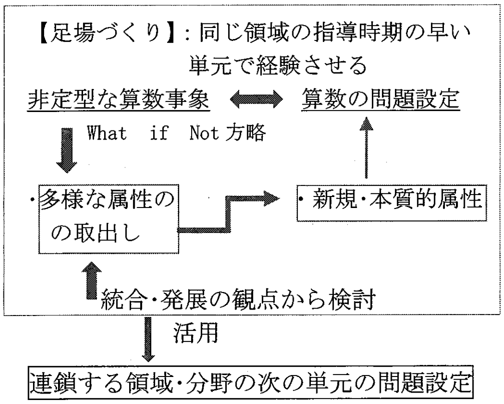

図 3　ギャップを埋める足場づくり

4　算数の事象を統合的･発展的に捉えて問題設定する足場づくり具体化 —第 3 学年かけ算—

(1) 足場づくりとその活用の授業構想

3 学年のかけ算を第 2 学年の基数同士のかけ算 (a×b) を基礎にして、算数の事象を統合的・発展的に捉えて問題設定する授業を構想する。この学年では、連鎖する 2 つのかけ算指導の場がある。第 1 の「かけ算 (1)」では、被乗数を 2･3 位数に拡張し、第 2 の「かけ算 (2)」では、乗数を 2 位数に拡張して計算の意味や仕方を学ぶ。カリキュラム上は、整数のかけ算の計算の仕方を体系化することが求められている。そのためには、第 2 学年での「かけ算」、第 3 学年の「かけ算 (1) (2)」を関連づけて捉えさせ、統合的・発展的に問題発見・解決することを通して、整数のかけ算を体系化することを目指す。

なぜ、「かけ算 (1)」「かけ算 (2)」の単元を選定したのか。それは、かけ算 (1) において What if Not 方略を援用した問題設定の足場づくりを真実観をもって経験すれば、それをかけ算 (2) の問題設定に活用できると考えたからである。

そこで、かけられる数が未知数 (□) で示された非定型なかけ算の事象に直面させ、What if Not 方略を援用して属性 (かけられる数) を取り出し、それを統合的･発展的な観点から捉えさせ、「5×3 のようなかけ算はできるけれど、もし、かけられる数が 2 位数や 3 位数になったらどのように計算すればいいのかな」という問いを引きだして、自ら問題設定する学び方を実感的、経験知として学ばせるようにする。つぎに、この経験を生かして、かけ算 (2) では、今度はかける数を未知数にして非定型なかけ算の事象に直面させ、同様に、What if Not 方略を援用しながら統合的・発展的に捉えて、かける数が 2 位数になったらどのように計算すればよいのかなという「問い」を生成して, 子ども自らが問題設定するように授業構想した。

(2) 不定型な算数事象を初めて統合的・発展的に捉える足場づくり—被乗数を 2・3 位数へ拡張する問題設定の場—

① What if Not 方略を援用した属性の取り出す

第 3 学年、1 学期において、第 2 学年の 1 位数×1 位数から 2･3 位数×1 位数へとかけられる数の範囲を拡張して学ぶ場面に直面する。算数の事象として「あめの袋が 3 袋あります。あめは全部で何個ですか」という不慣れな, 非定型事象に直面させる。不慣れで, 非定型な算数の事象の重要な要件は、被乗数に当たる 1 袋のあめの数を未知数 (□) にすることだと考えた。その意図は、1 袋のあめの数を□にすることで、What if Not 方略を援用しやすくなり、「もし, □の数が既習の 5 個ではなく、23 個、123 個だったら」と, 子ども自身が取り出すことにある。

・1 袋のあめの数は同じか

・「1 袋のあめの数は何個ずつか
・「もし，□の数が 5 個だと，5 の 3 つ分で，5×3」
・「もし、□に当てはまる数が 23 個、123 個だったら、・・・

と、属性を次々に取り出してくる。

意図的に 1 袋のあめの数を示さない，不慣れで，非定型な算数の事象に直面すると、戸惑いを見せながらも、1 袋のあめの数が分からないと答えが出せないと訴えてくる。その場面を捉えて，1 袋のあめは□個と知らせ、□に当てはまる数を What if Not 方略を援用して、拡張的に考えさせていく。初めは「もし、5 個だったら、」「もし、10 個だったら」と流暢に考えて 5×3，10×3 の計算問題を設定する。これらは、既に学習済みであるが、創造的数学力を生成する基礎である。それは、「もし、□が 10 を超える 23 個だったら」「もし、123 個だったら」と考え、「どのように計算になるのかな」「23×3 や 123× 3 はどのように計算すればよいのかな」という「問い」を生み出すからである。この問いこそ、未だ直面していない見慣れないかけ算の問題の属性の発見である。

