岡山大学算数・数学教育学会誌
『パピルス』第27号（2020年）47頁～56頁

「統合的・発展的に考える」に関する考察

黒﨑東洋郎＊

要　約

変動の時代に対応する持続可能な資質・能力を育成するため、算数・数学科では、「数学的に考える」が資質・能力として告知されている。数学的に考える力として、「統合的・発展的に考える」が推奨されている。統合的・発展的思考は、数学教育の現代化のときに叫ばれが、具体化、アプローチの仕方が究明できないまま終止符をうった経緯がある。本研究では、再度強調された「統合的・発展的に考える」を見直し、真の算数の学びを創造するための目的や意義を分析・検討する。これを踏まえて、「統合的・発展的に考える力」を育成するため、生活事象や数学事象にどんな統合的・発展的見方・考え方を働かせればよいか、具体的なアプローチを探究する。

Key Words　統合的・発展的な考察、数学化、行為の中の省察、学びの体系化

I　はじめに

未来予測の困難な変動の時代の中にあって、変化に主体的に対応できる資質・能力の育成が叫ばれている。算数教育では、従前から「数学的な考え方」を育成すべき資質・能力とみなし、その育成の在り方を探究してきた。それが、「数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、『数学的に考える』」に改訂された（小学校学習指導要領解説、算数編、2019告示）。昭和33年以降、長い間探究されてきた「数学的思考」の枠組み・位置付けが変動の時代に対応するために改訂された。

「数学的な見方・考え方」は事象を数学的活動や数学的に考えるために働かせる有用な道具として位置付け、算数科固有な学習活動を「数学的活動」とし、算数・数学科の資質・能力を「数学的に考える」とし、数学的に考える力を発達させることを目指す方向性が示された。

変動の時代に「数学的に考える」という算数教育の実現は未知の道である。パスカルが「人間は考える葦である」と人間の特性として「考える」を強調している。「考える力」の育成は、各教科共通の目指す方向性である。算数科において特徴的な「考える力」として位置付けられたものが「数学的に考える」ということになる。

算数科における「数学的に考える力」とは何か。この問いに対して、魅力的な「数学的な考え方」にあるべき姿を求めて半世紀にわたって探究し続けてきたけれど、具体化や思考法育成のアプローチの在り方等が究明できなかった。そのため、今回の学習指導要領の改訂において、算数・数学科で育成すべき資質・能力を「数学的な考え方」から「数学的に考える」という平易な言葉で告知された。数学的思考を「数学的に考える」に置き換えて目標設定されたものの、具体的にどういうことなのか、アプローチの方策はいかにあるべきかなど究明すべき課題は多く、探究の緒に付いたばかりである。

変動する時代を見据えて Rogers[1)]（1967）は、必要な資質・能力について次のような示唆をしている。

> 知識を与えることは変動のない環境において意味をなす。・・（中略）・・現代人について言える真実が1つあるとすれば、絶えず変化し続ける環境の中に生きているということである。・・（中略）・・、人間はこれまでと全く異なった状況に直面している。人間が生き延びるとすれば、教育の目的は、変化と学びを促進することにある。学び方を学び、適応し、変化し続ける方法を学び、安定した知識などないことを知り、知識を求め続けることが基盤になる。

＊　岡山大学名誉教授

今の社会の変動は、1960年代と比べて変動の内容、質、スピードとも比べられないものがある。Rogersは、変動の時代の学びの本質は、学校現場で教え込まれている現状を鑑み、数量や図形の静的な知識や計算技能を習得することではなく、社会の変化に伴って生じる高度化し、多様化する真の課題に適応できるような「数学的に考える力」を発達させることの大切さを提言している。

Haan(1975)は課題発見・解決に直面する本質的な態度ついて、「課題を解決する態度として、知っている必要はない。これからしなければならないことをみつけることにある。」と言っている。課題解決する前に、本当に考えるべき課題なのかを多面的、分析的に検討し、多様な見方・考え方を働かせて数学的に考え、その数学的に考えた過程を省察するなど、「数学的に考えなければならないことを見つける」ことの大切さを示唆している。

２１世紀を展望した我が国の教育の在り方について、「自分で課題を見付け、自ら学び自ら考え、主体的に行動し、よりよく問題解決する、・・」と「課題発見力」が強調されている（中央教育審議会、第1次答申、1996)。しかしながら、課題発見は軽視され、問題解決に軸足を置き、教科書の定型問題を指示されたストラテジーで画一的に解法する学習指導に終始している。

こうした現状に対してOECD教育研究革新センター（2015）は革新社会に相応しい数学の問題は「複雑で、見慣れない、非定型型問題（Complex, Unfamiliar、and、Non-Routine、CUN）である」[2)]と提言している。変動の時代に対応するためには、画一的な問題解決に終始するのではなく、子どもが算数の学びにおいて「本当に考える」真正の課題を強く意識させ、変動の時代に相応しい学習指導への転換を図るべきという指摘に同感である。

