岡山大学算数・数学教育学会誌
『パピルス』第 27 号（2020 年） 1 頁～ 10 頁

水汲み問題をめぐって

中川 征樹 *

研究の要約

現行の多くの中学校 1 年生用の教科書の中で取り上げられている「水汲み問題」について, その内容の数学的な豊かさ, 面白さを概観し, 併せて, この問題がもつ教材開発の可能性について考察する.

Key words: 水汲み問題, 最短経路問題, 最大・最小問題, 初等幾何学

1 はじめに

現行の多くの中学校 1 年生用の教科書 (「平面図形の単元) において, 表現の違いはあるものの, 次のような問題が取り上げられているであろう (図 1).

問題 1.1 (水汲み問題 (ヘロンの問題)) 点 A を出発して, 川岸 (直線 ℓ とする) の点 P で水を汲み, 点 B まで向かうとき, 道のり AP + PB を最も短くするには点 P をどこに取ればよいだろうか？

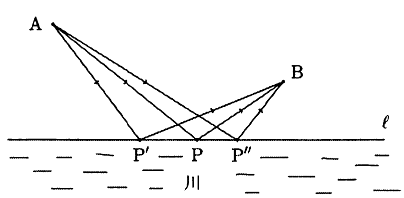

図 1

これは「最短経路問題」の一つであるが, 多くの場合,「ある地点を出発して, 川で水を汲んでから (あるいは, 牛や羊に水を飲ませてから), 別の地点に向かう」というような設定で取り上げられることが多いため, 本稿では「水汲み問題」と呼ぶことにしよう. あるいは, 1 世紀頃に活躍したアレキサンドリアのヘロン*1 が「幾何光学」の観点から, このような問題を考えていたため (次節 §2 参照),「ヘロンの問題」と称されることもある ([1, 第 VII 章], [9, §1.4]).

この「水汲み問題」は多くの教科書で取り上げられている有名な問題であることもあり, 教育学部の学生が「研究授業」や「模擬授業」等でよく取り上げる題材である. しかしながら, 学生による授業や発表を観察してみると, ほとんどの場合が上記の典型的な「水汲み問題 1.1 」と, それを少し応用した「川に橋を架ける問題」(後述する問題 3.1) を取り上げる程度であり, この問題のもつ数学的な「豊かさ」,「面白さ」,「可能性」といったものを学生が十分に認識しているとは言い難いと感じる. 本稿の目的は, この一見すると, 中学 1 年生程度の基本的な初等幾何学の問題と見なされがちな「水汲み問題」が如何に豊かな内容を包摂しており, 現代数学の様々な分野や物理学とも関係している題材であるかを概観し, 併せて, その教材開発の可能性についても考察することである.

2 水汲み問題の解法再考

2.1 水汲み問題 1.1 の解法その 1

本節では, まず「水汲み問題 1.1」の解法を今一度見直してみよう. この問題の解法については以下のものがよく知られているであろう (図 2).

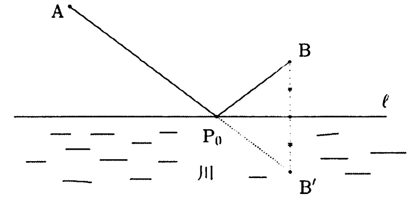

図 2

- 直線 ℓ に関して点 B と線対称な点を B′ とする.

* 岡山大学大学院教育学研究科

*1 Heron of Alexandria. 三角形の「ヘロンの公式」で名高い.

- 線分 AB' と直線 ℓ との交点を P_0 とする．

このとき，点 P_0 が求める点である．その理由 (ℓ 上の点 P であって，$AP + PB$ を最小にする点が P_0 であること) も周知のことであろう (図 3)．

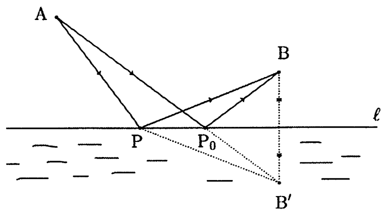

図 3

実際，直線 ℓ 上に点 P_0 とは異なる点 P を取るとき，

$$\begin{aligned} AP + PB &= AP + PB' \\ &= \text{折れ線 } APB' \\ &> \text{線分 } AB' \qquad (2.1) \\ &= AP_0 + P_0B' \\ &= AP_0 + P_0B \end{aligned}$$

が成り立つからである．

この解法において鍵となる事実は，

事実 2.1 (三角不等式) 三角形において，2 辺 (の長さ) の和は残りの 1 辺 (の長さ) より大きい．

ということである (図 4)．

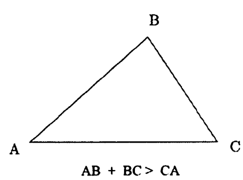

図 4

このことは，

事実 2.2 平面上の 2 点を結ぶ最短経路は直線 (線分) である．

ということからの帰結である．この事実は一見すると「当たり前なこと」，「明らかな事実」であるかのように思われがちであるが，数学的には実に深い内容を含むものと言えよう．いささか本稿の主題から逸れることになるが，一言述べておきたい．そもそも，ここに現れる「平面」や「直線」とは一体どういうものを指すのであろうか？試みに手元の「広辞苑」[5] で「直線」を引いてみよう．それによると，

