博士論文

有限群の実表現の d-Smith 同値の研究

(Study of the d-Smith equivalence of real representations of finite groups)

清田　航平

令和３年１月

岡山大学大学院
自然科学研究科
数理物理科学専攻
数理科学講座

目次

1　導入 **1**

2　表現の基礎理論の準備 **8**

3　Oliver 群の d-Smith 集合 **12**

4　交代群の d-Smith 集合 **14**

5　群 $A_m \times C_2 \times \cdots \times C_2$ の d-Smith 集合 **22**

6　実表現環の部分加群 $\mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}$ の階数 **25**

7　二面体群の直積群の d-Smith 集合 **31**

1 導入

本論文では，$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ をそれぞれ，自然数全体の集合，非負の整数全体の集合，有理整数環，有理数体，実数体，複素数体とし，G を有限群とする．$\mathbb{C}$ の部分体 F に対し，$\mathrm{R}(G, F)$ を G の F-表現環とする．特に，$\mathrm{R}(G, \mathbb{R})$, $\mathrm{R}(G, \mathbb{C})$ をそれぞれ $\mathrm{RO}(G)$, $\mathrm{R}(G)$ により表す．標準的な準同型写像より，

$$\mathrm{R}(G, \mathbb{Q}) \subset \mathrm{RO}(G) \subset \mathrm{R}(G)$$

と見做せる．多元環 A に対し，有限生成の A 上の加群を **A-加群**と呼ぶ．可換環 R に対し，$R[G]$ を R 上の G の群多元環とする．$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ より，$\mathbb{Z}[G] \subset \mathbb{Q}[G] \subset \mathbb{R}[G] \subset \mathbb{C}[G]$ と見做せる．特に，$\mathbb{Q}[G]$-加群，$\mathbb{R}[G]$-加群，$\mathbb{C}[G]$-加群をそれぞれ，**有理 G-加群**，**実 G-加群**，**複素 G-加群**と呼ぶ．自然数 n に対して，C_n, A_n, S_n をそれぞれ，位数 n の巡回群，n 次交代群，n 次対称群とする．

1960 年，有限群 G に対して，丁度 2 個の不動点 a, b を持つ球面 S 上の滑らかな G-作用において，2 つの接空間表現 $T_a(S)$, $T_b(S)$ は同型かという問題が，P. A. Smith [Sm60] により提唱された．この問題を，Smith 同値問題といい，様々な研究者によりその同値問題の研究がなされてきた．T. Petrie [Pe82, Pe83] に従い，2 つの実 G-加群 V, W が **Smith 同値**であるとは，

$$\Sigma^G = \{a,\, b\}\ (a \neq b), \quad T_a(\Sigma) \cong V, \quad T_b(\Sigma) \cong W$$

を満たすホモトピー球面 Σ 上の滑らかな G-作用が存在するときをいう．V と W が Smith 同値であるとき，$V \sim_{\mathfrak{S}} W$ と書く．G の **Smith 集合** $\mathfrak{S}(G)$ を

$$\mathfrak{S}(G) = \{[V] - [W] \in \mathrm{RO}(G) \mid V \sim_{\mathfrak{S}} W\}$$

により定める．それ以降，Smith 集合の自明性ついて研究がなされてきた．それに関して，次の研究結果がよく知られている．

- M. F. Atiyah–R. Bott [AB68, Theorem 7.15]，J. W. Milnor [Mi66]： 素数 p に対して $G = C_p$ のとき，$\mathfrak{S}(G) = \{0\}$ である．

- C. U. Sanchez [Sa76]: 奇素数 p と自然数 k に対して $G = C_{p^k}$ のとき，$\mathfrak{S}(G) = \{0\}$ である．

- T. Petrie [Pe79, Theorem B], [Pe82, Pe83]: G が少なくとも 4 個の nocyclic な Sylow 部分群を持つようなアーベル群であるとき，$\mathfrak{S}(G) \neq \{0\}$ である．

- S. E. Cappel–J. L. Shaneson [CS82, Theorem A], [CS85]: 2 以上の自然数 k に対し，$G = C_{4k}$ のとき，$\mathfrak{S}(G) \neq \{0\}$ である．

$\mathcal{S}(G)$ を G の部分群全体の集合とする．有限群 G とその部分群 H に対し，res^G_H を制限写像とし，写像 $\mathrm{Dim}_H : \mathrm{RO}(G) \to \mathbb{Z}$ を $\mathrm{Dim}_H([V] - [W]) = \dim_{\mathbb{R}} V^H - \dim_{\mathbb{R}} W^H$ により定める．T. tom Dieck [tD79, p. 229] に従い，$\mathrm{RO}_0(G)$ を任意の G の部分群 H に対して $\mathrm{Dim}_H(x) = 0$ を満たす $x \in \mathrm{RO}(G)$ 全体の集合とする．また，$\mathcal{G} \subset \mathcal{S}(G)$ に対して $\mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{G}}$ を，任意の $H \in \mathcal{G}$ に対し $\mathrm{res}^G_H x = 0$ を満たすような $x \in \mathrm{RO}_0(G)$ 全体の集合とする．

2 つの実 G-加群 V, W が Smith 同値であり，更に任意の G の部分群 H に対して $\mathrm{Dim}_H([V] - [W]) = 0$ を満たすとき，V と W は **d-Smith 同値**であるといい，$V \sim_{\mathfrak{dS}} W$ と書く．G の **d-Smith 集合** $\mathfrak{dS}(G)$ を

$$\mathfrak{dS}(G) = \{[V] - [W] \in \mathrm{RO}(G) \mid V \sim_{\mathfrak{dS}} W\}$$

により定める．

先行研究では，上述の通り有限アーベル群の Smith 集合の自明性についてよく知られている結果があり，対称群または交代群の Smith 集合が $\{0\}$ であることの必要十分条件も与えられている（詳細は後述）．このように，様々な有限群の Smith 集合について研究がなされてきた．しかし，Smith 集合の結果から直ちにわかるようなものを除くと，具体的な有限群の d-Smith 集合について，得られている結果はない．そこで，本研究ではそれに関して，以下の有限群に対して，d-Smith 集合を決定した．

- 対称群，交代群.

- 対称群または交代群と有限生成可換 2-群の直積.

- m, n を 2 以上の整数としたときの，相異なる m 個の奇素数 p_1, $p_2, \ldots$, p_m に対する，位数 $2p_1p_2\ldots p_m$ の二面体群の n 個の直積.

本論文では，上記の有限群の d-Smith 集合に関する研究結果とその詳細について述べる.

定義より $\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) \subset \mathfrak{S}(G)$ は明らかである．一般に，$\mathfrak{S}(G)$ と $\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G)$ は $\mathbb{Z}$-加群ではない（[Br69] を見よ）.

本論文では，次の記号を用いる.

E : 単位群 $\{e\}$.

$G^{\{p\}}$: $|G/H|$ が p-冪となるような G の最小の正規部分群 H.

$\mathcal{P}(G)$: 位数が素数冪である G の部分群全体の集合.

$\mathcal{P}^*(G)$: 位数が奇素数冪，2 または 4 である G の部分群全体の集合.

$\mathcal{L}(G) = \{H \in \mathcal{S}(G) \mid$ ある素数 p に対し $H \supset G^{\{p\}}$ を満たす $\}$.

G^{nil} : G/H が冪零となるような G の最小の正規部分群 H.

$G^{\cap 2}$: $|G/H| \leq 2$ を満たす G の正規部分群 H 全体の共通部分.

E. Laitinen–M. Morimoto [LM98] により，

$$G^{\mathrm{nil}} = \bigcap_{p:\text{素数}, p \mid |G|} G^{\{p\}}$$

が成り立つことが知られている．また，E. Laitinen–M. Morimoto [LM98] に従い，P と G/H が素数冪位数の有限群かつ H/P が巡回群となるような正規鎖

$$P \trianglelefteq H \trianglelefteq G$$

が存在しないとき，G は **Oliver 群**であるという.

Oliver 群の d-Smith 集合に対し，次の包含関係が成り立つ.

定理 1.1 ([Sei22, Theorem 1.1]). $G^{\mathrm{nil}} = G^{\cap 2}$ を満たす任意の *Oliver* 群 G に対し，

$$\mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)} \subset \mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) \subset \mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}^*(G)}$$

が成り立つ.

G の元 g に対し，$(g)_G$ を $g \in G$ の G-共役類，すなわち

$$(g)_G = \{xgx^{-1} \mid x \in G\}$$

とする．また，$(g)^{\pm}_G = (g)_G \cup (g^{-1})_G$ を g を代表元とする **実共役類**という．

有限群 G とその正規部分群 N に対し， 素数冪位数でない $g \in G$ の実共役類 $(gN)^{\pm}_{G/N}$ の全体を考え，その元の個数を $\lambda(G,N)$ で表す．特に，$\lambda(G,E)$ を G の **Laitinen 数** という．

S_m，A_m，$S_m \times C_2 \times \cdots \times C_2$，$A_m \times C_2 \times \cdots \times C_2$ の Smith 集合について，次の結果がよく知られている．

- 5 以下の自然数 m に対し，$\mathfrak{S}(A_m) = \mathfrak{S}(S_m) = \{0\}$ である．（[LP99, Lemma 1.4], [PaSo02, Theorem C3] を参照せよ.）
- K. Pawałowski–R. Solomon [PaSo02, Theorem C3]： 自然数 m に対し，$\mathfrak{S}(S_m), \mathfrak{S}(A_m)$ が $\{0\}$ であることの必要十分条件はそれぞれ $m \leq 5$, $m \leq 7$ である．
- X. -M. Ju [J10, Theorems A and B]: $\mathfrak{S}(S_5 \times C_2^n)$ と $\mathfrak{S}(A_5 \times C_2^n)$ はいずれも $\mathbb{Z}$ 上の自由加群であり，その階数はそれぞれ $2^n - 1$, $2(2^n - 1)$ である．
- K. Pawałowski–R. Solomon [PaSo02, Theorem A3], K. Pawałowski–T. Sumi [PaSu13]: $G = \mathrm{Aut}(A_5)$, $P\Sigma L(2,27)$ 以外の非可解群 G に対し，$\mathfrak{S}(G) = \{0\}$ であることの必要十分条件は $\lambda(G,E) \leq 1$ である．但し，$P\Sigma L(2,27)$ は射影特殊線型群 $PSL(2,27)$ と $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{27})$ の半直積である．
- M. Morimoto [Mo07, Theorem 3]: $G = P\Sigma L(2,27)$ のとき，$\mathfrak{S}(G) \neq \{0\}$ である．
- M. Morimoto [Mo08, Theorem 1.2]: $G = \mathrm{Aut}(A_6)$ のとき，$\mathfrak{S}(G) = \{0\}$ である．

上のように非可解群に対しては，その Smith 集合が自明か非自明かよく知られているが，それらの d-Smith 集合についてはどうであろうか．有限群の表現論の基礎知識から，次の結果が得られる．

定理 1.2 ([Sei22, Theorem 1.2])**.** 自然数 m に対し，$G = S_m$ とする．このとき，

$$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) = \mathrm{RO}_0(G) = 0$$

である．

定理 1.3 ([Sei22, Theorem 1.3])**.** 自然数 m に対し，$G = S_m \times C_2 \times \cdots \times C_2$ とする．このとき，

$$\mathfrak{dS}(G) = \mathrm{RO}_0(G) = 0$$

である．

次に，$G = A_m$, $A_m \times C_2 \times \cdots \times C_2$ の d-Smith 集合に関する研究結果を述べるため，ここで必要な定義を与える．

r 個の自然数 $t_1, t_2, \ldots, t_r$ が $t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_r$, $t_1 + t_2 + \cdots + t_r = m$ を満たすとき，$t = (t_1, t_2, \ldots, t_r)$ を m の**分割** といい，r を分割 t の**長さ** という．

$m \geq 2$ に対し, $\pi(m)$ を次の 3 つの条件

(P1) $t_1, t_2, \ldots, t_r$ は奇数である．

(P2) $t_1 > t_2 > \cdots > t_r$.

(P3) $m - r \equiv 0 \mod 4$.