Ⅱ　問題の所在

算数・数学科で育成すべき資質・能力である「数学的に考える」ことに関して、「統合的・発展的に考える」が強調されている（中央教育審議会答申、2017）[3)]。算数の学びの過程として数学的活動の充実が不可欠であるとし、この過程の中において「事象を数理的に捉え、数学の問題を見いだし、問題を自立的、協働的に解決し、解決過程を振り返って概念を形成したり体系化したりする」ということを求めている。これについて算数・数学科の問題発見・解決の過程には、「日常生活や社会事象を数学化するケース」と「数学の事象を数学化するケース」の2つの場合があるとされている。1つは、抽象的な数量や図形の概念や原理を初めて学ぶには、日常事象を数理的に捉えて数学化する場合である。このアプローチは従前から重視され、探究されてきた経緯がある。もう1つは、「数学の事象を数学化する」という場合であるが、そのアプローチの在り方の探究は、余り進んでいない。

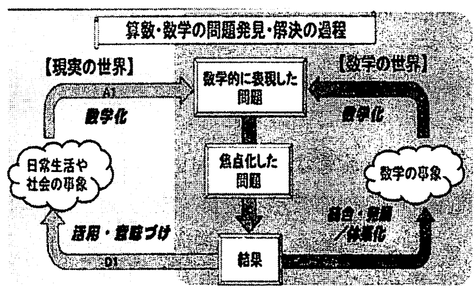


図1　算数の問題発見・解決過程の型

「数学的事象の数学化する」過程については、下記のように解説されている（小学校学習指導要領解説、算数編、平成29年）。

- 数学の事象について統合的・発展的に捉えて新たな問題を設定し、数学的に処理し、問題を解決し、解決過程を振り返って概念を形成したり、体系化したりするという問題解決の過程

注目すべき視座は、問題設定や課題設定の段階から、「統合的・発展的に考える」ことを推奨していることである。授業の入り口の段階で、日常事象を数理的に捉えて数学化する場合、統合的・発展的な考察は、自分なりに見出した考えを振り返って、思考過程やアイデアを批判的、協働的に検討し、新たに生成した数量や図形の概念や原理を、既習のものと関連付ける原動力が「統合的・発展的に考える」で

ある。これは、Polya (1975) が HOW to Solve It でいうところの「問題を理解する」「計画を立てる」「計画を実行する」「振り返ってみる」の過程の最終段階にあたる「振り返ってみる」という検討段階において「統合的に考える」が位置付いている。

これに対して、「数学的事象の数学化する」という場合、

「数学の事象について統合的・発展的に捉えて新たな問題を設定し、・・・」

と、学習の入口の段階から統合的・発展的な考えを働かせて問題・課題発見することをあるべき姿として求めている。小学校学習指導要領解説、算数編には「２つの過程が相互に関わり合って展開する」と解説しているけれども、展開法は具体的に示されていない。新しく学んだ数量や図形の概念や原理を、既習のものと統合の観点で関連付けることは以前から大切であると考えられてきた。初めて出会う未習の「数学の事象」について初めから統合の観点で、発展的に考えることができるかどうかは未解明である。数学事象を統合的・発展的な見方・考え方を働かせて、問題設定や課題設定してアプローチする算数の学びは、これから究明すべき課題であって、学習指導要領の改訂で提言されたからといっても、実現すべき在り方の究明はこれからである。

Ⅲ　「統合的・発展的に考察」

1　「統合的・発展的に考察」重視の経緯

統合的、発展的な考察は数学教育の現代化のとき数学的な考え方の一層の充実を目指して総括目標に示された。

日常事象を数理的に捉え、筋道を立てて考え、統合的、発展的に考察し、処理する能力と態度を育てる

＊出典　小学校学習指導要領、第２章、第３節、算数、第１　目標、昭和 43 年告示

昭和 33 年告示の小学校学習指導要領において「数学的な考え方」の育成方針が示されて以来、「数学的な考え方」とは何かを具体化することが喫緊の課題として究明されてきた。中島（当時、文部省、初等中等教育局、初等教育課教科調査官（算数）、2015）は、「数学的な考え方」を具体化するとともに、数学教育の現代化の視点（集合の考え）をシンクロさせ、「統合的、発展的な考察」を総括目標に示したと述べている。その意図は、数学教育の現代化のシンボルである初歩的な「集合の知識」を習得するよりも「集合の考えによって数学的に考える」を重視したものであるという。当時は、指導内容の精選が叫ばれ、統合の考えは、精選に不可欠なファクターであった。「統合的、発展的に考察」を総括目標に示すことで、子ども自身が数学的な考え方を通してミニマムエッセンシャルな数量や図形の概念や原理を形成することを目指していた。