- 直線 ⋯ まっすぐのすじ．まっすぐな線．

と書いてある．そこで，「まっすぐ」を引いてみると，

- 少しも曲がっていないこと．真一文字．

と書いてある．この「曲がっていない」とはどのような状態を指すのであろうか? あいにく広辞苑には「曲がっている」という言葉は載っておらず，「曲がる」が載っており，

- 曲がる ⋯ まっすぐでなくなる．しないたわむ．ゆがむ．

と書いてある．まとめると，

- 「まっすぐ」とは「曲がっていないこと」であり，「曲がっている」とは「まっすぐでない」

ということになるであろう．これはいわゆる典型的な循環論法である．このように天下の広辞苑に依拠して，「国語的」に「直線」を定義しようと思っても，それはほとんど不可能なことなのである．*[2] では，学校の「数学」の授業で「直線」や「平面」の定義を教わった記憶があるだろうか？これまたほとんどの人がそのような定義を教わったことなどなく，いつの間にか「経験的に知っている」こととして扱われてきたのではないだろうか？ここからは憶測の域を出ないのであるが，我々人類は「空から降り注ぐ光の筋」や「ピンと張った縄」のようなものを「まっすぐ」*[3] と名付け，そうでないものを「曲がっている」などと呼び，そこから経験的に「真っ直ぐな線」，「直線」，「曲がっている線」，「曲線」といった概念を形成していったのではないかと思われる．では一体，数学的には「直線」をどのようなものと定義すればよいのだろうか？数学的には様々な「立場」*[4] があり，それぞれの立場に応じた適切な定義が与えられるべきであ

*2 同様のことは他にも数多くある．例えば，「南」を広辞苑で引くと，「日の出る方に向かって右の方向」と書いてあり，「右」を調べると「南を向いた時，西にあたる方」と書いてある．

*3 もちろん，これは日本人の場合であるが．

*4 例えば，初等幾何学的な立場，解析幾何学的な立場，微分幾何学的な立場などがあるであろう．

ろうが, 例えば「2 点を結ぶ最短経路」のことを「直線」と呼ぶ, とすることも一つの定義であろう.[*5] これを「直線」の定義として採用してみよう. そうすると, 例えば「球面」においては「2 点を結ぶ最短経路」とは, その 2 点を通る「大円」(その 2 点と球の中心を通る平面で, その球を切ったときの切り口の円) の一部分であるので, 「球面」という世界では「大円」が「直線」と呼ばれるべきものであることがわかる (図 5).

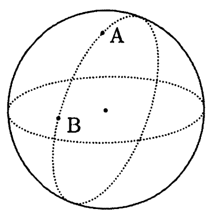

図 5

「大円」という「曲がっているもの」を「直線」と呼ぶことには違和感を感じる人がいるかも知れないが, 「2 点を結ぶ最短経路」のことを「直線」と定義したのであれば, これもまた「直線」なのである. そして, 「球面」上で 3 本の大円で囲まれた図形が「球面」における「三角形」なのであり, これは「お握り」のように膨らんではいるが, れっきとした「三角形」なのである. そして, ガウス[*6]に始まる「曲面論」が教えるところによると, この球面上の三角形については,

- 三角形の内角の和は 180° より大きい.

が成り立つのである. このような考察を経て, 我々人類は次第に「直線」や「曲線」, 「平面」, 「曲面」, より一般の「空間」の概念を獲得していったのである. ことほど左様に, 「直線」一つを取っても, これを正確に定義することは意外に難しいのである.

2.2 水汲み問題 1.1 の解法その 1 の補足

本題へ戻ろう. 上述した解法で求めた点 P_0 は「$AP + PB$ を最小にする点」であったが, 下の図 6 より直ちにわかるように

事実 2.3 点 P_0 は直線 ℓ 上の点であって, $\angle AP_0X = \angle BP_0Y$ を満たすもの.

でもある.

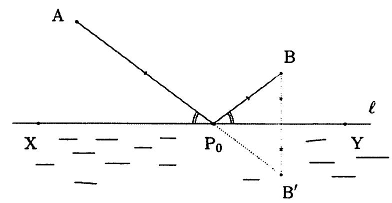

図 6

これはきわめて簡単な事実ではあるが, 上述した典型的な「水汲み問題 1.1」を考える際に, 多くの人が見落としがちな点ではないだろうか？一度, 角度が意識されると, 次のようなことを考えることはきわめて自然なことであろう (図 7).

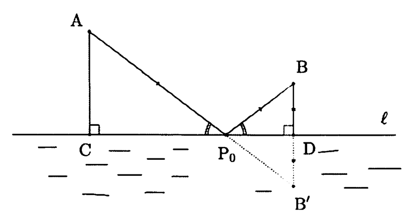

図 7

すなわち, 点 A, B から直線 ℓ に下した垂線の足をそれぞれ C, D とするとき, $\triangle ACP_0 \sim \triangle BDP_0$ である. したがって, 点 P_0 は線分 CD を AC : BD の比に内分する点である. したがって, 例えば次のようにして点 P_0 を求めることもできる (図 8).