を満たす m の分割 $t = (t_1, t_2, \ldots, t_r)$ の個数とする．便宜上，$\pi(1) = 0$ と定める．$\rho(m)$ は条件 (P1)–(P3) に加えて，

(P4) $t_1 t_2 \cdots t_r$ は素数冪ではない．

も満たす m の分割 $t = (t_1, t_2, \ldots, t_r)$ 全体の個数とする．$m \leq 27$ に対する $\pi(m)$ と $\rho(m)$ の値は次のようになる．

m	≤ 4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\pi(m)$	0	1	1	0	0	1	2	1	0	1	3	3
$\rho(m)$	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	2	3

m	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$\pi(m)$	1	1	4	5	2	1	5	8	5	2	6	12
$\rho(m)$	1	0	3	5	2	1	5	8	5	1	5	12

表 1.1. $m \leq 27$ における $\pi(m)$ と $\rho(m)$ の値

定理 1.4 ([Sei22, Theorem 1.4])**.** 自然数 m に対し $G = A_m$ とする．このとき，

$$\mathfrak{dS}(G) = \mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)}$$

であり，$\mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)}$ の $\mathbb{Z}$ 上の階数は $\rho(m)$ である．

2 つの自然数 m, n に対し，$\kappa(m,n)$ は整数 $(2^n - 1)\pi(m) + \rho(m)$ と定める．次の表は，$(m,n) \in \{1, 2, \ldots, 18\} \times \{1, 2, \ldots, 6\}$ における $\kappa(m,n)$ の値である．

n \ m	≤ 4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	0	1	1	0	0	1	3	2	0	1	5	6	2	1	7
2	0	3	3	0	0	3	7	4	0	3	11	12	4	3	15
3	0	7	7	0	0	7	15	8	0	7	23	24	8	7	31
4	0	15	15	0	0	15	31	16	0	15	47	48	16	15	63
5	0	31	31	0	0	31	63	32	0	31	95	96	32	31	127
6	0	63	63	0	0	63	127	64	0	63	191	192	64	63	255

表 1.2. $m \leq 18$, $n \leq 6$ における $\kappa(m,n)$ の値

自然数 n に対し，C_2^n を C_2 の n 個の直積とする．

定理 1.5 ([Sei22, Theorem 1.6])**.** 2 つの自然数 m, n に対し，$G = A_m \times C_2^n$ とする．このとき，

$$\mathfrak{dS}(G) = \mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)}$$

であり，$\mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)}$ の $\mathbb{Z}$ 上の階数は $\kappa(m,n)$ である．

A を $\mathrm{RO}(G)$ の部分集合，$\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ を $\mathcal{S}(G)$ の部分集合として，次を定める．

$$A^{\mathcal{F}} = \{[V] - [W] \in A \mid V^H = 0,\ W^H = 0 \text{ for all } H \in \mathcal{F}\}.$$

$$A_{\mathcal{G}} = \{[V] - [W] \in A \mid \mathrm{res}^G_K V \cong \mathrm{res}^G_K W \text{ for all } K \in \mathcal{G}\}.$$

$$A^{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}} = (A^{\mathcal{F}})_{\mathcal{G}}.$$

実 G-加群 V が任意の $H \in \mathcal{F}$ に対し $V^H = 0$ を満たすとき，V は **$\mathcal{F}$-free** であるという．特に，$\mathcal{F}$ が 1 点集合 $\{N\}$ であるとき，V は **N-free** であるという．また，2 つの実 G-加群 V, W が任意の $K \in \mathcal{G}$ に対し $\mathrm{res}^G_K V \cong \mathrm{res}^G_K W$ を満たすとき，V と W は **$\mathcal{G}$-matched** であるという．

C が G の素数幂位数でない巡回部分群全体を動くような G/N-共役類 $(CN/N)_{G/N}$ の個数を $\nu(G,N)$ で表す.

定理 1.6 ([Sei21, Theorem 1.3]). G を素数幂でない元を含む有限群，N をその正規部分群とする．このとき，$\mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}$ の $\mathbb{Z}$ 上の階数は

$$(\lambda(G,E)-\lambda(G,N))-(\nu(G,E)-\nu(G,N))$$

である.

注意 1.1. $G=P\Sigma L(2,27)$ とする．この場合には，[Mo10, Proposition 2.3] より $\mathfrak{S}(G)=\mathrm{RO}(G)^{\{G\}}_{\mathcal{P}(G)}\,(\neq 0)$ であることから，$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G)=\mathrm{RO}_0(G)^{\{G\}}_{\mathcal{P}(G)}$ が得られる．G が素数幂位数でないので，$\lambda(G,G)=\nu(G,G)=1$ が得られ，[PaSo02, p.878] より $\lambda(G,E)=2$ であることが知られている．$\lambda(G,E)=2$ であることは，G が持つ素数幂位数でない元を代表元とする実共役類の個数が 2 であることが理由であるが，その 2 つの代表元を a, b とすると，それぞれ位数が 6, 14 であるものが取れる．$\langle a\rangle\cong C_6$, $\langle b\rangle\cong C_{14}$ より，$\nu(G,E)=|\{\langle a\rangle, \langle b\rangle\}|=2$ が得られる．定理 1.6 から，

$$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G)=\mathrm{RO}_0(G)^{\{G\}}_{\mathcal{P}(G)}=0$$

であることがわかる.

自然数 u に対し，D_{2u} を位数 $2u$ の二面体群，$p_1, p_2, \ldots, p_m$ を相異なる m 個の奇素数とする．定理 1.6 を利用することで，次の計算結果が得られる.

定理 1.7 ([Sei21, Theorem 1.5]). $m\geq 2$ に対し，$G=D_{2p_1p_2\cdots p_m}\times D_{2p_1p_2\cdots p_m}$ とする．このとき，$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G)=\mathrm{RO}_0(G)^{\{G^{\mathrm{nil}}\}}_{\mathcal{P}(G)}$ であり，$\mathrm{RO}_0(G)^{\{G^{\mathrm{nil}}\}}_{\mathcal{P}(G)}$ の $\mathbb{Z}$ 上の階数は

$$\left(\frac{p_1p_2\cdots p_m+3}{2}\right)^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{p_i^2-9}{4}-\sum_{k=1}^{m}\frac{3^{m-k}}{2}\sum_{1\leq t_1<\cdots<t_k\leq m}\prod_{i=1}^{k}(p_{t_i}-1)-3^m-2^{m+1}-1$$

である.

定理 1.8 ([Sei21, Theorem 1.6]). $n\geq 2$ に対し，$G=D^n_{2p_1p_2}$ とする．このとき，次の (1), (2), (3) が成り立つ.

(1) $\mathfrak{dS}(G) = \mathrm{RO}_0(G)^{\{G^{\mathrm{nil}}\}}_{\mathcal{P}(G)}$ であり，$\mathrm{RO}_0(G)^{\{G^{\mathrm{nil}}\}}_{\mathcal{P}(G)}$ の $\mathbb{Z}$ 上の階数は $\lambda(G,E) - \nu(G,E)$ である．

(2) $\lambda(G,E) = \left(\dfrac{p_1p_2+3}{2}\right)^n - \left(\dfrac{p_1+1}{2}\right)^n - \left(\dfrac{p_2+1}{2}\right)^n - 2^n + 2.$

(3)
$$\begin{aligned}\nu(G,E) = &\sum_{i=1}^{2} \frac{2}{p_i - 1}\left(\left(\frac{p_i+3}{2}\right)^n - \left(\frac{p_i+1}{2}\right)^n - 2^n + 1\right) \\ &+ \frac{4}{(p_1-1)(p_2-1)}\left(2\left(\frac{p_1p_2+3}{2}\right)^n - \left(\frac{p_1+p_2+2}{2}\right)^n\right. \\ &\qquad\qquad\left. - \left(\frac{p_1+3}{2}\right)^n - \left(\frac{p_2+3}{2}\right)^n + 2^n\right).\end{aligned}$$

ここで，本論文の構成について述べる．本節では，Smith 同値表現に関する先行研究と本論文の研究結果について記述をした．節 2 では，本論文で必要な定義をし，そして実表現環 $\mathrm{RO}(G)$ とその部分加群 $\mathrm{RO}_0(G)$ に関する必要な基礎知識を概説する．節 3, 4, 5 の内容は [Sei22] に基づいており，節 6，7 の内容は [Sei21] に基づいている．節 3 では，Oliver 群の d-Smith 集合に関する研究結果である定理 1.1 の証明を与える．節 4 では，対称群と交代群の d-Smith 集合に関する研究結果である定理 1.2, 1.4 の証明を与える．節 5 では，対称群または交代群と有限生成可換 2-群の直積群の d-Smith 集合に関する研究結果である定理 1.3, 1.5 の証明を与える．特に，定理 1.4, 1.5 の証明では，定理 1.1 を利用する．節 6 では，実表現環 $\mathrm{RO}(G)$ の部分加群である $\mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}$ の階数に関する研究結果である定理 1.6 の証明を与える．その結果は，節 7 で利用する．節 7 では，Oliver 群であるような二面体群の直積群の d-Smith 集合に関する研究結果である定理 1.7, 1.8 の証明を与える．

2 表現の基礎理論の準備

本節では，d-Smith 集合に関する結果の証明に必要な表現論の基礎理論の準備をする．詳細は，T. tom Dieck [tD79]，J. P. Serre [Ser77] を参照せよ．

$K \subset F \subset \mathbb{C}$ を満たす $\mathbb{C}$ の部分体 K, F に対し，環準同型写像 $\varphi_{K,F} : \mathrm{R}(G,K) \to \mathrm{R}(G,F)$

を $\varphi_{K,F}([V]) = [V \otimes_K F]$ により定める．更に，次の記号を定める．

$$\mathrm{RO}_{\mathbb{Q}}(G) = \varphi_{\mathbb{Q},\mathbb{R}}(\mathrm{R}(G,\mathbb{Q})).$$

$$\mathrm{R}_{\mathbb{Q}}(G) = \varphi_{\mathbb{Q},\mathbb{C}}(\mathrm{R}(G,\mathbb{Q})).$$

$$\mathrm{R}_{\mathbb{R}}(G) = \varphi_{\mathbb{R},\mathbb{C}}(\mathrm{R}(G,\mathbb{R})).$$

$$\overline{\mathrm{RO}}_{\mathbb{Q}}(G) = \{x \in \mathrm{R}(G) \mid kx \in \mathrm{RO}_{\mathbb{Q}}(G) \text{ for some } k \in \mathbb{N}\}.$$

$$\overline{\mathrm{R}}_{\mathbb{Q}}(G) = \{x \in \mathrm{R}(G) \mid kx \in \mathrm{R}_{\mathbb{Q}}(G) \text{ for some } k \in \mathbb{N}\}.$$

$$\overline{\mathrm{R}}_{\mathbb{R}}(G) = \{x \in \mathrm{R}(G) \mid kx \in \mathrm{R}_{\mathbb{R}}(G) \text{ for some } k \in \mathbb{N}\}.$$

F を $\mathbb{C}$ の部分体とし，$F[G]$-加群 V に対し，χ_V は V の指標と定める．$\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/|G|)$ とし，$\mathrm{Gal}(G)$ を $\mathbb{Q}$ 上の $\mathbb{Q}(\zeta)$ の自己同型群とする．

$\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を複素共役の体同型写像，すなわち

$$\sigma(\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1} \quad \text{及び} \quad \sigma(x) = x \ (x \in \mathbb{R})$$

を満たすとする．

注意 2.1. $\overline{\mathrm{R}}_{\mathbb{R}}(G) = \mathrm{R}(G)^{\sigma}$ 及び $\overline{\mathrm{R}}_{\mathbb{Q}}(G) = \mathrm{R}(G)^{\mathrm{Gal}(G)}$ が成り立つ．特に，$\overline{\mathrm{R}}_{\mathbb{R}}(G)$ は $\mathrm{Gal}(G)$-不変であり，$\mathrm{R}_{\mathbb{R}}(G)$ もそうである．

注意 2.1 より $\mathrm{Gal}(G)$ は $\mathrm{RO}(G)$ 上に作用し，

$$\mathrm{RO}(G)^{\mathrm{Gal}(G)} = \overline{\mathrm{RO}}_{\mathbb{Q}}(G) \tag{2.1}$$

が成り立つことがわかる．2 つの実 G-加群 V, W に対し，$W \cong \psi V$ を満たす $\psi \in \mathrm{Gal}(G)$ が存在するとき，V と W は **Galois 共役** であるという．

Γ を $\mathrm{Gal}(G)$ またはその商群とし，$\varepsilon_\Gamma : \mathbb{Z}[\Gamma] \to \mathbb{Z}$ を添加準同型写像，すなわち

$$\varepsilon_\Gamma\left(\sum_{h\in\Gamma} a_h h\right) = \sum_{h\in\Gamma} a_h \quad (a_h \in \mathbb{Z})$$

が成り立つとし，$\mathfrak{I}_\Gamma$ を添加イデアル $\mathfrak{I}_\Gamma = \ker(\varepsilon_\Gamma)$ とする．ここで，

$$\mathfrak{I}_\Gamma = \langle (1-h)x \mid h \in \Gamma,\ x \in \mathbb{Z}[\Gamma] \rangle_{\mathbb{Z}}$$

であることに注意しておく．短完全系列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{I}_\Gamma \hookrightarrow \mathbb{Z}[\Gamma] \xrightarrow{\varepsilon_\Gamma} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

について考えると，次の補題が直ちに得られる．

補題 2.1. $\mathbb{Z}$-加群として，$\mathfrak{I}_\Gamma$ は $\mathbb{Z}[\Gamma]$ の直和因子である．

補題 2.1 より，次の補題が直ちに得られる．

補題 2.2. $\mathbb{Z}$-加群として，$\mathfrak{I}_{\mathrm{Gal}(G)}\mathrm{RO}(G)$ は $\mathrm{RO}(G)$ の直和因子である．

補題 2.3 ([tD79, Proposition 9.2.6])**.** $\mathfrak{I}_{\mathrm{Gal}(G)}\mathrm{RO}(G) = \mathrm{RO}_0(G)$, $\mathrm{RO}(G)^{\mathrm{Gal}(G)} = \overline{\mathrm{RO}}_{\mathbb{Q}}(G)$ であり，更に

$$\mathrm{RO}(G) = \mathrm{RO}_0(G) \oplus \overline{\mathrm{RO}}_{\mathbb{Q}}(G)$$

が成り立つ．

証明．$\mathrm{RO}(G)^{\mathrm{Gal}(G)} = \overline{\mathrm{RO}}_{\mathbb{Q}}(G)$ は式 (2.1) で記述している．そこで，次の 2 つの等式が成り立つことを証明すれば良い．

(i) $\mathrm{RO}(G) = \mathfrak{I}_{\mathrm{Gal}(G)}\mathrm{RO}(G) \oplus \overline{\mathrm{RO}}_{\mathbb{Q}}(G)$.