当時の小学校算数担当の教員には、子どもだからということで、論理的に考えさせることや振り返って既習の概念と関連付けて統合的・発展的に考察させたりすることを避ける傾向があった。この傾向に歯止めをかけ、子どもの学習活動を創造的・数学的なものにするためにも、「統合的、発展的に考察する」を示して「数学的な考え方」の一層の充実を図ろうとした。

しかしながら、「統合的、発展的に考察する」ことにより算数の学びを創造的なものにすると言っても、授業の中でどのように数学的に考えさせればよいのか、その具体的なアプローチが分からないため、結果的には洗い流されてしまい、有効な手段となり得なかった。

Day (1995) は教師教育の観点から「外的要因から実施される改革・改善は必ずしも意図した授業改革・改善をもたらすとは限らない」と指摘する。教師が授業実践研究を踏まえて、能動的に授業改革・改善を発動する強い意識をもつことの脆弱さを示唆している。数学教育を創造的活動に改革・改善するためには、単に言葉だけで「統合的、発展的な考察」が重要であるという方針をトップダウンで示しても、スタンスに立つだけのスローガン倒れになりやすい。Biggs & Tang (2011) もスタイルより、如何にアプローチするかが大切であるという。算数教育を担当する教師は「統合的、

発展的な考察」を実現すべく数量や図形の概念を創造的に構成する過程において数学的な考え方を働かせて、「統合的、発展的な考察するあるべき姿」を描き、そのアプローチの仕方を試行錯誤しながらも探究し続けることが肝要と考える。

2　統合的・発展的な考察

(1)「統合的・発展的な考察」の再重視化

変動の時代を切り拓く資質・能力の育成を目指す新しい算数教育では、削除されていた「統合的・発展的な考察」を下記の通り再掲している。

第3節　第1　目標

(2) 日常事象を数理的に捉え見通しをもち筋道を立てて考察する力、基礎的・基本的な数量や図形の性質などを見出し統合的・発展的に考察する力、数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表したり目的に応じて柔軟に表したりする力を養う。

小学校学習指導要領解説（平成29年告示）算数編

「統合的・発展的な考察」を強調されているが、「統合的・発展的な考察する力」とは何か、どのようなアプローチで育成すればよいのかなど、具体的な究明課題は少なくない。

(2)「統合的・発展的な考察」とは

中島（2015）は、IEA（国際数学調査報告、国立教育研究所、昭和42）からの「数学を限定的に受け止め、発展的に考えようとする態度にかける」という指摘を改善するため、「統合的・発展的な考察」を強調したとする。「統合」という言葉の意味を広く捉えて、3つの場合があると示唆する。

---

a　集合による統合
b　拡張による統合
c　補完による統合

「統合」については、小学校学習指導要領解説、算数編（2017、p26）にも、この3つの場合があると記述され、従前（数学教育の現代化）の捉え方が基本的に継承されている。

「a　集合による統合」は、かけ算の意味を理解するということにおいて、整数かけ算と小数のかけ算の意味を個々別々な概念と捉えてしまうと、かけ算の概念を体系的に捉えていない。このため、整数のかけ算の意味と小数のかけ算の意味を、集合の考えを基にして、「倍」の見方・考え方を働かせて結び付け、統合的・発展的の観点からまとめ上げて、かけ算の概念として同じ集合体系にあるものとして捉えさせる事例がこれにあたる。

「b　拡張による統合」は、a×bというかけ算の意味を整数の場合のみでかけ算の概念形成は終わりと捉えることなく、その意味を拡張することを推奨する。すなわち、乗数bを整数の場合から小数や分数の場合に数の範囲を拡張して統合的・発展的にかけ算の意味や形式を系統的に体系化して構造化する事例がこれに該当する。

「c　補完による統合」は、数量や図形の概念、性質、原理を体系的に完全なものにするために、補完する事項を取り上げる場合である。例えば、かけ算九九の構成では、一番最後に1の段の九九を取り上げてかけ算九九を完成させる場合がこれに当たる。ところが、上記の通り、「統合」の型には3つの場合があると示されているものの、明確に分類・整理できるものではないと考える。例えば、かけ算の概念を「集合の考え」によれば、乗法の意味は、乗数がそれぞれ整数、小数、分数の場合も統合的に同じカテゴリーのかけ算の概念として捉えることができる。他方、指導の系統に従ってかけ算の意味を、整数倍から小数倍、分数倍のかけ算に拡張してかけ算の意味を捉えると「拡張による統合」とも考えることができるのである。さらに、整数の場合だけで「かけ算の概念の形成」が完成・完結したわけではない。小数や分数の場合のかけ算の意味指導を取り上げる、これらの場合もかけ算の範疇に含まれることを捉えさせる。この指導は、かけ算の概念の「補完による統合」と考えられる。