- 線分 AD と線分 BC との交点を E とする.
- 点 E から直線 ℓ に下した垂線の足を P_0 とする.

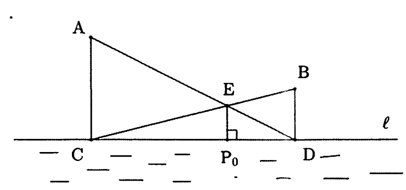

図 8

---

*5 学生に「直線とはどのような図形か？」というような質問をすると, このような答が返ってくることが多い.

*6 Carl Friedrich Gauss, 1777 年 4 月 30 日–1855 年 2 月 23 日.

さらには, 角度に着目することにより,「光の反射」を想起する人もいるのではないだろうか. 実際, 点 A から発した光が "鏡" ℓ で反射して, 点 B に到達するとしよう. このとき, 物理学が教えるところによると,「入射角」と「反射角」は等しい. したがって,「水汲み問題 1.1」は,

問題 2.4　点 A から出た光が "鏡" ℓ で反射して点 B に到達するものとする. このとき, 光はどのような経路をたどるか？

という幾何光学の問題と捉えることもできるであろう. 実際のところ, ヘロンはこのような幾何光学の問題として「水汲み問題 1.1」を考えたようである.

あるいはまた, 次のような「ビリヤードの問題」と考えることもできるであろう (図 9).

問題 2.5 (ビリヤードの問題)　点 A にある球を, 下側の壁 (クッション) で 1 回跳ね返らせて, ポケット (点 B) に入れたい. どの方向に向けて球を突けばよいだろうか？ ただし, 壁に当たったときの球の「入射角」と「反射角」は等しいとする.

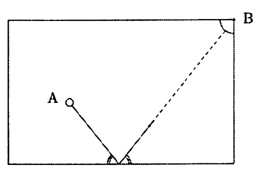

図 9

この問題は数学的には「水汲み問題 1.1」とまったく同じであり, その解法も数学的には §2.1 で述べたものと同じであるが, 実際にビリヤード台の上で球を突くことを考えると,「点 B を折り返した点 B′」はビリヤード台から "はみ出る" ことになり, 具合が悪い. 一方, 図 8 で述べた方法を用いると, ビリヤード台の上で球を突く方向を見定めることができるので, こちらの方が実用的ともいえるだろう. 我々は「水汲み問題 1.1」を「光の反射」や「球の跳ね返り」の問題と捉え直すことにより, これが「光の屈折」の問題とも大いに関係してくることを後の節 (§4) で見るであろう.

2.3　水汲み問題 1.1 の解法その 2

前節で述べた「解法その 1」は初等幾何学を利用したものであった. ところで,「水汲み問題 1.1」は「最大・最小」を扱った問題であり, このような問題を処理する最も強力な武器は微分積分学であろう. そこで, 本節ではいささか「鶏を割くに牛刀を用いる」感があるが, 微分積分学の知識を利用した解析的な解法を考えてみよう. これにより中学校 1 年生相当の初等幾何学の教材である「水汲み問題 1.1」を高等学校 3 年生程度の微分積分学の教材として活用することも可能になると思われる. さらに, このような解析的な解法は §4 で扱う光の屈折の問題を扱う際にきわめて有効である. そこで, 図 10 のように xy 座標系を設定し, $\mathrm{OC} = L$ として, 点 $\mathrm{A}\,(0, a)$, 点 $\mathrm{B}\,(L, b)$, $\mathrm{P}\,(x, 0)$ としよう (ただし, 以下では $a \neq b$ とする).

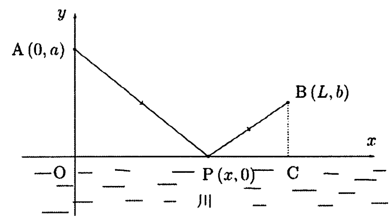

図 10

このとき,

$$\mathrm{AP} + \mathrm{PB} = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(L - x)^2 + b^2} \quad (2.2)$$

である. そこで, (2.2) の右辺を $f(x)$ とおくと,「水汲み問題 1.1」は関数 $f(x)$ の最小値を求める問題となる. 導関数 $f'(x)$ を計算すると,

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{L - x}{\sqrt{(L - x)^2 + b^2}}.$$

さらに, $f''(x)$ を計算すると,

$$f''(x) = \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{b^2}{\{(L - x)^2 + b^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

これより常に $f''(x) > 0$ であるから, $f'(x)$ は単調増加であることがわかる. さて, $f'(x) = 0$ を満たす $x = x_0$ を求めよう. $f'(x) = 0$ とすると,

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{L - x}{\sqrt{(L - x)^2 + b^2}}.$$