② 統合･発展の観点から属性を検討する

What if Not 方略を援用して算数の事象から取り出した属性は、既習事項の属性と未習事項の属性が混在する。そのため、統合・発展の観点から関連付け、未習の属性を統合の観点から既習の属性と発展的につながるかどうかを検討する。未習のかけられる数が 2･3 位数の属性が既習の 1 位数の属性と、統合の観点から系統的･発展的に連鎖してこれから学ぶ算数の問題として「2･3 位数×1 位数の計算はどのようにすればいいのかな」を生み出していく。

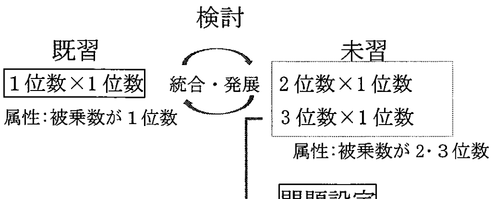

図 4　属性を統合・発展の観点から関連づけ、連鎖する問題設定

5　足場づくりを活用する乗数が 2 位数のかけ算の問題設定

（1）単元を貫く問題設定

既習のかけ算（1）の不定型な事象場面を What if Not 方略を援用しながら統合・発展的に捉えて問題設定した学び方を実感的に学んだ経験を生かして、かける 2 位数のかけ算の「問題設定」を子ども自らにアプローチさせる。不慣れな，非定型の算数の事象としては、「1 個 23 円のみかんを何個か買いました。何円払えばよいですか」という事象を提示する。不慣れで、非定型な事象の属性は、買うみかんの数（□）である。属性の□をオープンにすることで、2，3 位数×□の□に当てはまる数（属性）を流暢に創発しやすくする。

不慣れで、非定型なかけ算の事象に直面した子どもは，次のような「問い」をもち、かけ算（1）の時よりも，意欲的にチャレンジしてくる。

・かけ算の問題かな
・1 個 23 円のミカンを何個買ったのかな
・買ったミカンの個数は分からないけど□個とすると，23×□の式になる

すると、この機会を捉えて子どもは自然に、What if Not 方略を援用しながら、いろいろな属性を取り出してくる。「もし、□に当てはまる数が 3 個の場合は 23×3 で，答えは 69」「もし、10 個のときは 23×10 で、答えは 230」と既習のかけ算問題を見付けてすぐに解決する。ところが、かける数が 30，32 のような未知の数を属性として取り出すと、「□に当てはまる数がもし、30 個の場合は、23×30」「もし、32 個の場合は，23×32」と式に表しても、既習の 23×3 と違って、かける数が 30 や 32 のような乗数が 2 位数になる計算に出会ったことがないので戸惑う。その場面では、既有経験を生かして統合・発展の観点から、未習の属性である「かける 2 位数」と既習の属性である「かける 1 位数」を関連づけ、連鎖するように検討させる。こうしたアプローチを通して、かける 2 位数の計算について未知であることを強く意識し、どのように計算すればよいのか「問い」をもつ。この問いこそが、2，3 位数×1 位数の場面を統合・発展的に捉えて、かける 2 位数の大きな問題設定をしたことになる。単元を貫く大きな問題設定とは、かける数が 30 及び 32 のような 23×30，23×32 の計算やそれに連鎖していく筆算を視座に入れて，かける 2 位数の計算の仕方

を一般化、体系化を図る本質的な問題設定をすることを意図している。一般に、筆算の仕方に目を奪われる授業が多いが、その前段階の筆算につながる「かける 30」「かける 32」についての本質的な計算の仕組みを捉えさせることの方が数学的創造力を育成する上では重要となる。

（2） 単元を貫く問題設定後の展開

問題設定後は、Polya（1951）の「問題理解」「計画」「実行」「振り返り」の過程に即して，「まず，23×30 の計算、次に 23×32，最後にかける 2 桁の筆算の計算」という学びの計画を子ども自身に立てさせる。そして，計画の各段階の問題について、自分の数学力を総動員し多角的に考えて問題解決させ，それらを統合的・発展的に既習の計算と連鎖するように一般化、体系化し続けていくようにする。