よって、3つの型は教師の教材観・指導観の違い等で「統合」の捉え方が異なるものと考えるが、密接に関連しており、本質は変わらないと思う。

3「統合的・発展的な考察」の目的

（1）算数の学びを系統的に体系化するため

統合的・発展的に考察することの大切さは、算数科固有のことではない。どの教科でも、何を発展して考え、創生させた概念やアイデア等をどんな事柄と結び付けて統合的に考えるのかが大事である。とりわけ、他のどの教科よりも指導の系統性を有している算数科にあっては大切である。既習の学びを生かして新しい概念を形成すれば、目標達成した感をもつ教員が少なくない傾向がある。けれども、これで概念が形成されたと思ってはならない。脈絡のない概念を個々ばらばらに形成しても、次の学習へのつながりが見えず、新旧の概念が体系的に融合された確かな概念形成が期待できないと考える。

本当の意味で深い算数の学びを創造的に生成するには、逐次、統合的・発展的な観点から下記の図２のように見出した新しい数量や図形の概念、原理を既習の概念や原理と絶えず関連付けて結び付け、算数の文脈の中に貫くコアとなる共通点を見出し、同類・同相の概念、原理として系統的・体系化していくことが大切である。

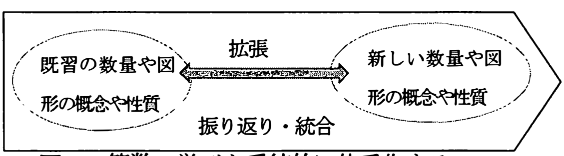


図２　算数の学びを系統的に体系化する

統合的・発展的な考察力は、例えば、かけ算の概念や原理を体系化するための重要な原動力である。整数の場合と同様、小数や分数の場合についても同じかけ算の概念として統合・発展の観点から捉えさせることがかけ算の概念を体系化するためには不可欠である。新しい算数教育では、「統合的・発展的な考察」を働かせて体系的な概念形成や原理の習得を目指すことが、一貫性のある算数・数学の学びにしようとする態度を培うものと考える。

（2）主体的な算数の学びを創造するため

数量や図形の概念や原理は教え込まなくても、教員の適切な手助けがあれば、子ども自らが学び、考えてこれらの概念や原理を創造的に学ぶ力を本来もっている。例えば、乗法の意味や仕方を拡張して学ぶ第３学年の（２位数）×（２位数）の仕方を学ぶ場面を考える。かけ算の意味の拡張は、乗数が１位数から２位数になっただけなので、容易に演算決定できる。乗数が１位数の場合を発展的に２位数に拡張し、統合し、計算の意味を体系化する学び方を学ばせておくことがこれに当たる。むしろ、本質的課題は、25×30 の計算の仕方の方にある。この課題については、教え込まなくても、自ら学び、自ら考えて、本質的な計算原理を見出す潜在的な数学力を子どもはもっている。既習の 25×3 と見比べ、乗数の「30」に着目してどのような数と見るかその違いによって多様な計算原理の仕方・アイデアを創出する。

① ３０を5×6 とみる
② ３０を「10 の３つ分」とみる
③ ３０を3 の 10 倍とみる

① ３０を5×6 とみる場合

この数学的な見方・考え方を働かせれば、下記の計算のしかたを創出できる。

２５×３０＝２５×（５×６）
＝（２５×５）×６
＝１２５×6
＝７５０

＊25×5、125×6 は、既習の筆算を活用して計算すればよい。

② ３０を「10 の３つ分」とみる場合

この数構成の見方・考え方を働かせれば、つぎの計算の仕方を見付けることができる。

２５×３０＝２５×（１０×3）
＝（２５×１０）×３
＝２５０×３
＝７５０

③ ３０を3 の 10 倍とみる場合

「10 倍した数」という見方は、「10 倍すれば、数の位が１つ上がる」ということを知っているので、以下の計算の仕方を見出すことができる。

２５×３０＝２５×（3×１０）
＝（２５×3）×１０
＝７５×１０
＝７５０

中島（2015、ｐ40）は、新しい内容を創造的に学習する課題では、統合の観点から発展的に考察することが望ましく、「統合」の他に「簡潔」「明瞭」などの観点も含むと言う。前ページの①、②、③は、既習事項を生かして創造的に見出した多様な考えなので、全てよいとは限らないことへの警告である。これらの多様な考えを振り返り、統合の観点からかけ算の仕方を見出したプロセスやアイデアを、「簡潔」「明瞭」「一般化」の観点から合理的に筋道を立てて省察することが不可欠な活動である。そうすれば、２５×３０の計算の仕方を自ら多角的な数理をつくる見方・考え方（「簡潔」「明瞭」「一般化」）を働かせて検討し、統合の観点から（２，３位数）×（１位数）の原理と結び付けて本質的な考えを形成する。そうすれば、本時の２５×３０の計算の仕方の学びに続く次の２５×３２の計算の仕方を学ぶ場面では、統合的・発展的の観点から「３２を、３０と２と数構成的に捉え、この見方を生かして２５×（３０＋２）＝２５×３０＋２５×３と計算するアイデアを「自ら学び、考える」ことができる。