これを整理すると, x についての 2 次方程式

$$(a + b)(a - b)x^2 - 2a^2 Lx + a^2 L^2 = 0$$

が得られる．これは簡単に因数分解できて，

$$\{(a+b)x-aL\}\{(a-b)x-aL\}=0.$$

したがって，解 $x=\dfrac{a}{a+b}L,\ \dfrac{a}{a-b}L$ を得るが，このうち，$x=\dfrac{a}{a-b}L$ は $f'(x)=0$ を満たさない．したがって $x_0=\dfrac{a}{a+b}L$ と計算され，$f'(x)$ の単調増加性と合わせると，関数 $f(x)$ は $x=x_0$ において最小値 $\sqrt{L^2+(a+b)^2}$ を取ることがわかる．したがって，点 $\mathrm{P}_0\left(\dfrac{a}{a+b}L,0\right)$ であり，これはもちろん「解法その 1」で求めた点 P_0 に他ならない．

3　水汲み問題の拡張

この節では「水汲み問題 1.1」の拡張について考えてみよう．

3.1　水汲み問題 (川に橋を架ける問題)

§1 でも述べたように，教科書等でよく取り上げられる拡張は次のような「川に橋を架ける問題」であろう (図 11)．

問題 3.1（水汲み問題 (川に橋を架ける問題)）
川を挟んで点 A と点 B がある．今，川に直角に橋を架け，点 A から橋を渡って点 B へ行くとき，道のりを最も短くするには，どの地点に橋を架ければよいだろうか？

ここで (問題文に明示されていない場合が多いが)，川幅は一定であり，川の両岸は直線であるとする．また，橋の幅は無視し，橋を線分と考えることにする．

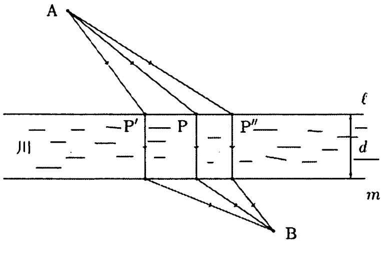

図 11

この問題の解法もまた周知のことであるので本稿では割愛しよう．

ところで，現実には橋が「線分」ということはあり得ない．そこで，橋の幅 (一定とする) を考慮した問題 ([12]) を考えると，より現実の問題に近くなるであろう (図 12)．

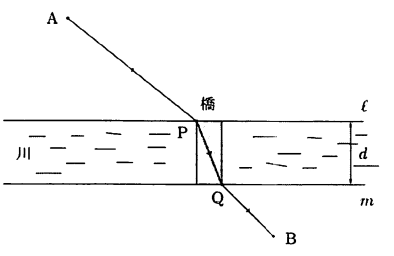

図 12

その解法は「水汲み問題 3.1」と本質的に同じであるので，これも割愛するが，このような，より現実に即した「数学的モデル」を考案し，それを用いて現実の問題や現象を解析するという姿勢は，この問題に限らず，数学の教育・研究において大切なことであろう．

3.2　水汲み問題 (川が 2 本ある場合)

「水汲み問題 1.1」の拡張として「川が 2 本ある場合」の水汲み問題を考えてみよう (図 13)．

問題 3.2（水汲み問題 (川が 2 本ある場合その 1)）
点 A を出発し，川 1 の川岸 (直線 ℓ) の点 P で水を汲み，次に川 2 の川岸 (直線 m) の点 Q で，また水を汲んでから点 A へ戻るものとする．このとき，歩く距離 AP + PQ + QA を最も短くするには点 P と点 Q をどこに取ればよいだろうか？

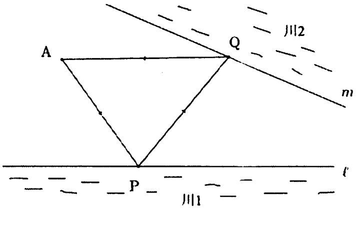

図 13

「水汲み問題 1.1」の「解法その 1」を思い起こすと，次のような解法に到達することはそれほど難しいことではないと思われる (図 14)．

- 直線 ℓ に関して点 A と線対称な点を A′ とする．
- 直線 m に関して点 A と線対称な点を A″ とする．
- 直線 A′A″ と直線 ℓ, m の交点をそれぞれ P_0, Q_0 とする．

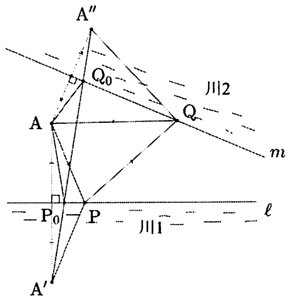

図 14

このとき, 点 P_0, Q_0 が求める点である. 実際, 直線 ℓ 上の任意の点 P と直線 m 上の任意の点 Q に対して, $P \neq P_0$ もしくは $Q \neq Q_0$ であるとするならば,

$$\begin{aligned} AP + PQ + QA &= A'P + PQ + QA'' \\ &= \text{折線 } A'PQA'' \\ &> \text{線分 } A'A'' \\ &= A'P_0 + P_0Q_0 + Q_0A'' \\ &= AP_0 + P_0Q_0 + Q_0A \end{aligned}$$

が成り立つからである.

あるいは次のような拡張を考えることもできる (図 15).