(ii) $\mathrm{RO}_0(G) = \mathfrak{I}_{\mathrm{Gal}(G)}\mathrm{RO}(G)$.

まず，(i) を示す．任意の $\mathfrak{I}_{\mathrm{Gal}(G)}\mathrm{RO}(G)$ の元 y は $\mathrm{RO}(G)$ の元 $x_\gamma = [V_\gamma] - [W_\gamma]$ を用いて

$$y = \sum_{\gamma \in \mathrm{Gal}(G)} a_\gamma (1-\gamma) x_\gamma \quad (a_\gamma \in \mathbb{Z})$$

と表される．このとき，任意の G の部分群 H に対し

$$\begin{aligned}\mathrm{Dim}_H(y) &= \sum_{\gamma \in \mathrm{Gal}(G)} a_\gamma (\mathrm{Dim}_H(x_\gamma) - \mathrm{Dim}_H(\gamma x_\gamma)) \\ &= \sum_{\gamma \in \mathrm{Gal}(G)} a_\gamma \left((\dim_{\mathbb{R}} V_\gamma^H - \dim_{\mathbb{R}}(\gamma V_\gamma)^H) - (\dim_{\mathbb{R}} W_\gamma^H - \dim_{\mathbb{R}}(\gamma W_\gamma)^H)\right)\end{aligned}$$

である．ここで，実 G-加群 U と G の部分群 K，$\psi \in \mathrm{Gal}(G)$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{R}}(\psi U)^K &= \frac{1}{|K|}\sum_{g\in K} \chi_{\psi U}(g) \\
&= \frac{1}{|K|}\sum_{g\in K} \psi(\chi_U(g)) \\
&= \psi\left(\frac{1}{|K|}\sum_{g\in K} \chi_U(g)\right) \\
&= \psi(\dim_{\mathbb{R}} U^K) \\
&= \dim_{\mathbb{R}} U^K
\end{aligned}
$$

より，上の $\mathrm{Dim}_H(y)$ について，$\mathrm{Dim}_H(y)=0$ が得られるので，$y \in \mathrm{RO}_0(G)$，すなわち $\mathfrak{I}_{\mathrm{Gal}(G)}\mathrm{RO}(G) \subset \mathrm{RO}_0(G)$ がいえる．x を任意の $\mathrm{RO}_0(G)\cap\overline{\mathrm{RO}}_{\mathbb{Q}}(G)$ の元とすると，ある自然数 k に対しある 2 つの有理 G-加群 V, W を用いて

$$
kx = [V\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}] - [W\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}]\ (\in \mathrm{RO}_{\mathbb{Q}}(G))
$$

と表される．$kx \in \mathrm{RO}_0(G)$ より，任意の G の部分群 H に対し $\dim_{\mathbb{R}}(V\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})^H = \dim_{\mathbb{R}}(W\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})^H$ であり，これは $\dim_{\mathbb{Q}} V^H = \dim_{\mathbb{Q}} W^H\ (\forall H \in \mathcal{S}(G))$ と同値である．従って，任意の G の巡回部分群 C に対し $\dim_{\mathbb{Q}} V^C = \dim_{\mathbb{Q}} W^C$ であるので，2 つの有理 G-加群 V, W は互いに同型である．従って，$kx=0$，すなわち $x=0$ が得られるので，$\mathrm{RO}_0(G)\cap\overline{\mathrm{RO}}_{\mathbb{Q}}(G)=0$ がいえ，$\mathfrak{I}_{\mathrm{Gal}(G)}\mathrm{RO}(G)\cap\overline{\mathrm{RO}}_{\mathbb{Q}}(G)=0$ が得られる．$A=\mathfrak{I}_{\mathrm{Gal}(G)}\mathrm{RO}(G)\oplus\overline{\mathrm{RO}}_{\mathbb{Q}}(G)$ とする．有限生成アーベル群の構造定理より，A は $\mathrm{RO}(G)$ の直和因子である．$x \in \mathrm{RO}(G)$ に対して

$$
|\mathrm{Gal}(G)|x = \sum_{\psi\in\mathrm{Gal}(G)}(1-\psi)x + \left(\sum_{\psi\in\mathrm{Gal}(G)}\psi\right)x \quad \in \mathfrak{I}_{\mathrm{Gal}(G)}\mathrm{RO}(G)+\mathrm{RO}(G)^{\mathrm{Gal}(G)},
$$

より $\mathrm{RO}(G)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \subset \langle\mathfrak{I}_{\mathrm{Gal}(G)}\mathrm{RO}(G)\rangle_{\mathbb{Q}} + \langle\overline{\mathrm{RO}}_{\mathbb{Q}}(G)\rangle_{\mathbb{Q}}$ がわかり，逆の包含関係も明らかより，

$$
\mathrm{RO}(G)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} = \langle\mathfrak{I}_{\mathrm{Gal}(G)}\mathrm{RO}(G)\rangle_{\mathbb{Q}} + \langle\overline{\mathrm{RO}}_{\mathbb{Q}}(G)\rangle_{\mathbb{Q}}.
$$

がいえる．従って，$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}A = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\mathrm{RO}(G)$ がわかり，

$$
\mathrm{RO}(G) = A = \mathfrak{I}_{\mathrm{Gal}(G)}\mathrm{RO}(G)\oplus\overline{\mathrm{RO}}_{\mathbb{Q}}(G)
$$

が得られる．

次に，(ii) を示す．$\mathfrak{I}_{\mathrm{Gal}(G)}\mathrm{RO}(G) \subset \mathrm{RO}_0(G)$ かつ $\mathrm{RO}_0(G) \cap \overline{\mathrm{RO}}_{\mathbb{Q}}(G) = 0$ より，

$$\mathrm{RO}_0(G) = \mathfrak{I}_{\mathrm{Gal}(G)}\mathrm{RO}(G)$$

が得られる．

(i), (ii) より，補題 2.3 が得られる．　□

注意 2.2. 2 つの有理 G-加群 V, W が同型であることの必要十分条件は，すべての G の巡回部分群 C に対して $\dim_{\mathbb{Q}} V^C = \dim_{\mathbb{Q}} W^C$ が成り立つことであることがよく知られている．

3 Oliver 群の d-Smith 集合

本節では，Oliver 群の d-Smith 集合に関する次の結果の証明を与える．

定理 1.1. $G^{\mathrm{nil}} = G^{\cap 2}$ を満たす任意の Oliver 群 G に対し，

$$\mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)} \subset \mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) \subset \mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}^*(G)}$$

が成り立つ．

定理 1.1 より，次の系が直ちに得られる．

系 3.1 ([Sei22, Corollary 4.1])**.** G を，$G^{\mathrm{nil}} = G^{\cap 2}$ を満たす任意の *Oliver* 群とする．G が，次の 2 つの条件

(1) $G^{\cap 2}$ は奇数位数．

(2) すべての位数が 2-冪である G の巡回部分群 C に対して $\mathrm{res}^G_C \mathrm{RO}_0(G) = 0$ を満たす．

のいずれかを満たすならば，$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) = \mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)}$ が成り立つ．

証明. 条件 (1), (2) のいずれかを満たすならば $\mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)} = \mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}^*(G)}$ がいえるので，定理 1.1 より $\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) = \mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)}$ が得られる．　□

次の補題はよく知られており， Smith の定理と呼ばれている．

補題 3.2 ([Sm60])**.** p を素数とし，G が p-冪位数であるとき，G のホモトピー球面 Σ 上の滑らかな作用に対して，Σ^G は $\mathbb{Z}_p$-ホモロジー球面である．

補題 3.3. G を有限群とし，H は位数が 1, 2 または 4 である G の部分群とする．もし 2 つの実 G-加群 V, W が *Smith* 同値ならば，$\mathrm{res}^G_H V$ と $\mathrm{res}^G_H W$ は同型である．

証明. Σ を，$\Sigma^G = \{x, y\}, V \cong T_x(\Sigma), W \cong T_y(\Sigma)$ となるような G-作用を持つホモトピー球面とする．K を H の部分群とする．$|K|$ は 2-冪であるので, 補題 3.2 より Σ^K は $\mathbb{Z}_2$-ホモロジー球面であり，そして Σ^K は連結または $\Sigma^K = \{x,\, y\}$ である．これは $\dim_{\mathbb{R}} V^K = \dim_{\mathbb{R}} W^K$ を意味する．$|H| \in \{1, 2, 4\}$ であるので，$\mathrm{res}^G_H V \cong \mathrm{res}^G_H W$ が得られる． □

補題 3.4. G を *Oliver* 群，V と W を $\mathcal{L}(G)$*-free* な実 G-加群とする．V と W が $\mathcal{P}(G)$-*matched* であり，任意の G の部分群 H に対し $\dim_{\mathbb{R}} V^H = \dim_{\mathbb{R}} W^H$ であるならば，元 $x = [V] - [W]$ は $\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G)$ に属する．

証明. 定義より，$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) = \mathfrak{S}(G) \cap \mathrm{RO}_0(G)$ である．仮定より，$x = [V] - [W]$ は $\mathrm{RO}_0(G)$ に属する．[Mo12, Theorem 6.7] より，x が $\mathfrak{S}(G)$ に属することがわかる．従って，$x \in \mathfrak{d}\mathfrak{S}(G)$ がいえる． □

注意 3.1. 補題 3.4 より，任意の Oliver 群 G に対して $\mathrm{RO}_0(G)^{\mathcal{L}(G)}_{\mathcal{P}(G)} \subset \mathfrak{d}\mathfrak{S}(G)$ が成り立つことがわかる．

補題 3.5. 有限群 G とその正規部分群 N に対し，

$$\mathrm{RO}_0(G) = \mathrm{RO}_0(G/N) \oplus \mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}$$

が成り立つ．

証明. 次の短完全系列について考える．

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\mathrm{fix}^G_{G/N}) \xhookrightarrow{\ i\ } \mathrm{RO}_0(G) \xrightarrow{\mathrm{fix}^G_{G/N}} \mathrm{RO}_0(G/N) \longrightarrow 0\,.$$

但し，i は包含写像であり，写像 $\mathrm{fix}^G_{G/N} : \mathrm{RO}_0(G) \to \mathrm{RO}_0(G/N)$ を

$$\mathrm{fix}^G_{G/N}([V] - [W]) = [V^N] - [W^N]$$

により定める．$\mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}} = \mathrm{Ker}(\mathrm{fix}^G_{G/N})$ を示せば十分である．$\mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}} \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{fix}^G_{G/N})$ は明らかであるので，$\mathrm{Ker}(\mathrm{fix}^G_{G/N}) \subset \mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}$ を示せば良い．$x = [V] - [W]$ を任意の $\mathrm{Ker}(\mathrm{fix}^G_{G/N})$ の元とする．V, W はいずれも実 G-加群であるので，ある $[V_N]$, $[W_N] \in \mathrm{RO}(G)^{\{N\}}$ を用いて $V = V^N \oplus V_N$, $W = W^N \oplus W_N$ と表される．$x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{fix}^G_{G/N})$ より $[V^N] = [W^N]$ であるので，

$$x = [V^N \oplus V_N] - [W^N \oplus W_N] = [V_N] - [W_N] \in \mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}},$$

すなわち $\mathrm{Ker}(\mathrm{fix}^G_{G/N}) \subset \mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}$ が得られる． □

定理 *1.1* の証明*.* G を Oliver 群とする．補題 3.4 より，$\mathrm{RO}_0(G)^{\mathcal{L}(G)}_{\mathcal{P}(G)} \subset \mathfrak{d}\mathfrak{S}(G)$ である．補題 3.3 と C. U. Sanchez [Sa76, Corollary 1.11] より，$\mathfrak{S}(G) \subset \mathrm{RO}(G)_{\mathcal{P}^*(G)}$ である．従って，

$$\mathrm{RO}_0(G)^{\mathcal{L}(G)}_{\mathcal{P}(G)} \subset \mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) \subset \mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}^*(G)}$$

が得られる．補題 3.5 より $\mathrm{RO}_0(G) = \mathrm{RO}_0(G/G^{\cap 2}) \oplus \mathrm{RO}_0(G)^{\{G^{\cap 2}\}}$ が得られ，$\mathrm{RO}_0(G/G^{\cap 2}) = 0$ であるので，$\mathrm{RO}_0(G)^{\{G^{\cap 2}\}} = \mathrm{RO}_0(G)$ がいえる．$G^{\mathrm{nil}} = G^{\cap 2}$ であるので，$\mathrm{RO}_0(G)^{\mathcal{L}(G)}_{\mathcal{P}(G)} = \mathrm{RO}_0(G)^{\{G^{\cap 2}\}}_{\mathcal{P}(G)}$ がいえる．$\mathrm{RO}_0(G)^{\mathcal{L}(G)}_{\mathcal{P}(G)} = \mathrm{RO}_0(G)^{\{G^{\cap 2}\}}_{\mathcal{P}(G)}$, $\mathrm{RO}_0(G)^{\{G^{\cap 2}\}} = \mathrm{RO}_0(G)$ より，$\mathrm{RO}_0(G)^{\mathcal{L}(G)}_{\mathcal{P}(G)} = \mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)}$ がいえるので，

$$\mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)} \subset \mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) \subset \mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}^*(G)}$$