（３）数学的な省察力をもつため

算数教育には転移の問題が存在すると指摘されている（Scheenfeld、1987）。算数の学びを発展的に次の学習に活用できないという。この問題点を解消するため、フロイデンタール（1969）は、解決したら終わりとしないで、振り返って検討する「省察」を強調している。しかも、この「省察」を取り入れた算数の学びでは、転移の問題がほとんど解消されるとまでいっている。

「省察」には、「行為の中の省察」と「問題解決後の省察」がある。数学的に考える活動は、アプローチやプロセスの過程に意味があり、この過程を重視する。このことから、一般的には、算数の学びでは、「行為の中の省察」を重視するのが望ましい。単に、「振り返ってみよう」と発問する授業をよく見かけるが、漠然と振り返らせては意味が無い。省察は、課題解決型に省察することが大切で、何をテーマや課題にして振り返り、どんな概念や学びを協働的な省察活動のプロセスを通して見いだせばよいか、あるべき姿を描くことが大切である。そのためには、まず、課題発見・課題解決の過程、方法、アイデアのどれを振り返らせればよいのかを検討し、省察活動の課題を発見させるようにすることである。省察の出口は、本質的な学びに気付かせることが大切である。本質的な気付きを生成するためには、統合的・発展的の観点から既習の概念と新しく形成した概念を結び付けるが大切である。課題解決型の省察活動を通して算数の学びを体系化するスキルを獲得することが可能となる。この可能性のマスターキーは、振り返り活動の中で、真の数学的な省察力を培う有機的、機能的な原動力こそ「統合的・発展的に考察する力」である。

（４）学びのカリキュラムマネジメント力を育むため

自ら数量や図形の概念などを創り、「統合的・発展的に考察」して、体系的な算数の学びを創造していくためには算数のカリキュラムマネジメント力が不可欠である。算数・数学教育の一貫教育の実現のため、教師にカリキュラムマネジメントが必要といわれている。むしろ、算数を主体的に学ぶ子どもにこそカリキュラムマネジメントが必要である。自ら「統合的・発展的に考察」するには、何を根拠にして発展的に考察し、何と何を統合して概念を体系化すればよいのかが分からなければならない。教師の指示を待たずして、自ら学び、考えるには、統合の観点から発展的に事象を数学化し、対象とする教材の位置付けを明確にする必要がある。前の学年の学習内容と系統的に関連付け、学習の位置付けを明確にする教材分析力が必要であり、その原動力は「カリキュラムマネジメント力」である。位置付けの曖昧なまま、その場しのぎの思い付きで展開したのでは創造的な真の算数の学びに転移しないと考えられる。

Schoenfeld（1987）は算数・数学の転移の問題が存在すると指摘しているが、その原因は「統合的・発展的な考察」を働かせて前後の学習と関連付ける算数のカリキュラム分析が欠如していると考えられる。問題に直面し、何が問題なのか、なぜ、それが問題なのか、それは数学的にアプローチすべき真の課題なのか統合の観点で発展的に考察することで、算数のカリキュラムマネジメント力を育むことができると考える。

4　「統合的・発展的な考察」の指導

（1）問題発見・解決における位置付けと適時性

中央教育審議会答申（2016）は資質・能力を育成する学習過程の役割は大きいといい、「統合的・発展的な考察」に関する問題発見・解決の過程として下記を強調している。

数学の事象について、統合的・発展的に捉えて新たな問題を設定し、数学的に処理し、問題を解決し、解決の過程を振り返って、概念を形成したり体系化したりする過程

数量や図形の概念や原理は、抽象的なので理解することは難しい。このため、初期の問題解決過程は、「日常事象や社会事象を数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題解決し、解決過程を振り返り得られた結果の意味を考察する」が相応しい。この過程では、既習の経験を発展的に考え、その結果を振り返って既習の概念と統合的に結び付けて考えるので、「統合的な考察」は、問題解決後の振り返りに位置付く。ところが、中島(2015)は、「統合的」と「発展的」を個別的、並列的によみとらないで「統合といった観点による発展的考察」が適切であるという。この考えは、「日常事象を数学化する問題発見・解決の過程」を対象にしているとは考えにくいものがある。これは、学習の冒頭で「数学事象を統合的・発展的に捉えて問題発見・解決する過程」を対象にしていると捉える方が自然である。両者の問題解決過程における「統合的・発展的考察」の位置付け及び在り方はかけ離れており、そのギャップは大きいものがある。学習指導要領には、「2つの過程が相互に関わりあって展開する」と示されているが、いつ、どのように関わって展開すべきものか、そのアプローチの探究はこれからである。