> **問題 3.3 (水汲み問題 (川が 2 本ある場合その 2))**
> 点 A を出発し, 川 1 の川岸 (直線 ℓ) の点 P で水を汲み, 次に川 2 の川岸 (直線 m) の点 Q で, また水を汲んでから点 B へ行くものとする. このとき, 歩く距離 AP + PQ + QB を最も短くするには点 P と点 Q をどこに取ればよいだろうか?

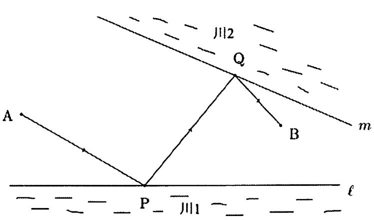

図 15

解法は問題 3.2 と同様である (点 A を直線 ℓ に関して折り返した点を A′, 点 B を直線 m に関して折り返した点 B′ として, 直線 A′B′ と ℓ, m との交点を取ればよい).

3.3 水汲み問題 (池に水を汲みに行く問題)

ところで「水汲み問題」においては, 通常, 次のような「理想化」を行うであろう.

- 川岸は直線であるとする.
- 川幅は一定であるとする.

しかしながら, 実際の川は一般には蛇行しており, 川岸が直線であることはあり得ず, また川幅もまた一定であることはまずあり得ない. そのような場合を数学的に扱うためには, 例えば川岸を適当な曲線で置き換えることになろう. このような一般的な設定の下での「水汲み問題」においては, 「道のりの最小値を与える点 P」の存在が必ずしも保証されるわけではない. しかしながら, 例えば「閉曲線」を考えるのであれば, 必ず最小値 (と最大値) の存在が保証される.*7 そこで, 次ような設定の問題を考えてみよう (図 16).

> **問題 3.4 (水汲み問題 (池に水を汲みに行く問題))**
> 点 A から出発して, 池の端の点 P で水を汲み, 点 B まで行くとき, 道のり AP + PB を最も短くするには点 P をどこに取ればよいだろうか? ただし, 池の周は円であると仮定する.

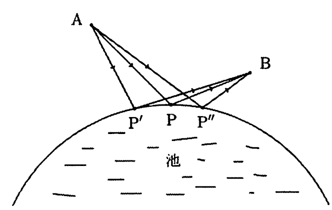

図 16

この問題を初等幾何学的に解くことは難しいであろうが, 例えば高等学校 3 年生程度の円錐曲線 (楕円) の知識を利用すると, 解を与えることができる. すなわち, 点 A と点 B を焦点とする楕円であって, 池の周である円と接するものを考え, その接点を P_0 とすると, これが求める点である (図 17).

この問題を含め, 「与えられた曲線への距離の最大値 · 最小値」に関する問題については文献 [1, 第 VII 章], [4, 第 7 章] を参照されたい. また, 元々の「水汲

*7 その根拠は 「コンパクト集合上の連続関数は必ず最大値 · 最大値をもつ」 である.

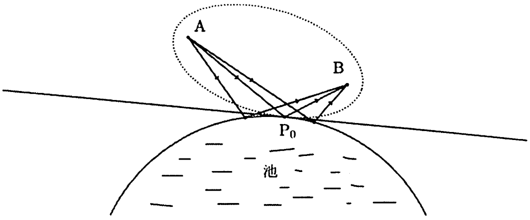

図 17

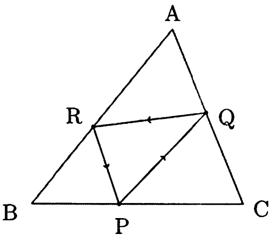

図 18

み問題 1.1」と同様,「池に水を汲みに行く問題 3.4」もまた「光の反射」や「球の跳ね返り」の問題と関連付けることができる ([4, 第 7 章, Ex.3], [9, §1.5]). これは「アルヘイゼン (Alhazen)*8の問題」と呼ばれ, 次のようなものである.

問題 3.5 (アルヘイゼンの問題) ある 1 点 A から発射された光が球形の鏡で反射され, もう一つの与えられた点 B に到着したものとする. このとき, 光はどのように進むか？

文献 [9] では微分積分学を用いた解析的な手法による解答が与えられている.

3.4 ファニャーノの問題

「水汲み問題 1.1」や「水汲み問題 3.2, 3.3」では,「当たり前の事実」である「2 点を結ぶ最短経路が直線 (線分)」であるという事実を存分に利用した. この事実を利用すると, 初等幾何学の有名な問題のいくつかを比較的容易に解くことができる. この節では, その中の一つ「ファニャーノ*9の問題」を取り上げよう. これはファニャーノが 1775 年に著した論文に登場する問題で, 次のようなものである:

問題 3.6 (ファニャーノの問題) 与えられた鋭角三角形に内接する三角形のうちで, 周囲の長さが最小となるものを求めよ.

もう少しわかりやすく言い換えておくと, 図 18 のような鋭角三角形 ABC において, 辺 BC 上に点 P, 辺 CA 上に点 Q, 辺 AB 上に点 R を取り, 三角形 PQR を考える. このとき, PQ + QR + RP を最小とするような点 P, Q, R の位置を求めよ, というものである.