が得られる． □

4　交代群の d-Smith 集合

本節では，$G = S_m$, A_m の d-Smith 集合に関する研究結果である定理 1.2, 1.4 の証明と，定理 1.4 が持つ系について記述する．

　更に本節では，対称群と交代群の表現論の基礎知識を扱う．詳細は，W. Fulton–J. Harris [FH91]，G. James–A. Kerber [JK84] を参照せよ．

　まず，定理 1.2, 1.4 を思い出す．

定理 1.2. 自然数 m に対し，$G = S_m$ とする．このとき，$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) = \mathrm{RO}_0(G) = 0$ である．

定理 1.4. 自然数 m に対し $G = A_m$ とする．このとき，$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) = \mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)}$ であり，$\mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)}$ の $\mathbb{Z}$ 上の階数は $\rho(m)$ である．

定理 1.4 は，次の系を持つ．

系 4.1 ([Sei22, Corollary 1.5])**.** $\mathfrak{d}\mathfrak{S}(A_m) = \{0\}$ であることの必要十分条件は，

$$m \in \{1,\ 2, \ldots,\ 9,\ 12,\ 13,\ 17\}$$

である．

注意 4.1. $\pi(m) = 0$ であることの必要十分条件は，$m \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 7,\ 8,\ 12\}$ である．

m を自然数，g を S_m の元とする．r 個の disjoint cycle $g_i = (g_{i,1}, g_{i,2}, \ldots, g_{i,\tau_i})(1 \leq i \leq r)$ が，$g = g_1 g_2 \cdots g_r, \tau_1 \geq \tau_2 \geq \cdots \geq \tau_r, m = \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_r$ をすべて満たすとき，$g_1 g_2 \cdots g_r$ を g の**サイクル分解**という．上の $g \in S_m$ に対し，m の分割 $\tau(g)$ を $\tau(g) = (\tau_1,\ \tau_2,\ \ldots,\ \tau_r)$ により定める．任意の m の分割は，ある $g \in S_m$ を用いて $\tau(g)$ と表すことができる．m の分割 t により，Young 対称子 $c_t \in \mathbb{Z}[S_m]$ が定まる（[FH91, p.46, (4.2)] をみよ）．$\mathbb{C}$ の部分体 F に対し，$F[S_m]c_t$ を右から c_t を $F[S_m]$ に作用させた像とする．

注意 4.2 ([FH91, Theorem 4.3]). 任意の分割 t に対し，$c_t^2 = n_t c_t$ を満たす自然数 n_t が存在し，$V_t = \mathbb{C}[S_m]c_t$ は既約な複素 S_m-加群である．

注意 4.3 ([FH91, Lemma 4.25]). 任意の $g,\ h \in S_m$ に対し，$V_{\tau(g)}$ と $V_{\tau(h)}$ が同型であることの必要十分条件は，$(g)_{S_m} = (h)_{S_m}$ である．

$\mathcal{F}_{S_m}$ を S_m の元の S_m-共役類の完全代表系とする．このとき，集合 $\{[V_{\tau(g)}] \mid g \in \mathcal{F}_{S_m}\}$ が $\mathrm{R}(S_m)$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底になることがよく知られており，これより次の事実が得られる．

命題 4.2. 集合 $\{[\mathbb{Q}[S_m]c_{\tau(g)}] \mid g \in \mathcal{F}_{S_m}\}, \{[\mathbb{R}[S_m]c_{\tau(g)}] \mid g \in \mathcal{F}_{S_m}\}$ は，それぞれ $\mathrm{R}(S_m, \mathbb{Q})$, $\mathrm{RO}(S_m)$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底である．

証明. $F = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ に対し，すべての $F[S_m]c_{\tau(g)}$ が既約であることを示せば良い．$F[S_m]c_{\tau(g)}$ が可約だと仮定すれば，$F[S_m]c_{\tau(g)} \otimes_F \mathbb{C} = V_{\tau(g)}$ も可約になり，$V_{\tau(g)}$ が既約であることに矛盾する． $\square$

定理 *1.2* の証明．$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(S_m) \subset \mathrm{RO}_0(S_m)$ であるので，$\mathrm{RO}_0(S_m) = 0$ を示せば十分である．任意の $g \in S_m$ に対し $\mathbb{R}[S_m]c_{\tau(g)} = \mathbb{Q}[S_m]c_{\tau(g)} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ であるので，命題 4.2 より，

$$\mathrm{RO}(S_m) = \langle [\mathbb{Q}[S_m]c_{\tau(g)} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}] \mid g \in \mathcal{F}_{S_m} \rangle_{\mathbb{Z}} = \mathrm{RO}_{\mathbb{Q}}(S_m)$$

が得られる．$\mathrm{RO}_{\mathbb{Q}}(S_m) \subset \overline{\mathrm{RO}}_{\mathbb{Q}}(S_m) \subset \mathrm{RO}(S_m)$ であるので，$\mathrm{RO}(S_m) = \overline{\mathrm{RO}}_{\mathbb{Q}}(S_m)$ が得られ，補題 2.3 より $\mathrm{RO}_0(S_m) = 0$ がいえる． □

m の分割 t に対し，t と共役な分割 t' を，t に対応する Young 図形の行と列を入れ替えた Young 図形に対応する m の分割とする．$\mathbb{C}_{\pm}$ を非自明な 1 次元の複素 S_m-加群とする．このとき，$V_{t'}$ は $V_t \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\pm}$ と複素 S_m-加群として同型である．共役により与えられる C_2-作用を持つ m の分割全体の集合を $\mathcal{T}$ とする．更に，$\Lambda_{\text{s-conj}}$ を m の自己共役な分割全体の集合，$\Lambda^*(\subset \mathcal{T})$ を C_2-軌道集合の完全代表系とする．定義より，$\Lambda_{\text{s-conj}} = \mathcal{T}^{C_2}$, $\Lambda^* = (\mathcal{T} \smallsetminus \Lambda_{\text{s-conj}})/C_2$ である．

A_1 は単位群なので，$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(A_1) = \mathrm{RO}_0(A_1)_{\mathcal{P}(A_1)} = 0$ は明らかである．本節でこれ以降は，m は 2 以上の整数，g を A_m の元，a を S_m の奇置換とする．もし g が $(g)_{S_m} \neq (g)_{A_m}$ を満たすならば，g は **split** であるという．g が split ならば，$(g)_{S_m} = (g)_{A_m} \amalg (aga^{-1})_{A_m}$ が成り立つ．もし g が $(g)_{A_m} = (g^{-1})_{A_m}$ を満たすならば，g は **real** であるといい，g が real でないとき，g は **complex** であるという．g が complex ならば，g は $(g^{-1})_{A_m} = (aga^{-1})_{A_m}$ を満たす split な元であることは明らかである．また，g が $(g)_{A_m} = (aga^{-1})_{A_m}$ を満たすとき，g は **rational** であるという．g が rational であることと g が split でないことは同値である．

次の記号を定める．

$$\mathcal{A}_1 = \{(x)_{S_m} \mid x \in A_m,\ x \text{ は split かつ real}\}.$$

$$\mathcal{A}_2 = \{(x)_{S_m} \mid x \in A_m,\ x \text{ は complex}\}.$$

$$\mathcal{A}_3 = \{(x)_{S_m} \mid x \in A_m,\ x \text{ は rational}\}.$$

$i = 1, 2, 3$ に対し，$\mathcal{F}_i\ (\subset A_m)$ を $\mathcal{A}_i$ に属する S_m-共役類の完全代表系とする．

$t = (t_1, t_2, \ldots, t_r)$ を m の分割とする．$t_1, t_2, \ldots, t_r$ が相異なる（$t_1 > t_2 > \cdots > t_r$ を満たす）奇数であるとき，t を **split** であるという．次の 2 つの補題は古典的な結果である．（[FH91, Section 5.1]，特に [FH91, Proposition 5.3] を見よ．）

補題 4.3. g を A_m の元，τ を g のサイクル分解に対応する m の分割とする．

(1) g が *split* であることの必要十分条件は，τ が *split* であることである．

(2) g が *split* で，τ の長さを r とする．このとき，g が *real* であることの必要十分条件は，$m-r\equiv 0 \mod 4$ が成り立つことである．

Λ_{sp} を m の split な分割全体の集合とする．$t=(t_1, t_2, \ldots, t_\ell)\in\Lambda_{\text{s-conj}}$ に対し，t に対応する Young 図形のフック長をとると，split な m の分割 $\omega\ (=\omega(t))=(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r)$ をとることができる．このとき，$\omega_1=2t_1-1, \omega_2=2t_2-3, \omega_3=2t_3-5, \ldots$ である．逆に，$t\in\Lambda_{\mathrm{sp}}$ に対して，$\omega(\lambda)=t$ を満たす自己共役な分割 $\lambda\ (=\lambda(t))$ が一意的に定まる．従って，2 つの対応 $\Lambda_{\text{s-conj}}\xrightarrow{\omega}\Lambda_{\mathrm{sp}}$ と $\Lambda_{\mathrm{sp}}\xrightarrow{\lambda}\Lambda_{\text{s-conj}}$ は全単射である．

補題 4.4. g を A_m の元，a を S_m の元で奇置換であるものとする．

(1) g が *split* かつ *real* であるとし，$\lambda=\lambda(\tau(g))$ とおく．このとき，$\mathrm{res}^{S_m}_{A_m}\mathbb{Q}[S_m]c_\lambda$ は既約であり，$\mathrm{res}^{S_m}_{A_m}\mathbb{R}[S_m]c_\lambda$ は

$$\mathrm{res}^{S_m}_{A_m}V_\lambda=(U_{g,+}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})\oplus(U_{g,-}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})$$

を満たす互いに同型でない既約な実 A_m-加群 $U_{g,+}$ と $U_{g,-}$ の直和である．また，A_m の元 h に対して，$\chi_{U_{g,+}}(aha^{-1})=\chi_{U_{g,-}}(h)$ が成り立ち，$(h)_{S_m}\neq(g)_{S_m}$ を満たす $h\in A_m$ に対して $\chi_{U_{g,+}}(h)=\chi_{U_{g,-}}(h)$ が成り立つ．更に，$\sqrt{q(g)}\notin\mathbb{Q}$ を満たす特定の自然数 $q(g)$ に対し

$$\chi_{U_{g,+}}(g)=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{q(g)}\right),\quad \chi_{U_{g,-}}(g)=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{q(g)}\right),$$

が成り立つ．

(2) g が *complex* であるとし，$\lambda=\lambda(\tau(g))$ とおく．このとき，$\mathrm{res}^{S_m}_{A_m}\mathbb{Q}[S_m]c_\lambda$ と $\mathrm{res}^{S_m}_{A_m}\mathbb{R}[S_m]c_\lambda$ は既約であり，$\mathrm{res}^{S_m}_{A_m}V_\lambda$ は $\overline{W}_{g,+}\cong W_{g,-}$ を満たす互いに同型でない複素型の既約な実 A_m-加群 $W_{g,+}$ と $W_{g,-}$ の直和である．但し，$\overline{W}_{g,+}$ は $W_{g,+}$ の複素共役な実 A_m-加群を表す．また，A_m の元 h に対して，$\chi_{W_{g,+}}(aha^{-1})=\chi_{W_{g,-}}(h)$ が成り立ち，

$(h)_{S_m} \neq (g)_{S_m}$ を満たす $h \in A_m$ に対し $\chi_{W_{g,+}}(h) = \chi_{W_{g,-}}(h)$ が成り立つ．更に，特定の自然数 $q(g)$ に対し

$$\chi_{W_{g,+}}(g) = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{-q(g)}\right),\quad \chi_{W_{g,-}}(g) = \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{-q(g)}\right),$$

が成り立つ．

(3) t を自己共役でない m の分割，すなわち $t \notin \Lambda_{\text{s-conj}}$ であるとする．このとき，$\mathrm{res}^{S_m}_{A_m}\mathbb{Q}[S_m]c_t$, $\mathrm{res}^{S_m}_{A_m}\mathbb{R}[S_m]c_t$, $\mathrm{res}^{S_m}_{A_m}V_t$ はいずれも既約である．

注意 4.4. $\tau(g) = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r)$ を m の分割とする．このとき，補題 4.4 の $q(g)$ は $q(g) = \tau_1\tau_2\cdots\tau_r$ である．

このとき，次の事実が直ちに得られる．

命題 4.5. 次の (1), (2), (3) がいえる．

(1) 集合

$$\{[\mathrm{res}^{S_m}_{A_m}\mathbb{Q}[S_m]c_{\lambda(\tau(g))}] \mid g \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2\} \cup \{[\mathrm{res}^{S_m}_{A_m}\mathbb{Q}[S_m]c_t] \mid t \in \Lambda^*\}$$

は $\mathrm{R}(A_m, \mathbb{Q})$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底となる．