（2）「数学事象を統合的・発展的な考察して問題発見・解決する過程」への移行

数学の事象を統合的・発展的に捉えて新たな問題を設定し、問題を解決して振り返り、概念を形成したり体系化したりする授業の進捗状況は悪い。その要因は、事象を発展的に捉えて課題発見することでさえ容易ではないのに、学習の導入時から統合・発展の観点から数理的に事象を捉えることは並大抵のことではないからである。

しかしながら、真の算数の学びにするには、「数学事象を統合・発展的の観点から捉えて新たな問題設定・解決する授業」は避けて通れないことである。学習指導要領では、「日常事象の数学化」と「数学事象の数学化」の2つの過程は相互に関わりあって展開すると示されている。けれども両者の間には大きな溝がある。学びの冒頭から統合的・発展的に数学的事象に関わっていくには、日常事象の数学化から数学事象の数学化に移行する橋渡しが必要である。

＜数学事象を数学化する＞

数学の事象について、統合的・発展的に捉えて新たな問題を設定し、数学的に処理し、問題を解決し、解決の過程を振り返って、概念を形成したり体系化したりする過程

↑ 移行

＜日常事象を数学化する＞

日常事象や社会事象を数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題解決し、解決過程を振り返り得られた結果の意味を考察する過程

数学事象を数学化する学びに移行するためには、数量や図形の知識・技能を習得するだけでは、移行することができない。どのように既習の知識を働かせることが統合的・発展的な考察することなのか経験することが必要である。また、振り返りの中で既習の概念とどんな観点で拡張して見いだした新しい概念と結び付けるのか、具体的に「統合・発展」の観点を働かせる算数の学び方の基礎となる経験をすることが移行するための重要な要因であると考える。整理すると、以下のようなことがらが移行の基礎的な経験となると思われる。

- 日常事象を数学化する問題解決で、問題解決したら終わりとしないで、振り返りの中で、何を基にして発展的に考えたのかを明確に意識する学びの経験。
- 見いだした概念、原理を、既習のものと関連付け、共通することは何かを統合的に考える学びの経験。
- こうした学びの基礎経験を経て、次第に統合的な考察と発展的考察は連動する考える力として意識する。

統合的・発展的に考えることは低学年段階では無理なので、例えば、振り返りの中で、何を拡張したのか、今までの学びとの類似点、相違点を考えて、逐次、数学事象を数学化する過程へステップアップを図ることが大切であると考える。

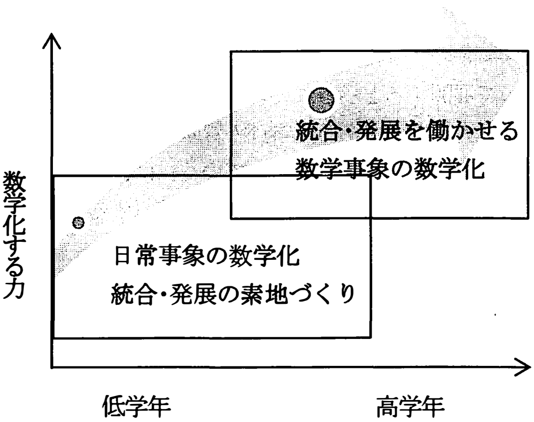


図3　統合・発展的考察による数学化への移行

5　統合的・発展的に捉える課題づくり

数学事象を「統合的・発展的」に捉えて課題発見・解決する授業、冒頭から抽象的な数学事象に関わることはできないという先入観が働き易い。算数の学びを系統的に積み上げてきているので、常に「日常事象」と関連付けゼロベースから始めるというのは、合理的な学びに反する。それゆえ、数学事象を統合的・発展的な観点から考えて数学化していく授業の在り方を探究する必要がある。

（1）　小数の乗法の導入指導の場合

①統合的・発展的な考察の対象

第2学年で乗法の概念を学び、第3学年では(2, 3位数) × (1, 2位数) まで拡張する。第4学年ではかけられる数を小数に拡張し、(小数) × (整数) を学んできている。これを足場にすれば、第5学年においては、乗数の整数を小数に拡張して、統合的・発展的の観点から数学事象を捉えて、「なぜ、小数になってもかけ算なのかを考えよう」という新しい課題を設定し、数学的に考え、既存のかけ算の概念と統合させて体系化する（注意：分数の乗法の場合があるので、完全な体系化ではない）ことができる。乗法の概念で統合・発展する要素は、下記の通りである。