以下、かける 2 桁の基本計算：23×30 の計算を，既習の 23×3 に統合の観点から発展的に帰着して問題解決する様相を述べる。

① かける３０を多面的に捉えて、多角的に考える

2 位数をかける計算の一般化・体系化は、「かける何十」の場合から始まる。絶えず、統合・発展の観点から既習のかけ算と関連付けて問題解決し、振り返らせる必要がある。

23×30 の計算では、かける 30 を多面的に捉えて、拡散思考させ、見いだした数学的アイデアを体系化する数理の観点である明瞭性、簡潔性、合理性の観点から精緻に検討し，既習の 23×3 とつないで発展的、体系的に連鎖させることが重要である。子どもの多面的思考を促進するため、本事例研究ではアレー図を用いるようにした（○は 1 個 23 円のみかん）。すると、既習の 23×3 と 23×30 の違いを見比べ、かける 30 を既習のかけ算が活用できるように工夫すればよいという見通しをもち、数学的なアイデアをいろいろ創発する。30 を「10 の 3 倍」「3 の 10 倍」「5 の 6 倍」「6 の 5 倍」とみて、次のような数学的なアイデア見いだした。

考え１　３０を「3 の 10 倍」と考えて

○○○○○○○○○○
○○○○○○○○○○
○○○○○○○○○○

23×3＝69
69×10＝690

考え２　３０を「10 の３倍」と考えて

○○○○○○○○○○
○○○○○○○○○○
○○○○○○○○○○

23×10＝230
230×3＝690

考え３　30 を「5×6」とみて

○○○○○　○○○○○
○○○○○　○○○○○
○○○○○　○○○○○

23×5＝115
115×6＝690

$$\begin{array}{r} 115 \\ \times\ \ 6 \\ \hline 690 \end{array}$$

考え４　３０を「6×5」とみて

○○○○○○○○○○
○○○○○○○○○○
○○○○○○○○○○

23×6＝138
138×5＝690

$$\begin{array}{r} 138 \\ \times\ \ 5 \\ \hline 690 \end{array}$$

トーランス（1966）[3]は、創造的数学力の要素として，流暢性、柔軟性、独創性であると示唆する。この考えを援用すれば、1 人で考え 1，2 など多角的な考えを見いだせば流暢性に優れている。考え 1 と 3 など着想の異なる考えを 2 つ以上見いだせば柔軟性が優れている。考え 3 は、体系化にはつながらないユニークな考えではあるが、独創性のある創造的数学力を見取ることができる。自力解決では多角的に考えることを発達させることが望ましい数学的活動であるが、かけ算の計算の原理を体系化するためには、振り返りにおいて、数理を創る観点（「明瞭性」「簡潔性」「合理性（一般性）」の肝転移照らし合わせて検討する活動が不可欠である。

②　振り返って検討する

多面的な考えを引き出し、拡散思考したままにしたのでは、数理的な学びを発達させる方向性が定まらない。中島（2015）[2]は、振り返って、統合の観点から既習事項と結びつけて一般化、体系化を図ることが、算数を創造する上で重要であると示唆する。数理の本質に連鎖する考えかどうかは，明瞭性（分かりやすい）、簡潔性（簡単、速い）、合理性（他の数値でも使える）の観点を子ども自身が取り出して検討する、省察に向かう学びの経験を積み上げるようにする。

明瞭性の観点からでは、全ての考えが既習事項を用いて「分かりやすい」。簡潔性の観点からは、考え1，考え2が「簡単で、速い」。考え2は、明瞭性、簡潔性に、加えて、小さい数の計算でよりできる合理性があり、しかも、既習の2位数×1位数を上手に使ったアイデアであることを協働的対話によって共有する。

（3） 単元を貫く問題から次時の問題を発展的に設定する

整数のかけ算の原理は、第3学年で完成させることになっている。整数のかけ算を体系的に学ばせるようにするには、単元の冒頭では、算数の事象を統合的・発展的に捉えてできるだけ大きな問題を設定することが大切であると考えたている。それは、単元の冒頭で単元を貫くような問題を設定しておけば、その大きな問題を基に、算数の目指すべき数理に向かって、次々と発展的に探究すべき問題を発見していくからである。具体的には、23×30の計算の仕方を問題解決し、これを振り返る中では、かける数が30ではなく、32に拡張される場合を見据えて新たな問題である23×32の計算を連鎖的に問題設定することが期待できる。その次に、筆算への問題を設定することに連鎖的に発展させていく。