(2) 集合

$$\{[U_{g,+}],\ [U_{g,-}] \mid g \in \mathcal{F}_1\} \cup \{[W_{g,+\mathbb{R}}] \mid g \in \mathcal{F}_2\} \cup \{[\mathrm{res}^{S_m}_{A_m}\mathbb{R}[S_m]c_t] \mid t \in \Lambda^*\}$$

は $\mathrm{RO}(A_m)$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底となる．但し，$W_{g,+\mathbb{R}}$ は $W_{g,+}$ の実化を表す．

(3) 集合

$$\{[U_{g,+} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}],\ [U_{g,-} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}] \mid g \in \mathcal{F}_1\} \cup \{[W_{g,+}],\ [W_{g,-}] \mid g \in \mathcal{F}_2\}$$
$$\cup \{[\mathrm{res}^{S_m}_{A_m}V_t] \mid t \in \Lambda^*\}$$

は $\mathrm{R}(A_m)$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底となる．

命題 4.6. g を $\mathcal{F}_1$ の元とする．任意の偶数位数の A_m の元 h に対し，

$$\chi_{U_{g,+}}(h) = \chi_{U_{g,-}}(h)$$

が成り立つ．

証明．$a \in S_m$ を奇置換であるとする．h は偶数位数なので，h は rational であり，$(h)_{A_m} = (aha^{-1})_{A_m}$ がいえる．従って，

$$\chi_{U_{g,+}}(h) = \chi_{U_{g,+}}(aha^{-1}) = \chi_{U_{g,-}}(h)$$

である． $\square$

命題 4.7. $\mathcal{P}$ を素数冪である自然数全体の集合とする．

(1) 集合 $\{[U_{g,+}] - [U_{g,-}] \mid g \in \mathcal{F}_1\}$ は $\mathrm{RO}_0(A_m)$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底となる．

(2) 集合 $\{[U_{g,+}] - [U_{g,-}] \mid g \in \mathcal{F}_1$ かつ $\mathrm{ord}(g) \notin \mathcal{P}\}$ は $\mathrm{RO}_0(A_m)_{\mathcal{P}(A_m)}$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底となる．

証明．(1) $\mathrm{RO}(A_m) = \mathrm{RO}_0(A_m) \oplus \overline{\mathrm{RO}}_{\mathbb{Q}}(A_m)$ が成り立つことを思い出す．命題 4.5 より，集合

$$\{[U_{g,+}] - [U_{g,-}],\ [U_{g,+}] \mid g \in \mathcal{F}_1\} \cup \{[W_{g,+\mathbb{R}}] \mid g \in \mathcal{F}_2\} \cup \{[\mathrm{res}^{S_m}_{A_m} \mathbb{R}[S_m]c_t] \mid t \in \Lambda^*\}$$

は $\mathrm{RO}(A_m)$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底となることがわかる．ψ を $\sqrt{q(g)}$ を $-\sqrt{q(g)}$ に写す $\mathrm{Gal}(A_m)$ の元とすると，$U_{g,-} \cong \psi U_{g,+}$，すなわち $U_{g,+}$ と $U_{g,-}$ は互いに Galois 共役であるので（[Ser77, Section 12.4] を参照せよ），集合 $\mathcal{U} = \{[U_{g,+}] - [U_{g,-}] \mid g \in \mathcal{F}_1\}$ は $\mathrm{RO}_0(A_m)$ に含まれる．

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\mathrm{RO}_0(A_m) = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\mathrm{RO}(A_m) - \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\mathrm{RO}_{\mathbb{Q}}(A_m) = |\mathcal{F}_1|$$

より，$\mathcal{U}$ が $\mathrm{RO}_0(A_m)$ の基底となることがわかる．

(2) $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}$ を，real かつ split であり素数冪位数でない A_m の元 g に対する $[U_{g,+}] - [U_{g,-}]$ からなる集合とする．X_m を，A_m の元 g を代表元とする実共役類 $(g)^{\pm}_{A_m}$ の集合とする．

このとき，$\mathbb{R}$-加群の同型写像

$$\Psi : \mathrm{RO}(A_m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Map}(X_m, \mathbb{R})$$

が $\Psi([U])((h)^{\pm}_{A_m}) = \chi_U(h)$ により与えられる．g を $\mathcal{F}_1$ の元，a を S_m の元で，奇置換であるものとする．補題 4.4 より，

$$\Psi([U_{g,+}] - [U_{g,-}])(h) = \begin{cases} 0 & \text{if } (h)_{S_m} \neq (g)_{S_m} \\ \sqrt{q(g)} & \text{if } (h)_{S_m} = (g)_{S_m}, \end{cases}$$

及び

$$\Psi([U_{g,+}]-[U_{g,-}])(aha^{-1}) = -\Psi([U_{g,+}]-[U_{g,-}])(h) \quad (h \in A_m)$$

が得られる．

$$x = \sum_{g \in \mathcal{F}_1} a_g([U_{g,+}]-[U_{g,-}]) \quad (a_g \in \mathbb{Z})$$

を $\mathrm{RO}_0(A_m)_{\mathcal{P}(A_m)}$ の元とする．素数冪位数の $g \in \mathcal{F}_1$ に対して，

$$\Psi(x)(g) = a_g\sqrt{q(g)} = 0$$

であるので，$a_g = 0$ が得られる．従って，$\mathrm{RO}_0(A_m)_{\mathcal{P}(A_m)}$ は $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}$ により生成される $\mathrm{RO}(A_m)$ の部分加群 $\langle \mathcal{U}_{\mathcal{P}} \rangle_{\mathbb{Z}}$ に含まれる．$\mathcal{U}_{\mathcal{P}} \subset \mathrm{RO}_0(A_m)_{\mathcal{P}(A_m)}$ であるので，$\mathrm{RO}_0(A_m)_{\mathcal{P}(A_m)} = \langle \mathcal{U}_{\mathcal{P}} \rangle_{\mathbb{Z}}$ がわかる．よって，$\mathcal{U}_{\mathcal{P}}$ は $\mathrm{RO}_0(A_m)_{\mathcal{P}(A_m)}$ の基底となる． □

系 4.8. $\mathcal{P}$ を素数冪である自然数全体の集合とする．

(1) $\mathrm{RO}_0(A_m)$ の $\mathbb{Z}$ 上の階数は，$\tau(g)$ が相異なる奇数からなり，$\tau(g)$ の長さを r としたときに $m - r \equiv 0 \mod 4$ を満たすような，$g \in A_m$ の S_m-共役類 $(g)_{S_m}$ の個数と等しい．

(2) $\mathrm{RO}_0(A_m)_{\mathcal{P}(A_m)}$ の $\mathbb{Z}$ 上の階数は，$\tau(g)$ が相異なる奇数からなり，$\tau(g) = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r)$ としたときに $m - r \equiv 0 \mod 4$, $\tau_1\tau_2\ldots\tau_r \notin \mathcal{P}$ を満たすような，$g \in A_m$ の S_m-共役類 $(g)_{S_m}$ の個数と等しい．

注意 4.5. 補題 4.3, 命題 4.7 (1) と系 4.8 (1) より $|\mathcal{F}_1| = \pi(m)$ が得られ，更に $\mathrm{RO}_0(A_m)$ の $\mathbb{Z}$ 上の階数は $\pi(m)$ であることがわかる．

定理 *1.4* の証明. 自然数 m に対し，$G = A_m$ とおく．系 3.1 より $\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) = \mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)}$ が得られ，命題 4.6 と 系 4.8 (2) より，$\mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)}$ の $\mathbb{Z}$ 上の階数が $\rho(m)$ の値と等しいことがわかる． □

系 *4.1* の証明. $m \leq 9$ または $m \in \{12, 13, 17\}$ の場合，直接的な計算により $\rho(m) = 0$ が得られるので，このとき $\mathfrak{d}\mathfrak{S}(A_m) = \{0\}$ であることがわかる．$I = \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 10\} \setminus \{12, 13, 17\}$ とおく．任意の $m \in I$ に対し，$\rho(m) > 0$ がいえることを示せば良い．次の 4 つの場合分けをし，それぞれに対し $\rho(m) > 0$ が成り立つことを示す．

(i) $m \equiv 0 \mod 4$ **かつ** $m \geq 16$ **の場合.**

k を自然数，$m = 4k \geq 16$ とする．このとき，m の分割 $t = (m-9,\, 5,\, 3,\, 1)$ が，条件 (P1)–(P4) を満たす.

従って，$m \equiv 0 \mod 4$ かつ $m \geq 16$ の場合，$\rho(m) > 0$ がいえる.

(ii) $m \equiv 1 \mod 4$ **かつ** $m \geq 21$ **の場合.**

k を自然数，m は素数冪でない 21 以上の整数 $4k+1$ とする．このとき，m の分割 $t = (m)$ が，条件 (P1)–(P4) を満たす.

k を自然数，$m = 4k+1 \geq 25$ とする．このとき，m の分割 $t = (m-16,\, 7,\, 5,\, 3,\, 1)$ が，条件 (P1)–(P4) を満たす.

従って，$m \equiv 1 \mod 4$ かつ $m \geq 21$ の場合，$\rho(m) > 0$ がいえる.

(iii) $m \equiv 2 \mod 4$ **かつ** $m \geq 10$ **の場合.**

k を自然数，m は $m-3$ が 3-冪とならないような 10 以上の整数 $4k+2$ とする．このとき，m の分割 $t = (m-3,\, 3)$ が，条件 (P1)–(P4) を満たす.

k を自然数，m は $m-7$ が 7-冪とならないような 18 以上の整数 $4k+2$ とする．このとき，m の分割 $t = (m-7,\, 7)$ が，条件 (P1)–(P4) を満たす.

k を自然数，$m = 4k+2 \geq 38$ とする．このとき，m の分割 $t = (m-25,\, 9,\, 7,\, 5,\, 3,\, 1)$ が，条件 (P1)–(P4) を満たす.

従って，$m \equiv 2 \mod 4$ かつ $m \geq 10$ の場合，$\rho(m) > 0$ がいえる.

(iv) $m \equiv 3 \mod 4$ **かつ** $m \geq 11$ **の場合.**

k を自然数，m は $m-4$ が 3-冪とならないような 11 以上の整数 $4k+3$ とする．このとき，m の分割 $t = (m-4,\, 3,\, 1)$ が，条件 (P1)–(P4) を満たす.

k を自然数，$m = 4k+3 \geq 15$ とする．このとき，m の分割 $t = (m-8,\, 5,\, 3)$ が，条件 (P1)–(P4) を満たす.

従って，$m \equiv 3 \mod 4$ かつ $m \geq 11$ の場合，$\rho(m) > 0$ がいえる.

以上より，任意の $m \in I$ に対し，$\rho(m) > 0$ が成り立つことがわかる. $\square$

5　群 $A_m \times C_2 \times \cdots \times C_2$ の d-Smith 集合

本節では，$G = S_m \times C_2 \times \cdots \times C_2$, $A_m \times C_2 \times \cdots \times C_2$ の d-Smith 集合に関する研究結果である定理 1.3, 1.5 の証明と，定理 1.5 が持つ系について記述する．また，節 4 で現れた記号はそのまま扱う．

まず，定理 1.3 を思い出し，更にその証明を与える．

定理 1.3. 2 つの自然数 m, n に対し，$G = S_m \times C_2^n$ とする．このとき，$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) = \mathrm{RO}_0(G) = 0$ である．

証明. $G = S_m \times C_2^n$ とおく．$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) \subset \mathrm{RO}_0(G)$ であるので，$\mathrm{RO}_0(G) = 0$ を示せば十分である．x, y, ψ をそれぞれ $\mathrm{RO}(S_m)$, $\mathrm{RO}(C_2^n)$, $\mathrm{Gal}(S_m \times C_2^n)$ の任意の元とする．すべての $g \in S_m \times C_2^n$ に対する $x \otimes_{\mathbb{R}} y$ の指標の値は有理数であるので，$\chi_{\psi(x \otimes_{\mathbb{R}} y)} = \chi_{x \otimes_{\mathbb{R}} y}$ ，すなわち $\psi(x \otimes_{\mathbb{R}} y) \cong x \otimes_{\mathbb{R}} y$ が得られ，$\mathrm{RO}_0(G) = 0$ がいえる． □

次に，定理 1.5 を思い出す．

定理 1.5. 2 つの自然数 m, n に対し，$G = A_m \times C_2^n$ とする．このとき，$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) = \mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)}$ であり，$\mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)}$ の $\mathbb{Z}$ 上の階数は $\kappa(m, n)$ である．

定理 1.5 は，次の系を持つ．

系 5.1 ([Sei22, Corollary 1.7])**.** 2 つの自然数 m, n に対し，$G = A_m \times C_2^n$ とする．このとき，$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) = \{0\}$ であることの必要十分条件は $m \in \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 12\}$ である．

m, n を自然数とし，$G = A_m \times C_2^n$ とおく．ここから命題 5.3 までは，m は 2 以上の自然数とする．自然数 k に対して $I_k = \{1, 2, \ldots, k\}$ と定め，$V_1, V_2, \ldots, V_{2^n}$ を互いに同型でない既約な実 C_2^n-加群の全体とする．このとき，集合

$$\{[U_{g,+} \otimes_{\mathbb{R}} V_i],\ [U_{g,-} \otimes_{\mathbb{R}} V_i] \mid g \in \mathcal{F}_1, i \in I_{2^n}\} \cup \{[W_{g,+_{\mathbb{R}}} \otimes_{\mathbb{R}} V_i] \mid g \in \mathcal{F}_2,\ i \in I_{2^n}\}$$
$$\cup \{[(\mathrm{res}^{S_m}_{A_m} \mathbb{R}[S_m]c_t) \otimes_{\mathbb{R}} V_i] \mid t \in \Lambda^*,\ i \in I_{2^n}\}$$