ファニャーノ自身は「微分法の初歩ともみられる極限概念を用いてこれを解いた」そうである ([11]). また, シュワルツ (シュヴァルツ)*10による見事な証明が知られている ([1, 第 VII 章, §4], [4, 144. シュワルツの解法], [8, §1.4], [10, 第 5 章], [11, ファニャーノの問題]). ここでは上述した「当たり前の事実」の威力を感じてもらうため, ハンガリーの数学者フェイエール*11が学生だった頃に発見したと言われる,*12 これまた見事な証明 (の概略) を紹介しておこう ([2, §1.8], [6, §2.6], [8, §1.4], [10, 第 6 章], [11, ファニャーノの問題]).

(i) まず辺 BC 上の点 P を固定して考える (図 19).

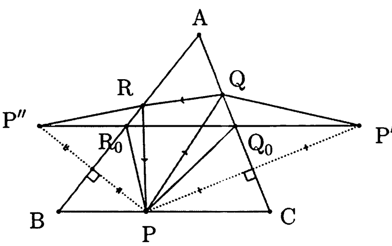

図 19

辺 CA, AB に関して点 P と線対称な点をそれぞれ P′, P″ とする (これらは定点である). このとき,

$$\begin{aligned} PQ + QR + RP &= P'Q + QR + RP'' \\ &= \text{折線 } P'QRP'' \end{aligned}$$

*8 [9, §1.5] によると, 本名は Abu Ali al-Hasan ibn al-Haytham だそうで, およそ 965 年–1039 年くらいに生きた数学者だそうである.

*9 Giovanni Francesco Fagnano dei Toschi, 1715 年–1797 年.

*10 Hermann Amandus Schwarz, 1843 年–1921 年.

*11 Lipót Féjer, 1880 年–1959 年.

*12 [3, 90 ファグナノの内接三角形の周長の問題] には「名著 *Exercices de Géométrie*」の著者ガブリエル・マリー神父によるもの」とある.

であるから，点 Q が辺 CA 上を，点 R が辺 AB 上を動くとき，折線 $P'QRP''$ の長さが最小となるのは，これが直線となるときである．すなわち，直線 $P'P''$ と辺 CA，辺 AB との交点をそれぞれ Q_0, R_0 とするとき，$\triangle PQ_0R_0$ が，周囲の長さが最小となるものである．ここで，$\triangle AP'P''$ は

- $PQ_0 + Q_0R_0 + R_0P = P'P''$
- $AP' = AP'' = AP$
- $\angle P'AP'' = 2\angle A$

である二等辺三角形であることに注意する (図 20).

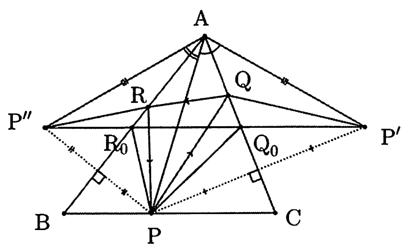

図 20

(ii) 次に点 P を動かそう (図 21).

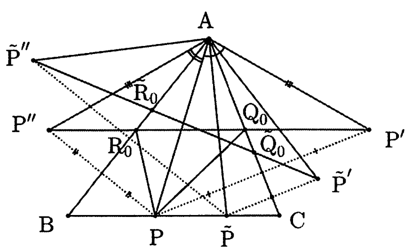

図 21

例えば，辺 BC 上に点 P と異なる点 $\tilde{P}$ を取り，上述した (i) の手順により，点 $\tilde{P}'$, $\tilde{P}''$, 点 $\tilde{Q}_0$, $\tilde{R}_0$ を取るとき，

- $\triangle AP'P''$ は $AP' = AP'' = AP$, $\angle P'AP'' = \angle A$ である二等辺三角形である．
- $\triangle A\tilde{P}'\tilde{P}''$ は $A\tilde{P}' = A\tilde{P}'' = A\tilde{P}$, $\angle \tilde{P}'A\tilde{P}'' = \angle A$ である二等辺三角形である．

したがって，$\triangle AP'P'' \sim \triangle A\tilde{P}'\tilde{P}''$ であり，

$$P'P'' : \tilde{P}'\tilde{P}'' = AP : A\tilde{P}$$

である．このことから $P'P''$ が最小となるのは AP が最小となるときである．すなわち点 P が，点 A から辺 BC へ下した垂線の足 P_0 に一致するときであることがわかる (図 22).

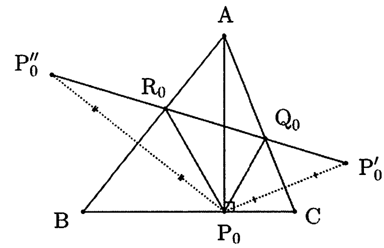

図 22

このとき，もう少し議論すると，$BQ_0 \perp CA$, $CR_0 \perp AB$ であることが示され，$\triangle P_0Q_0R_0$ は，いわゆる「垂足三角形」であることが示される．

以上がファニャーノの問題の初等的な解法の概略である．同様の考え方は，次の「フェルマー*13の問題」*14にも適用できる．これについては紙数の関係もあり，ここで論じることはできないので，関連する文献を挙げておくのみとしよう ([1, 第 VII 章, §5], [2, §1.8], [3, 91], [7, §7.1], [9, §5.2], [10, 第 6 章], [11, フェルマーの作図問題]).