5 算数の事象から問題設定する授業構成の考察と今後の課題

変革の時代においても、算数教育において、指導の基本原理は問題解決型であることは確かである。改善の余地は問題解決型の質的転換にある。平林（1990）は、問題解決以上に問題設定が重要であるが、その研究の着手は進んでいないと指摘する。決まりきった問題を与え、お決まりの方略で問題解決させても、現状を是認することはできても、絶えず変化し続ける状況に対応し、変化を生み出す力を発達させることができないと危機感を示している。子ども自ら問題を「芋づる式」に引き出す「What if Not」方略を推奨している。しかしながら、算数の事象に援用方法が示されているわけではない。「数学の事象について統合的・発展的に捉えて新たな問題を設定し（中央教育審議会答申 2017)」についても、数理の体系化を目指す問題設定が重要な要件であることは読みとれるが、アプローチの方法が具体的に思い浮かばなかった。理由は、「統合的・発展的に捉える」という意味が統合の観点から発展的に複数の事柄を1つにまとめることであるが、まだ算数の舞台に登場させていない未知の事柄を、どうやって既習の算数と、どのように統合の観点で発展的につなげというのか解読不能であった。

閃いたのは、お決まりの「算数の事象」ではなく「複雑で、不慣れな、非定型の算数の事象」にする手法である。従前の算数教育でも、条件不足の問題を提示し、非定型な問題に直面させている。見方を変えれば、条件不足の問題は、「複雑で、不慣れな、非定型の算数の事象」である。この非定型な算数の事象、

「1個23円のみかんを□個買いました。
何円払えばよいですか」

に直面させ、「What if Not」方略を援用して、□の属性を芋づる式に取り出させ、新規の属性を既習の属性と関連づけて整理統合することが、「算数の事象を統合・発展の観点から捉える」ことだと考えた。具体的には、「What if Not」方略を援用すれば、子どもは様々な属性を取り出し、都合よく期待する数学的な属性の取り出すとは限らない出来事も起こりうる。そこで、取り座した属性は、未習と既習に分類整理し、本質的な未習の属性と、既習の属性を統合の観点から発展的に関連づけて検討し、その過程で次第に系統的に連鎖の糸でつないで捉えさせて、かける2位数のかけ算の問題を自ら設定できるようにした。

算数の事象を統合的・発展的に捉えて問題設定するアプローチ研究は緒に就いたばかりである。第3学年は、被乗数を拡張するかけ算(1)と乗数を拡張するかけ算（2）がスパイラルに同学年で学習指導されるカリキュラムになっているので、かけ算（1）で「統合的・発展的に捉えて問題設定する」という学び方を経験させておけば、これを活用してかけ算（2）の乗数が 2 位数になる場面で、この学び方を生かして、子ども自らが、能動的に「統合的・発展的に捉えて問題設定する力」を発達させることができるという示唆を得た。

今後の課題としては、整数のかけ算から小数のかけ算へ、小数のかけ算から分数のかけ算へと学びを発達させる場合、「統合的・発展的に捉えて問題設定する」には、本事例研究と違った様相があり、どんな工夫が更に必要なのかを探究していき、数理の本質を目指した本当の問題を子ども自身に発見・設定させ、絶えず変化し続ける時代に対応する質の高い問題解決型の授業改革・改善を探究し続けたいと考える。

<引用文献・参考文献>

1）文部科学省、「（２）算数科の目標の改善、③算数科の学びの過程としての数学的活動の充実」、中央教育審議会答申、2017.

2）中島健三、「算数・数学教育と数学的な考え方、第２章、数学的な考え方と創造的な学習の条件、第３章、統合的発展的な考察の意義と指導の要点」、東洋館出版、2015.

3）OECD 教育研究革新センター、「メタ認知の教育学、生きる力を育む創造的数学力、第１章　革新型社会における数学教育と問題解決能力、第１節複雑で見慣れない非定型問題（CUN）を説くこと、真正の課題」、明石書店、2015.

4）S.I.ブラウン/M.I.ワルター、平林一榮完訳、「いかにして問題をつくるか、第３章,What　if　Not 問題設定の方略、第４章 What　if　Not 方略の実際」、東洋館出版社、1990.

5）垣内賢信訳、G．ポリア「いかにして問題を解くか、分解と結合、未知のものをよくみよ」、丸善株式会社、1954.

6）ユーリア・エンゲストローム、「拡張による学び、発達における水平的なものと垂直的なもの」、新曜社、2010.

7）Rogers,c.r.1967.Freedom to learn . Columbus,OH:Merrill.

8）Knowles 、 M.(1975) .self-directed learning,A guide for learner and teachers,Englewood liffs、NJ:Printice-Hall.