は $\mathrm{RO}(G)$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底となる．

命題 5.2. 集合 $\{[U_{g,+} \otimes_{\mathbb{R}} V_i] - [U_{g,-} \otimes_{\mathbb{R}} V_i] \mid g \in \mathcal{F}_1,\, i \in I_{2^n}\}$ は，$\mathrm{RO}_0(G)$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底となる．

証明. $\mathrm{RO}(G) = \mathrm{RO}_0(G) \oplus \overline{\mathrm{RO}}_{\mathbb{Q}}(G)$ が成り立つことを思い出す．集合

$$\begin{aligned}&\{[U_{g,+} \otimes_{\mathbb{R}} V_i] - [U_{g,-} \otimes_{\mathbb{R}} V_i],\ [U_{g,+} \otimes_{\mathbb{R}} V_i] \mid g \in \mathcal{F}_1, i \in I_{2^n}\}\\ &\qquad \cup \{[W_{g,+\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} V_i] \mid g \in \mathcal{F}_2,\, i \in I_{2^n}\} \cup \{[(\mathrm{res}^{S_m}_{A_m} \mathbb{R}[S_m]c_t) \otimes_{\mathbb{R}} V_i] \mid t \in \Lambda^*,\, i \in I_{2^n}\}\end{aligned}$$

は $\mathrm{RO}(G)$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底となる．ψ を $\sqrt{q(g)}$ を $-\sqrt{q(g)}$ に写す $\mathrm{Gal}(G)$ の元とすると，$U_{g,-} \otimes_{\mathbb{R}} V_i \cong \psi(U_{g,+} \otimes_{\mathbb{R}} V_i)$，すなわち $U_{g,+} \otimes_{\mathbb{R}} V_i$ と $U_{g,-} \otimes_{\mathbb{R}} V_i$ は互いに Galois 共役であるので，集合 $\mathcal{V} = \{[U_{g,+} \otimes_{\mathbb{R}} V_i] - [U_{g,-} \otimes_{\mathbb{R}} V_i] \mid g \in \mathcal{F}_1,\, i \in I_{2^n}\}$ は $\mathrm{RO}_0(G)$ に含まれる．もし W が既約な A_m-加群ならば，任意の $\psi \in \mathrm{Gal}(G), i \in I_{2^n}$ に対し $\psi(W \otimes_{\mathbb{R}} V_i) = (\psi W) \otimes_{\mathbb{R}} V_i$ が成り立つ．従って任意の $\mathrm{RO}_0(G)$ の元は，W が既約な実 A_m-加群，$i \in I_{2^n}$，$(\psi W) \otimes_{\mathbb{R}} V_i$ が実 G-加群となるような $[W \otimes_{\mathbb{R}} V_i] - [(\psi W) \otimes_{\mathbb{R}} V_i]$ の $\mathbb{Z}$ 上の線型結合で表される．更に，すべての $g \in \mathcal{F}_1$ に対し W と $U_{g,\pm}$ が互いに同型でないならば，$\mathrm{Im}(\chi_W) \subset \mathbb{Q}$ であるので，任意の $\psi \in \mathrm{Gal}(G)$ に対して $W \otimes_{\mathbb{R}} V_i$ と $\psi(W \otimes_{\mathbb{R}} V_i)$ は互いに同型であることがわかる．よって，$\mathrm{RO}_0(G) \subset \langle \mathcal{V} \rangle_{\mathbb{Z}}$，すなわち $\mathrm{RO}_0(G) = \langle \mathcal{V} \rangle_{\mathbb{Z}}$ が得られる． □

注意 5.1. 命題 5.2 より，$\mathrm{RO}_0(G)$ の $\mathbb{Z}$ 上の階数が $2^n \pi(m)$ であることがわかる．

$\mathcal{F}_{11}$ を素数冪位数である $g \in \mathcal{F}_1$ 全体の集合，$\mathcal{F}_{12}$ を $\mathcal{F}_{11}$ の補集合 $\mathcal{F}_1 \smallsetminus \mathcal{F}_{11}$，すなわち素数冪位数でない $g \in \mathcal{F}_1$ 全体の集合とする．$g \in \mathcal{F}_1,\, i \in I_{2^n}$ に対し，$u_{g,i} = [U_{g,+} \otimes_{\mathbb{R}} V_i] - [U_{g,-} \otimes_{\mathbb{R}} V_i]$ とおく．

命題 5.3. 集合

$$\{u_{g,i} - u_{g,2^n} \mid g \in \mathcal{F}_{11},\, i \in I_{2^n-1}\} \cup \{u_{g,i} \mid g \in \mathcal{F}_{12},\, i \in I_{2^n}\}$$

は $\mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)}$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底となる．

証明. $\mathcal{W} = \{u_{g,i} - u_{g,2^n} \mid g \in \mathcal{F}_{11},\, i \in I_{2^n-1}\} \cup \{u_{g,i} \mid g \in \mathcal{F}_{12},\, i \in I_{2^n}\}$ とおき，$X_{m,n}$ を G の元 g を代表元とする実共役類 $(g)^{\pm}_G$ の集合とする．$\mathbb{R}$-加群の同型写像

$$\Psi : \mathrm{RO}(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Map}(X_{m,n}, \mathbb{R})$$

が $\Psi([U])((h)^{\pm}_{G}) = \chi_U(h)$ により与えられる．

$$x = \sum_{g \in \mathcal{F}_1} \sum_{k=1}^{2^n} a_{g,k} u_{g,k} \quad (a_{g,k} \in \mathbb{Z})$$

を $\mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)}$ の元とする．$i \in I_{2^n}$ に対し， χ_i を V_i の指標とする．補題 4.4 より，$(h,t) \in A_m \times C_2^n = G$ に対し

$$\Psi(x)(h,t) = \begin{cases} 0 & \text{if } h \notin \mathcal{F}_1 \\ \sqrt{q(h)} \sum_{k=1}^{2^n} a_{h,k} \chi_i(t) & \text{if } h \in \mathcal{F}_1, \end{cases}$$

が得られる．まず，$g = (h,t) \in A_m \times C_2^n = G$ を任意の 2-冪位数の G の元とする．このとき，$h \notin \mathcal{F}_1$ より，

$$\Psi(x)(g) = 0$$

がわかる．次に，g を任意の奇素数冪位数の G の元とする．このとき，任意の G は奇素数冪位数の $h \in A_m$ と C_2^n の単位元 e を用いて $g = (h,e)$ と表される．このとき，

$$\Psi(x)(g) = \sqrt{q(h)} \sum_{k=1}^{2^n} a_{h,k} = 0$$

より， $a_{h,2^n} = -a_{h,1} - a_{h,2} - \cdots - a_{h,2^n-1}$ が得られる．従って，

$$x = \sum_{g \in \mathcal{F}_{11}} \sum_{k=1}^{2^n-1} a_{g,k}(u_{g,k} - u_{g,2^n}) + \sum_{g \in \mathcal{F}_{12}} \sum_{k=1}^{2^n} a_{g,k} u_{g,k} \in \langle \mathcal{W} \rangle_{\mathbb{Z}}$$

がいえるので，$\mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)} \subset \langle \mathcal{W} \rangle_{\mathbb{Z}}$ が得られる．$\mathcal{W} \subset \mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)}$ より，$\mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)} = \langle \mathcal{W} \rangle_{\mathbb{Z}}$ が得られる． □

定理 *1.5* の証明. $m = 1$ のとき，G は C_2^n と同型であるので，$\mathrm{RO}_0(G) = 0$ が直ちに得られる．$m \geq 2$ のとき，命題 5.3 より，$\mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)}$ の $\mathbb{Z}$ 上の階数は $\kappa(m,n)$ である．$2 \leq m \leq 4$ のとき，$\pi(m) = 0$ であるので， $\mathrm{RO}_0(G) = 0$ である．従って，$1 \leq m \leq 4$ のときは $\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) = \mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)} = 0$ であることがわかる．$m \geq 5$ のとき，系 3.1 より $\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) = \mathrm{RO}_0(G)_{\mathcal{P}(G)}$ が直ちに得られる． □

系 *5.1* の証明．任意の 2 つの自然数 m, n に対し，$\kappa(m,n)=0$ であることの必要十分条件は $\pi(m)=\rho(m)=0$ が成り立つことである．注意 4.1 と定理 1.5 より，$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G)=\{0\}$ であることの必要十分条件は $m\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 7,\ 8,\ 12\}$ であることがわかる． $\square$

コメント 5.1. 当初は系 5.1 を証明するにあたり，m について場合分けをして証明していたが，[Sei22] を投稿してレフェリーからのいただいたアドバイスにより，そのようなことをしなくても，上記のように簡単に証明できることがわかった．

6 実表現環の部分加群 $\mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}$ の階数

本節では，有限群 G とその正規部分群 N に対する実表現環の部分加群 $\mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}$ の階数に関する研究結果である定理 1.6 の証明を与える．

定理 1.6. G を素数冪でない元を含む有限群，N をその正規部分群とする．このとき，

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}=(\lambda(G,E)-\lambda(G,N))-(\nu(G,E)-\nu(G,N))$$

が成り立つ．

$\mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}$ の $\mathbb{Z}$ 上の階数を $\mu(G,N)$ により表すとする．一般に，$|G|$ を割り切る素数 p に対して

$$\mathrm{RO}_0(G)^{\{G^{\mathrm{nil}}\}}_{\mathcal{P}(G)}\subset\mathrm{RO}_0(G)^{\mathcal{L}(G)}_{\mathcal{P}(G)}\subset\mathrm{RO}_0(G)^{\{G^{\{p\}}\}}_{\mathcal{P}(G)}$$

であるため，定理 1.6 は次の系を持つことがわかる．

系 6.1 ([Sei21, Corollary 1.4])**.** G を素数冪でない元を含む有限群とする．このとき，不等式

$$\mu(G,G^{\mathrm{nil}})\le\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\mathrm{RO}_0(G)^{\mathcal{L}(G)}_{\mathcal{P}(G)}\le\min_{p:\text{素数}}\left\{\mu(G,G^{\{p\}})\right\}$$

が成り立つ．

次の定理を利用することで，定理 1.6 を証明することができる．

定理 6.2 ([Sei21, Theorem 1.1])**.** G を素数冪でない元を含む有限群，N をその正規部分群とする．このとき，$\mathrm{R}(G,\mathbb{Q})^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}$ の $\mathbb{Z}$ 上の階数は $\nu(G,E)-\nu(G,N)$ である．

一般に，$|G|$ を割り切る素数 p に対して

$$\mathrm{R}(G,\mathbb{Q})^{\{G^{\mathrm{nil}}\}}_{\mathcal{P}(G)} \subset \mathrm{R}(G,\mathbb{Q})^{\mathcal{L}(G)}_{\mathcal{P}(G)} \subset \mathrm{R}(G,\mathbb{Q})^{\{G^{\{p\}}\}}_{\mathcal{P}(G)}$$

であるため，定理 6.2 は次の系を持つことがわかる．

系 6.3 ([Sei21, Corollary 1.2])**.** G を素数冪でない元を含む有限群とする．このとき，不等式

$$\nu(G,E) - \nu(G,G^{\mathrm{nil}}) \leq \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\mathrm{R}(G,\mathbb{Q})^{\mathcal{L}(G)}_{\mathcal{P}(G)} \leq \nu(G,E) - \max_{p:\text{素数}}\left\{\nu(G,G^{\{p\}})\right\}$$

が成り立つ．

そこで，まずは定理 6.2 の証明を与え，後程それを利用して定理 1.6 の証明を与えることにする．

$g \in G$ に対し，$\langle g\rangle$ を g で生成される G の巡回部分群，A を G-共役類上不変な G の部分集合とする．このとき $\mathfrak{M}(G,A)$ を $\langle a\rangle = \langle b\rangle$ を満たす $a,\, b \in A$ に対し $f(a) = f(b)$ を満たすような G-共役類上で定数となる関数 $f : A \to \mathbb{Q}$ 全体の集合，$\mathfrak{M}(G,A)_{\mathcal{P}(G)}$ を写像

$$\mathrm{res}^G_{\mathcal{P}(G)} : \mathfrak{M}(G,A) \to \prod_{P\in\mathcal{P}(G)} \mathfrak{M}(P,A)$$

の核とする．

G の正規部分群 N に対し，準同型写像 $\mathrm{fix}^G_{G/N} : \mathfrak{M}(G,A) \to \mathfrak{M}(G/N, AN/N)$ を，

$$\left(\mathrm{fix}^G_{G/N}\right) f(aN) = \frac{1}{|N|}\sum_{x\in N} f(ax) \quad (a \in A)$$

により定め，$\mathfrak{M}(G,A)^{\{N\}}$ を $\mathrm{fix}^G_{G/N} : \mathfrak{M}(G,A) \to \mathfrak{M}(G/N, AN/N)$ の核とする．G の巡回部分群 C に対し，写像 $f_C : G \to \mathbb{Q}$ を

$$f_C(g) = \begin{cases} 1 & (\langle g\rangle \in (C)_G) \\ 0 & (\langle g\rangle \notin (C)_G) \end{cases}$$