問題 3.7 (フェルマーの問題) 与えられた鋭角三角形 ABC 内に点 P を取り，点 P から各頂点 A, B, C へ至る距離の和 AP + BP + CP を最小にせよ．

4 水汲み問題から光の屈折の問題へ

最後の節では「水汲み問題」に関連する話題について考えてみたい．

4.1 所要時間を最小 (最短) にする経路

そもそも「水汲み問題 1.1」は「最短経路」，つまり「距離 (道のり) を最小にする経路」を求める問題であった．ところで実際に，点 A を出発して，バケツ

*13 Pierre de Fermat, 1607?年–1665 年.

*14 この「フェルマーの問題」は文献によって様々な名称や設定の下に扱われることが多いので注意を要する．文献 [1, 第 VII 章, §5] や [4, 146] では「シュタイナー (Jakob Steiner, 1796 年–1863 年) の問題」と呼んでいる．

か何かを持って, 歩いて川岸の点 P まで行き, そこでバケツに水を汲んで, 今度は水の入ったバケツを持って, 歩いて点 B まで行くことを考えると, 点 A から点 P まで行く際には空のバケツを持って歩くのであるが, 点 P から点 B までは水が入った重いバケツを持って歩くことになるので, 歩く速さが AP 間と PB 間で変わる可能性がある. そこで, 「水汲み問題 1.1」の変形版として次の問題を考えてみよう.

> **問題 4.1 (水汲み問題 (所要時間を最小にする経路))** 点 A を出発して, 川岸 (直線 ℓ とする) の点 P で水を汲み, 点 B まで向かうとき, その所要時間を最小にするには点 P をどこに取ればよいだろうか?

もし歩く速さが一定 (したがって AP 間と PB 間で変わらない) であれば, 「水汲み問題 4.1」の解は, もちろん「水汲み問題 1.1」と同じであり, 点 P_0 で水を汲めばよい. しかしながら, AP 間と PB 間で歩く速さが変わる場合はどうだろうか? そこで,

- AP 間は速さ v_1 で移動し, PB 間は速さ v_2 で移動するとしよう (ここでは $v_1 > v_2$ とする).

今度は「距離 (道のり)」ではなく, 「時間」が関係してくるので, 初等幾何学的に考察することは難しそうである. そこで, §2.3 で考察したように, 適当な座標系を導入して解析的に解いてみよう (図 23).

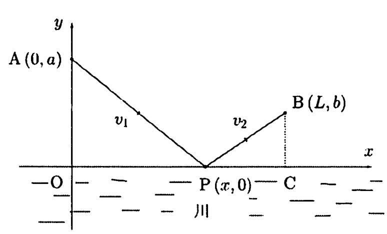

図 23

点 A $(0, a)$ から川岸の点 P $(x, 0)$ で水を汲み, そこから点 B (L, b) へ向かうとすると, 所要時間は

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x-L)^2+b^2}}{v_2} \tag{4.1}$$

で与えられる. 導関数 $g'(x)$, 2 次導関数 $g''(x)$ を計算すると,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{1}{v_2}\frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2+b^2}}, \\ g''(x) &= \frac{1}{v_1}\frac{a^2}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{v_2}\frac{b^2}{\{(L-x)^2+b^2\}^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

となる. これより常に $g''(x) > 0$ であるから, $g'(x)$ は単調増加であることがわかる. $g'(x) = 0$ を満たす $x = x_1$ を求めてみよう. $g'(x) = 0$ とすると,

$$\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{v_2}\frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2+b^2}}. \tag{4.2}$$

これを整理すると, x についての 4 次方程式

$$\begin{aligned} &(v_1^2-v_2^2)x^4 - 2(v_1^2-v_2^2)Lx^3 \\ &\quad +\{v_1^2(L^2+a^2) - v_2^2(L^2+b^2)\}x^2 \\ &\quad -2v_1^2a^2Lx + v_1^2a^2L^2 = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

が得られる. したがって, x_1 は 4 次方程式 (4.3) の解である. これを明示的に求めることは難しいが, §2.3 で求めた $x_0 = \frac{a}{a+b}L$ を用いると,

$$\begin{aligned} g'(x_0) &= \frac{L}{\sqrt{L^2+(a+b)^2}}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right) < 0, \\ g'(L) &= \frac{1}{v_1}\frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}} > 0 \end{aligned}$$

であることから, 中間値の定理より, $x = x_0$ と $x = L$ の間に $g'(x) = 0$ の実数解があることがわかる. さらに, 上述した $g'(x)$ の単調増加性より, $g'(x) = 0$ を満たす $x = x_1$ はただ一つであり, $x_0 < x_1 < L$ である. 増減表を書いて調べれば, 関数 $g(x)$ は $x = x_1$ において最小値 $g(x_1)$ を取ることがわかる.