・乗法の概念

a　何の　いくつ分

b　何の　何倍

・演算が用いられる場面の統合・発展

ア　整数の場面

イ　小数の場面

ウ　分数の場面

②統合的・発展的に小数の乗法概念を捉える

拡張による統合というけれど、拡張によって数学事象を統合的・発展的に捉えて、如何に問題設定すればよいのであろうか。具体的なアプローチを生成するのは簡単ではない。問題から発展的に問題をつくる先行研究には、「What　if　Not」(Walter・Brown、1969) がある。変革社会の時代に相応しいCUN問題（複雑で見慣れない不定形問題）とマッチングさせて下記の問題を提示し、統合的・発展的な観点から「もし…でなかったら」と新たな問題をつくるアプローチが考えられる。

1m が 80 円のリボンを売っています。 このリボンを何 m か買います。 代金は何円ですか

何m買ったか分からないと意識させた段階で、買った長さを□mとし、□を用いた複雑で見慣れない不完全問題をつくる。既習の２mの整数の場合から２．３mや０．３mの小数の場合に発展的に拡張させるようにする。

・２mのとき・・・８０×２

・２．３mのとき・・８０×２．３

・０．３mのとき・・８０×０．３

式表示した段階で、演算の根拠を問う。子どもの中には、帰納的に考えて整数の場合と同様、形式不易で小数の場合もかけ算になるというものもいるが、演算決定の根拠はない。そこで、演繹的にかけ算の意味を統合の観点から発展的に考えて課題発見するようにする。

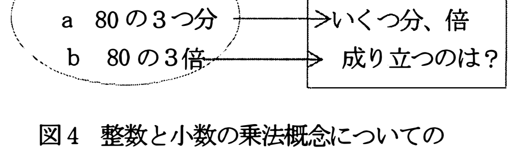
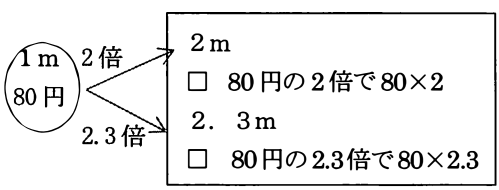


図4　整数と小数の乗法概念についての
統合的・発展的な考察

演繹的推論では、整数の場合の乗法の学びで既に演算の根拠には、「a何の　いくつ分」と「b何の　何倍」を知っているので、これらが小数の場合にも成り立つかどうかを統合的・発展的に考察して探究していかせる。探究過程では、aの根拠では説明し切れず、戸惑いながらも、「なぜ、80×2.3になるわけをはっきりさせよう」という課題発見に至る。なお、「What　if　Not」の発想は、統合的・発展的な考察のきっかけに過ぎない。対象とする小数の乗法に整数の演算決定の「bの意味」が成り立つことであることをこの段階では明確に捉えていないからである。「80円の2.3こ分」とする子どもに「80円の2.3倍」といいますと擦り込む授業をよく見かけるが、「倍概念」に置き換えればよいわけではない。数直線や関係図を用いて、「買った長さが1mの2倍、3倍、2.3倍・・・すれば、代金も1m80円の2倍、3倍、2.3倍・・・になる」と、整数の演算決定の「bの意味（倍概念）」が小数の場合にも成り立つことを演繹的に統合・発展の観点から確かに捉えさせていくアプローチにすることが大切である。



（2）1点を中心に拡大図・縮図を構成する場合

①統合的・発展的な考察の対象

第6学年の拡大図・縮図は、図形の形を変えないで大きくしたり、小さくしたりして構成した図である。構成された図形は、辺の比や角の大きさの要素に着目して静的な見方で捉えているが、拡大したり、縮小したりするプロセスは図形を動的に見ている。辺を伸ばすと辺の長さは変わるけれども、対応する辺の比、角の大きさ、形は変わらない面白さがある。そこで、1点を中心にした拡大図・縮図を対象とした統合的・発展的に考察する場合の要素を考える。次の要素が考えられる。

・図形相互の関係

　a　合同と拡大図・縮図の相互の関係

・三角形から多角形への統合・発展

　a　直角三角形から三角形（特殊、一般）

　b　四角形、五角形

・図形上の1点の位置

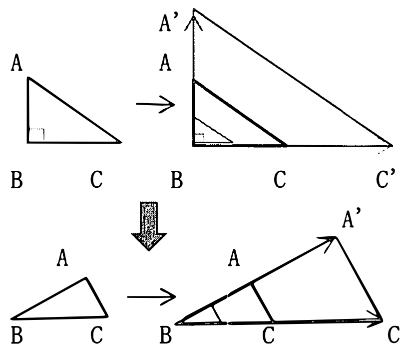
　a　図形の頂点

　b　辺上の1点、図形内の1点

②統合的・発展的に拡大図・縮図を構成

ア　三角形の場合

三角形の拡大図、縮図を構成する場合、直角を挟む2辺を2倍伸ばしたり、1／2縮めたりすればよいので、直角三角形が組みしやすい。その後、統合・発展の観点からどんな三角形でも同じ1点中心に構成できるかどうかを探究させていく。