により定める．

命題 6.4. G の元 a と G の巡回部分群 C に対し，$\mathrm{fix}^G_{G/N} f_C(aN)$ の値が正であることの必要十分条件は，G/N の巡回部分群 $\langle aN\rangle$ が CN/N と互いに G/N-共役であることである．

証明.
$$\begin{aligned}|N|\mathrm{fix}^G_{G/N}f_C(aN) &= \sum_{x\in N} f_C(ax)\\ &= |\{x\in N \mid \langle ax\rangle \in (C)_G\}|\\ &= \left|\left(\bigcup_{g\in G} gCg^{-1}\right)\cap aN\right|\end{aligned}$$
より，$\mathrm{fix}^G_{G/N}f_C(aN)$ の値が正であることと $\left(\bigcup_{g\in G} gCg^{-1}\right)\cap aN$ が空集合でないことは同値である．また，$\left(\bigcup_{g\in G} gCg^{-1}\right)\cap aN$ が空集合でないことと $(C)_G\cap aN$ が空集合でないことは同値であり，更にそれは $C\cap(aN)_G$ が空集合でないことは同値である．$C\cap(aN)_G$ が空集合でないことの必要十分条件は，C がある $b\in N$, $g\in G$ を用いて $C=\langle gabg^{-1}\rangle$ と表されることであり，これは $\langle aN\rangle$ と CN/N が互いに G/N-共役であることを意味する． □

次の結果はよく知られている．

補題 6.5 ([PaSo02, p. 857])**.** $g\in G$ と実 G-加群 V に対し，$\chi_{V^N}(gN)$ の値は
$$\frac{1}{|N|}\sum_{x\in N}\chi_V(gx)$$
である．

証明. V が既約である場合を示せば十分である．$\rho_V : G\to \mathrm{Aut}(V)$ を，V を表現空間として持つ実表現とする．写像 $\varphi : V\to V$ を
$$\varphi(v)=\frac{1}{|N|}\sum_{x\in N}\rho_V(x)v$$
により定める．このとき，$\mathrm{Im}(\varphi)=V^N$ である．$a\in G$ と $v\in V^N$ に対し，準同型写像 $\rho_{V^N} : G/N\to \mathrm{Aut}(V^N)$ を $\rho_{V^N}(aN)v=\rho_V(a)v$ により定める．V は既約であるので，$V^N=V$ の場合と $V^N=0$ の場合について証明すれば良い．

まず，$V^N=V$ と仮定する．$v\in V$ に対し $\sum_{x\in N}\rho_V(ax)\varphi(v)=\sum_{x\in N}\rho_V(ax)v$ であるので，
$$\rho_{V^N}(aN)=\frac{1}{|N|}\sum_{x\in N}\rho_V(ax)$$

が得られるため，

$$\chi_{V^N}(gN) = \frac{1}{|N|}\sum_{x\in N}\chi_V(gx)$$

がわかる．

次に，$V^N = 0$ と仮定する．このとき， $\chi_{V^N}(aN) = 0$ であるので，$\sum_{x\in N}\chi_V(ax) = 0$ を示せば良い．$v \in V$ に対し $\varphi(v) = 0$ であるので，$a \in G$ に対して

$$\rho_V(a)\varphi(v) = \sum_{x\in N}\rho_V(ax)v = 0$$

がいえる．$\sum_{x\in N}\rho_V(ax) = 0$ より，$\sum_{x\in N}\chi_V(ax) = 0$ が得られる． □

$Q(G)$ を G の素数冪位数の元全体の集合とする．補題 6.5 より，次が可換図式となることがわかる．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{R}(G,\mathbb{Q})_{\mathcal{P}(G)} \arrow[r, "\mathrm{fix}^G_{G/N}"] \arrow[d, "\tau_G"] & \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{R}(G/N,\mathbb{Q}) \arrow[d, "\tau_{G/N}"] \\
\mathfrak{M}(G, G\setminus Q(G)) \arrow[r, "\mathrm{fix}^G_{G/N}"] & \mathfrak{M}(G/N, (G\setminus Q(G))N/N)
\end{tikzcd}$$

但し，すべての同型でない既約な G-表現空間 V_i に対して，τ_G と $\mathrm{fix}^G_{G/N} : \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{R}(G,\mathbb{Q})_{\mathcal{P}(G)} \to \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{R}(G/N,\mathbb{Q})$ はそれぞれ

$$\tau_G\left(\sum_i (r_i\otimes[V_i])\right) = \sum_i r_i\chi_{V_i},\quad \mathrm{fix}^G_{G/N}\left(\sum_i (r_i\otimes[V_i])\right) = \sum_i (r_i\otimes[V_i^N])\ (r_i\in\mathbb{Q})$$

により定められる．

命題 6.6. 有理ベクトル空間 $\mathfrak{M}(G,G)_{\mathcal{P}(G)}$ は $\mathfrak{M}(G, G\setminus Q(G))$ と一致しており，τ_G と $\tau_{G/N}$ は同型写像である．

証明. $f \mapsto f|_{G\setminus Q(G)}$ により与えられる写像 $\mathfrak{M}(G,G)_{\mathcal{P}(G)} \to \mathfrak{M}(G, G\setminus Q(G))$ は単射である．更に，

$$h \longmapsto \bar{h}\ ;\ \bar{h}(x) = \begin{cases} h(x) & (x \in G\setminus Q(G)) \\ 0 & (x\in Q(G)) \end{cases}$$

により与えられる写像 $\mathfrak{M}(G, G\setminus Q(G)) \to \mathfrak{M}(G,G)_{\mathcal{P}(G)}$ も単射である．従って，$\mathfrak{M}(G,G)_{\mathcal{P}(G)} = \mathfrak{M}(G, G\setminus Q(G))$ である．2 つの実 G-加群 V, W に対し，$[V] = [W]$ であることの必要十分条件は $\chi_V = \chi_W$ が成り立つことである．よって， τ_G と $\tau_{G/N}$ 同型写像である． □

$\mathrm{Conj}(G,\mathcal{C})$ を G の巡回部分群の G-共役類全体の集合，$\mathrm{Conj}(G,\mathcal{C}_{\mathcal{P}})$ を C が素数冪位数であるものを動くような $(C)_G \in \mathrm{Conj}(G,\mathcal{C})$ 全体の集合とする．

命題 6.7. G を素数冪位数でない元を持つ有限群とする．このとき，$\mathrm{R}(G,\mathbb{Q})_{\mathcal{P}(G)}$ の $\mathbb{Z}$ 上の階数は $\nu(G,E)$ である．

証明. 次の系列について考える．

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{R}(G,\mathbb{Q})_{\mathcal{P}(G)} \longrightarrow \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{R}(G,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\mathrm{res}^G_{\mathcal{P}(G)}} \prod_{P\in\mathcal{P}(G)} \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{R}(P,\mathbb{Q}).$$

但し，$\mathcal{P}(G)=\{P_1,P_2,\ldots,P_s\}$ としたとき $x\in\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{R}(G,\mathbb{Q})_{\mathcal{P}(G)}$ に対し，$\mathrm{res}^G_{\mathcal{P}(G)}(x)=(\mathrm{res}^G_{P_1}x,\mathrm{res}^G_{P_2}x,\ldots,\mathrm{res}^G_{P_s}x)$ である．$\mathrm{Conj}(G,\mathcal{C})=\{(H_1)_G,(H_2)_G,\ldots,(H_t)_G\}$ とする．$i=1,2,\ldots,t$ に対し，写像 $\varphi_i:\mathrm{Conj}(G,\mathcal{C})\to\mathbb{Q}$ を Kronecker のデルタ δ_{ij} を用いて $\varphi_i((H_j)_G)=\delta_{ij}$ により定める．$\mathrm{Map}(\mathrm{Conj}(G,\mathcal{C}),\mathbb{Q})$ と $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{R}(G,\mathbb{Q})$ が同型で，$\{\varphi_i\,|\,(H_i)_G\in\mathrm{Conj}(G,\mathcal{C})\}$ が $\mathrm{Map}(\mathrm{Conj}(G,\mathcal{C}),\mathbb{Q})$ の $\mathbb{Q}$ 上の基底となるので，$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{R}(G,\mathbb{Q}))=|\mathrm{Conj}(G,\mathcal{C})|$ である．$\{\mathrm{res}^G_{\mathcal{P}(G)}\varphi_i\,|\,(H_i)\in\mathrm{Conj}(G,\mathcal{C}_{\mathcal{P}})\}$ が $\mathbb{Q}$ 上線型独立であるので，$\dim_{\mathbb{Q}}\mathrm{Im}(\mathrm{res}^G_{\mathcal{P}(G)})=|\mathrm{Conj}(G,\mathcal{C}_{\mathcal{P}})|$ である．従って，

$$\begin{aligned}
\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\mathrm{R}(G,\mathbb{Q})_{\mathcal{P}(G)} &= \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{R}(G,\mathbb{Q})_{\mathcal{P}(G)})\\
&= \dim_{\mathbb{Q}}\mathrm{Ker}(\mathrm{res}^G_{\mathcal{P}(G)})\\
&= \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{R}(G,\mathbb{Q})) - \dim_{\mathbb{Q}}\mathrm{Im}(\mathrm{res}^G_{\mathcal{P}(G)})\\
&= |\mathrm{Conj}(G,\mathcal{C})| - |\mathrm{Conj}(G,\mathcal{C}_{\mathcal{P}})|\\
&= \nu(G,E)
\end{aligned}$$

がわかる． □

命題 6.8. 集合 $\{f_C\,|\,(C)_G\in\mathrm{Conj}(G,\mathcal{C})\setminus\mathrm{Conj}(G,\mathcal{C}_{\mathcal{P}})\}$, $\{f_D\,|\,(D)_{G/N}\in\mathrm{Conj}(G/N,\mathcal{C})\}$ はそれぞれ有理ベクトル空間 $\mathfrak{M}(G,G\setminus Q(G))$, $\mathfrak{M}(G/N,G/N)$ の $\mathbb{Q}$ 上の基底となる．

証明. 各 $(C)_G\in\mathrm{Conj}(G,\mathcal{C})\setminus\mathrm{Conj}(G,\mathcal{C}_{\mathcal{P}})$ に対し，f_C は $\mathfrak{M}(G,G\setminus Q(G))$ に属する．集合 $\{f_C\mid(C)_G\in\mathrm{Conj}(G,\mathcal{C})\setminus\mathrm{Conj}(G,\mathcal{C}_{\mathcal{P}})\}$ は線型独立であり，$\dim_{\mathbb{Q}}\mathfrak{M}(G,G\setminus Q(G))=|\mathrm{Conj}(G,\mathcal{C})|-|\mathrm{Conj}(G,\mathcal{C}_{\mathcal{P}})|$ なので，$\{f_C\,|\,C\in\mathcal{B}_{G\setminus Q(G)}\}$ が $\mathfrak{M}(G,G\setminus Q(G))$ の基底になる

ことがわかる．同様な方法で，$\{f_D \mid D \in \mathcal{B}_{G/N}\}$ が $\mathfrak{M}(G/N, G/N)$ の基底になることを示すこともできる． $\square$

命題 6.4 より，次の命題が得られる．

命題 6.9. $\mathrm{fix}^G_{G/N}(\mathfrak{M}(G, G \setminus Q(G)))$ の $\mathbb{Q}$ 上の次元は $\nu(G, N)$ である．

定理 *6.2* の証明．命題 6.6 より，

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\mathrm{R}(G,\mathbb{Q})^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)} = \dim_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{R}(G,\mathbb{Q})^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}\right) = \dim_{\mathbb{Q}}\mathfrak{M}(G, G\setminus Q(G))^{\{N\}}$$

がわかる．定義と命題 6.8, 6.9 より，

$$\dim_{\mathbb{Q}}\mathfrak{M}(G, G\setminus Q(G)) = \nu(G,E) \text{ 及び } \dim_{\mathbb{Q}}\mathrm{fix}^G_{G/N}(\mathfrak{M}(G, G\setminus Q(G))) = \nu(G,N)$$

がいえるので，$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\mathrm{R}(G,\mathbb{Q})^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)} = \nu(G,E) - \nu(G,N)$ が得られる． $\square$

補題 6.10. 有限群 G とその正規部分群 N に対し，

$$\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{RO}(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)} = \left(\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{R}(G,\mathbb{Q})^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}\right) \oplus \left(\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}\right)$$

が成り立つ．

証明．任意の $x \in \mathrm{RO}(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}$ に対し，

$$|\mathrm{Gal}(G)|x = \left(\sum_{\psi\in\mathrm{Gal}(G)}\psi\right)x + \sum_{\psi\in\mathrm{Gal}(G)}(1-\psi)x \in \left(\mathrm{RO}(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}\right)^{\mathrm{Gal}(G)} + \mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}$$

である．補題 2.3 より，

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{RO}(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}\right)^{\mathrm{Gal}(G)} + \mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)} &= \left(\mathrm{RO}(G)^{\mathrm{Gal}(G)}\right)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)} + \mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}\\ &= \overline{\mathrm{RO}}_{\mathbb{Q}}(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)} + \mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}\\ &= \overline{\mathrm{RO}}_{\mathbb{Q}}(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)} \oplus \mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}\end{aligned}$$