以上の考察により, $v_1 > v_2$ であるとき, 「水汲み問題 4.1」の解を与える点 P_1 $(x_1, 0)$ は点 P_0 $(x_0, 0)$ と点 C $(L, 0)$ の間にあることがわかる. これは直観的にも理解できる結果であろう. さらに興味深いことは, 図 24 のように角 θ_1, θ_2 を定めると,

$$\sin\theta_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+a^2}}, \quad \sin\theta_2 = \frac{L-x_1}{\sqrt{(L-x_1)^2+b^2}}$$

であるから, $g'(x_1) = 0$ であることより (式 (4.2)),

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2} \iff \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \tag{4.4}$$

が成り立つ. これはすなわち, 光の屈折に関する「スネル[*15]の法則」に他ならない (図 25):

[*15] Willebrord Snell (Snellius), 1580 年–1626 年.

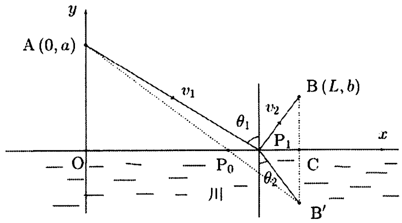

図 24

事実 4.2 (スネルの法則) ある媒質 (媒質 1) 内を進む光が, 異なる媒質 (媒質 2) 内へ進むものとする. 媒質 1, 2 における光の速さをそれぞれ v_1, v_2 とし, 媒質 1 から媒質 2 へ進むときの入射角を i, 屈折角を r とするとき, 次の関係式が成り立つ.

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} \quad (= 一定)$$

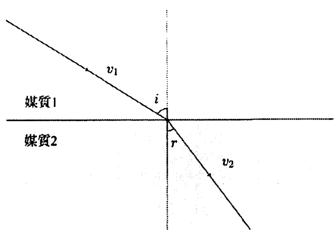

図 25

スネルの法則は有名な「フェルマーの原理: 均一でない媒質の中の 2 点を通過する光の経路は, その 2 点を結ぶあらゆる経路の内で所要時間が最小なものである」から導かれるが, 「水汲み問題 4.1」において, 「陸地」(x 軸より上側) を一つの媒質, 「川」(x 軸より下側) を別の媒質と考え, 光がそれぞれの媒質中を速さ v_1, v_2 で通過すると考えれば, 両者はまったく同じ問題であることがわかる.

5 おわりに

このようにして, 「距離 (道のり)」ではなく, 「所要時間」に着目することにより, 「水汲み問題 1.1」は光の屈折の問題とも関係することになり, これはさらに, 1696 年にベルヌーイ[*16]が提出した「最速降下線 (brachistochrone)」の問題や, 「変分法」[*17]にも繋がっていくのである (例えば [1, 第 VII 章, §10] などを参照されたい). また, 本稿で大活躍した「当たり前の事実」(2 点を結ぶ最短経路は直線である) もまた, より一般の「曲がった空間」における 2 点を結ぶ最短経路である「測地線」の概念へ繋がっており, 現代幾何学の一つである「微分幾何学」へと発展していくのである.

参考文献

[1] R. クーラント・H. ロビンズ 著 (森口 繁一 監訳), **数学とは何か** 原書第 2 版, 岩波書店, 2001 年.

[2] H. S. M. コクセター著 (銀林 浩 訳), **幾何学入門 上**, ちくま学芸文庫, 筑摩書房, 2009 年.

[3] H. デリー 著 (根上 生也 訳), **数学 100 の勝利 Vol.3** 空間と星の問題, 丸善出版, 1996 年.

[4] 小林 幹夫, **復刊 初等幾何学**, 共立出版, 2010 年.

[5] 新村 出 編, **広辞苑** 第五版, 岩波書店, 1998 年.

[6] P. J. ナーイン 著 (細川 尋史 訳), **最大値と最小値の数学 (上)**, 丸善出版, 2012 年.

[7] P. J. ナーイン 著 (細川 尋史 訳), **最大値と最小値の数学 (下)**, 丸善出版, 2012 年.

[8] 難波 誠, **平面図形の幾何学**, 現代数学社, 2008 年.

[9] 岡本 久, **最大最小の物語** 関数を通して自然の原理を理解する, サイエンス社, 2019 年.

[10] H. ラーデマッヘル/O. テープリッツ 著 (山崎 三郎・鹿野 健 訳), **数と図形**, ちくま学芸文庫, 筑摩書房, 2010 年.

[11] 数学セミナー編集部 [編], **数学 100 の問題**, 日本評論社, 1999 年.

[12] 上野 健爾, **数学, この大いなる流れ**, 数学通信 第 3 巻 2 号 (1998 年度), 3–26.

(令和２年１２月１８日)

[*16] Johann Bernoulli, 1667 年–1748 年.

[*17] ここで詳しく説明することはできないが, 曲線や関数を「変数」とする「関数 (汎関数)」に関する極値問題を解くための方法と言えようか.