1つの頂点を挟む2辺を同じ割合で伸ばしたり、縮めたりする流れの中で、伸ばす割合が丁度1のとき止めて、どんなことに気付くかと問えば、「拡大図・縮図の特殊な形が合同である」と容易に気付くことができる。

イ　四角形の場合

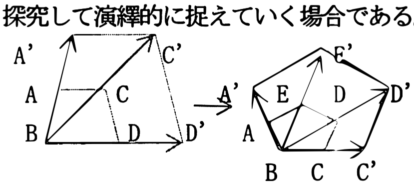
四角形の拡大図・縮図の1点を中心に統合的・発展的に構成するには2つのアプローチが考えられる。

・三角形→四角形→五角形、・・・多角形

・中心の点の位置を変える

　図形の頂点→辺上の1点→図形の内部の点

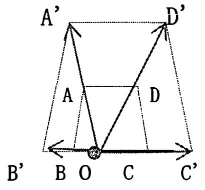
前者は、三角形の構成を統合的・発展的に四角形、五角形の拡大図を構成していき、「1つの頂点から、他の頂点に同じ割合で辺を伸ばす」というきまりが、どの多角形においても成立することを探究して演繹的に捉えていく場合である。



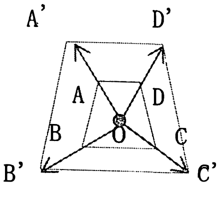
このように1つの頂点を中心に同じ割合で他の頂点に辺を伸ばすと、角の大きさを変えないで合理的に拡大図を構成できるよさを実感的に捉えさせることができると考える。

これに対して、後者は水平思考で柔軟に統合の観点から、辺を伸ばす基点を図形の頂点→辺上の1点→図形の内部の点と変えて、「1つの頂点から、他の頂点に同じ割合で辺を伸ばす」というきまりが成り立つかどうかを探究していく。

<辺上の点を基点にして>



<内部の1点を基点にして>



岡山大学教育学部附属小学校の児童は、統合の観点から発展的に基点を「図形の頂点→辺上の1点→図形の内部の点」と変えて拡大図を構成することに意欲的に挑戦する態度を示し、基点をどこにとっても「1つの頂点から、他の頂点に同じ割合で辺を伸ばす」というきまりが成り立つことを演繹的に捉えていった。

6 結語

算数・数学教育の一貫指導が強調されている。「日常事象の数学化」と「数学事象の数学化」の問題解決の過程が交互に行われていくと学習指導要領には示されているが、「数学の事象について、統合的・発展的に捉えて新たな問題を設定し、数学的に処理し、問題を解決し、解決の過程を振り返って、概念を形成したり体系化したりする」という「数学事象の数学化」の方が目指す本質的な学びである。

しかしながら、「日常事象の数学化」の過程で、どのような指導を経験させれば、「数学事象の数学化」へ移行できるのか、「数学的事象」の冒頭から統合的・発展的な観点から捉えて問題設定、課題設定できるのか、どのように具体化すれば捉えられるようになるのか解明すべき課題は多い。

アクティブラーニングが叫ばれ、「教え込む」ではなく「主体的な学び」へと授業の質的転換が求められている。子どもの真の主体的な学びは、算数の概念を発展させて新しい概念をつくり、既存の概念の枠組みに統合して体系的に概念形成することと考える。「統合的・発展的な考察」を、主体的な算数の学び方を学ぶ原動力と捉え、その具体化に向けた探究が活性化することを期待したい。

<参考文献>

1） Rogers,C,R ((1969)、Freedom to Learn, columbus, H、Merrill.p104 .

2） 第1章 革新型社会における数学教育と問題解決能力、第1節、複雑で見慣れない不定形問題(CUN)を解くこと、pp24～40、「メタ認知の教育学、生きる力を育む創造的数学力」、OECD教育研究革新センター編著、明石書房、2015.

3）中島健三、第3章 統合的発展的な考察の意義と指導の要点、pp125～130、第3章第4節、よい問題の取り上げ方、pp159～1692、「算数・数学教育と数学的な考え方」、東洋館出版社、2015.

4）S.I.ブラウン/M.I.ワルター、平林一榮監訳、第3章What if Not問題設定方略、pp41～79、第4章「What if Not」方略の実際、pp81～140、「いかにして問題をつくるか問題設定の技術」、東洋館出版社、1990.

(令和2年12月19日受理)