であり，$\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\overline{\mathrm{RO}}_{\mathbb{Q}}(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)} = \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{R}(G,\mathbb{Q})^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}$ より，

$$\left(\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\overline{\mathrm{RO}}_{\mathbb{Q}}(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}\right)+\left(\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}\right) = \left(\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{R}(G,\mathbb{Q})^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}\right)\oplus\left(\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}\right)$$

がいえるため，$x \in \left(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{R}(G,\mathbb{Q})^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}\right) \oplus \left(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}\right)$，すなわち

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{RO}(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)} \subset \left(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{R}(G,\mathbb{Q})^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}\right) \oplus \left(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}\right)$$

がわかる．逆の包含関係は明らかである． □

次の K. Pawałowski–R. Solomon [PaSo02] による結果はよく知られている．

補題 6.11 ([PaSo02, Second Rank Lemma])**.** G を有限群，N をその正規部分群とする．このとき，$\mathrm{RO}(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}$ の $\mathbb{Z}$ 上の階数は $\lambda(G,E)-\lambda(G,N)$ である．

定理 *1.6* の証明．定理 6.2，補題 6.10, 6.11 より

$$\dim_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}\right) = (\lambda(G,E)-\lambda(G,N)) - (\nu(G,E)-\nu(G,N))$$

であり，更に $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)} = \dim_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}_{\mathcal{P}(G)}\right)$ であることから，定理 1.6 が得られる． □

7 二面体群の直積群の d-Smith 集合

本節では，節 6 で現れた記号はそのまま扱う．$p_1, p_2, \ldots, p_m$ を相異なる m 個の奇素数とする．本節では，二面体群の直積群の d-Smith 集合に関する次の 2 つの計算結果の証明を与える．

定理 1.7. $m \geq 2$ に対し，$G = D_{2p_1p_2\cdots p_m} \times D_{2p_1p_2\cdots p_m}$ とする．このとき，$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) = \mathrm{RO}_0(G)^{\{G^{\mathrm{nil}}\}}_{\mathcal{P}(G)}$ であり，$\mathrm{RO}_0(G)^{\{G^{\mathrm{nil}}\}}_{\mathcal{P}(G)}$ の $\mathbb{Z}$ 上の階数は

$$\left(\frac{p_1p_2\cdots p_m+3}{2}\right)^2 - \sum_{i=1}^{m}\frac{p_i^2-9}{4} - \sum_{k=1}^{m}\frac{3^{m-k}}{2}\sum_{1\leq t_1<\cdots<t_k\leq m}\prod_{i=1}^{k}(p_{t_i}-1) - 3^m - 2^{m+1} - 1$$

である．

定理 1.8. $n \geq 2$ に対し，$G = D^n_{2p_1p_2}$ とする．このとき，次の (1), (2), (3) が成り立つ．

(1) $\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) = \mathrm{RO}_0(G)^{\{G^{\mathrm{nil}}\}}_{\mathcal{P}(G)}$ であり，$\mathrm{RO}_0(G)^{\{G^{\mathrm{nil}}\}}_{\mathcal{P}(G)}$ の $\mathbb{Z}$ 上の階数は $\lambda(G,E)-\nu(G,E)$ である．

(2) $\lambda(G,E)=\left(\dfrac{p_1p_2+3}{2}\right)^n-\left(\dfrac{p_1+1}{2}\right)^n-\left(\dfrac{p_2+1}{2}\right)^n-2^n+2.$

(3) $$\nu(G,E)=\sum_{i=1}^{2}\frac{2}{p_i-1}\left(\left(\frac{p_i+3}{2}\right)^n-\left(\frac{p_i+1}{2}\right)^n-2^n+1\right)$$
$$+\frac{4}{(p_1-1)(p_2-1)}\left(2\left(\frac{p_1p_2+3}{2}\right)^n-\left(\frac{p_1+p_2+2}{2}\right)^n\right.$$
$$\left.-\left(\frac{p_1+3}{2}\right)^n-\left(\frac{p_2+3}{2}\right)^n+2^n\right).$$

$m,\ n$ を自然数とし，$u_m=p_1p_2\dots p_m$ とおく．まず，二面体群 D_{2u_m} またはその直積 $D_{2u_m}^n$ に関するいくつかの事実を与える．$m,\ n$ が 2 以上ならば $D_{2u_m}^n$ が Oliver 群であることと，次の事実は容易に得られる．

$$\begin{aligned}
&(D_{2u_m}^n)^{\{p_i\}}=D_{2u_m}^n \quad (i=1,\ 2,\dots,\ m),\\
&(D_{2u_m}^n)^{\mathrm{nil}}=(D_{2u_m}^n)^{\{2\}}\cong C_{u_m}^n,\\
&D_{2u_m}^n/(D_{2u_m}^n)^{\mathrm{nil}}\cong C_2^n.
\end{aligned}\tag{7.1}$$

D_{2u_m} の元の位数は $1,\ 2$，または $1\le t_1<t_2<\cdots<t_k\le m$ に対し $p_{t_1}p_{t_2}\cdots p_{t_k}$ である．更に，位数 $2,\ p_{t_1}p_{t_2}\dots p_{t_k}$ の元の共役類の個数は，それぞれ $1,\ \left(\prod_{i=1}^k(p_{t_i}-1)\right)/2$ である．

有限群の元 g に対して， $o(g)$ を g の位数とする．$D_{2u_m}^n$ に対し， Z を $o(g_1)=\cdots=o(g_n)=2$ または $1\le t_1<t_2<\cdots<t_k\le m$ に対し $o(g_1)=\cdots=o(g_n)=p_{t_1}p_{t_2}\cdots p_{t_k}$ を満たすような $(g_1,g_2,\dots,g_n)$ で生成される $D_{2u_m}^n$ の巡回部分群全体の集合とする．このとき，Z の元を代表元とする $D_{2u_m}^n$-共役類の個数は，前者の場合は 1，後者の場合は $\left(\left(\prod_{i=1}^k(p_{t_i}-1)\right)/2\right)^{n-1}$ である．

2 つの自然数 $a_1,\ a_2$ に対し，$\gcd(a_1,a_2)$ を a_1 と a_2 の最大公約数であるとする．

補題 7.1. $G=D_{2u_m}^2$ とおく．$j=0,\ 1$ と $0\le k\le m$ に対し， Y_k^j を $|H|\equiv j \mod 2$ かつ $\gcd(o(g_1),o(g_2))$ が k 個 の素数の積となるような $H=\langle(g_1,g_2)\rangle\in\mathcal{C}(G)$ 全体の集合とする．このとき， $|H|$ が 1 または素数であることの必要十分条件は，$(o(g_1),o(g_2))=(1,1),\ (2,1),\ (1,2)$ または $(2,2)$ ，或いはある i に対して $(o(g_1),o(g_2))=(1,p_i),\ (p_i,1)$ または (p_i,p_i) となることである．更に，素数冪位数でない $H\in Y_k^j$ の元を代表元とする G-共

役類 $(H)_G$ の個数は，以下である．

$$\begin{cases} 3^m - 2m - 1 & \text{if } j = 1 \text{ and } k = 0, \\ (3^{m-1} - 1)\sum_{i=1}^{m}(p_i - 1)/2 & \text{if } j = 1 \text{ and } k = 1, \\ 3^{m-k}\sum_{1\le t_1<\cdots<t_k\le m}\left(\prod_{i=1}^{k}(p_{t_i} - 1)\right)/2 & \text{if } j = 1 \text{ and } k > 1, \\ 2(2^m - 1) & \text{if } j = 0 \text{ and } k = 0, \\ 0 & \text{if } j = 0 \text{ and } k > 0. \end{cases}$$

補題 7.2. a, b, c, d, e を， $a+b+c+d+e = n$ を満たす 5 つの非負の整数とし，$G = D_{2u_2}^n$ とおく． X を $o(g_1) = \cdots = o(g_a) = 1$, $o(g_{a+1}) = \cdots = o(g_{a+b}) = p_1$, $o(g_{a+b+1}) = \cdots = o(g_{a+b+c}) = p_2$, $o(g_{a+b+c+1}) = \cdots = o(g_{a+b+c+d}) = p_1p_2$, $o(g_{a+b+c+d+1}) = \cdots = o(g_n) = 2$ を満たすような $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ により生成される G の巡回部分群 H 全体の集合とする．このとき， $|H|$ が 1 または素数であることの必要十分条件は $c = d = e = 0$, $b = d = e = 0$ または $b = c = d = 0$ である．更に，a, b, c, d, e に関する特定の条件下での $H \in X$ を代表元とする G-共役類 $(H)_G$ の個数は，以下である．

$$\begin{cases} ((p_1 - 1)/2)^{b-1} & H \text{ with } b > 0,\ c = d = 0,\ e > 0, \\ ((p_2 - 1)/2)^{c-1} & H \text{ with } c > 0,\ b = d = 0,\ e > 0, \\ ((p_1 - 1)/2)^{b-1}((p_2 - 1)/2)^{c-1} & H \text{ with } b > 0,\ c > 0,\ d = 0, \\ ((p_1 - 1)/2)^{b}((p_2 - 1)/2)^{c}((p_1 - 1)(p_2 - 1)/2)^{d-1} & H \text{ with } d > 0. \end{cases}$$

命題 7.3. $m \geq 2$ に対し， $G = D_{2u_m}^n$ とする．このとき，$\lambda(G, E)$ の値は

$$\left(\frac{p_1p_2\cdots p_m + 3}{2}\right)^n - \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{p_i + 1}{2}\right)^n + m - 2^n$$

である．

証明. 任意の $g \in G$ に対し，$(g)_G^{\pm} = (g)_G$ であるので，$g \in G$ が素数冪位数となるような G の元の共役類 $(g)_G$ の個数を求めたら良い．本節の冒頭の二面体群の元の共役類に関する事実より，D_{2u_m} の元の共役類の個数は

$$2 + \sum_{1\le t_1<\cdots<t_k\le m}\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{k}(p_{t_i} - 1) = 2 + \frac{1}{2}\left(\prod_{i=1}^{m}((p_i - 1) + 1) - 1\right) = \frac{p_1p_2\cdots p_m + 3}{2}$$

であるので，G は $((p_1p_2\cdots p_m+3)/2)^n$ 個の元の共役類を持つことがわかる．更に，位数 p_i, 2 の D_{2u_m} の元の共役類の個数はそれぞれ $(p_i-1)/2$, 1 であるので，位数 p_i, 2 の G の元の共役類の個数はそれぞれ

$$\sum_{k=1}^{m} {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{p_i-1}{2}\right)^k = \left(\frac{p_i-1}{2}+1\right)^n - 1 = \left(\frac{p_i+1}{2}\right)^n - 1,$$

$\sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k = 2^n-1$ である．但し，$n \geq k$ を満たす自然数 n, k に対して ${}_n\mathrm{C}_k$ は二項係数を表す．従って，

$$\begin{aligned}\lambda(G,E) &= \left(\frac{p_1p_2\cdots p_m+3}{2}\right)^n - \sum_{i=1}^{m}\left(\left(\frac{p_i+1}{2}\right)^n - 1\right) - (2^n-1) - 1 \\ &= \left(\frac{p_1p_2\cdots p_m+3}{2}\right)^n - \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{p_i+1}{2}\right)^n + m - 2^n\end{aligned}$$

が得られる． □

命題 7.3 より，定理 1.8 (2) が直ちに得られる．

C. U. Sanchez [Sa76] より $\mathfrak{S}(G) \subset \mathrm{RO}(G)_{\mathcal{P}_{\mathrm{odd}}(G)}$，M. Morimoto–Y. Qi [MQ10] より $\mathfrak{S}(G) \subset \mathrm{RO}(G)^{\{G^{\cap 2}\}}$，が得られ，更に M. Morimoto [Mo10, Section 1, p.3684] より，$\mathfrak{S}(G) \subset \mathrm{RO}(G)_{\mathcal{P}^*(G)}$ がいえるので，

$$\mathfrak{S}(G) \subset \mathrm{RO}(G)^{\{G^{\cap 2}\}}_{\mathcal{P}^*(G)} \quad \text{及び} \quad \mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) \subset \mathrm{RO}_0(G)^{\{G^{\cap 2}\}}_{\mathcal{P}^*(G)}$$

が成り立つことがわかる．$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) \subset \mathrm{RO}_0(G)^{\{G^{\cap 2}\}}_{\mathcal{P}^*(G)}$ と補題 3.4 より，次の事実が直ちに得られる．

命題 7.4. 任意の *Oliver* 群 G に対し，

$$\mathrm{RO}_0(G)^{\mathcal{L}(G)}_{\mathcal{P}(G)} \subset \mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) \subset \mathrm{RO}_0(G)^{\{G^{\cap 2}\}}_{\mathcal{P}^*(G)}$$

が成り立つ．

命題 7.5. G が $G^{\cap 2} = G^{\mathrm{nil}}$ を満たす *Oliver* 群とする．このとき，

$$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G)_{\mathcal{P}(G)} = \mathrm{RO}_0(G)^{\{G^{\mathrm{nil}}\}}_{\mathcal{P}(G)}$$

であり，更に G^{nil} が奇数位数であれば，

$$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) = \mathrm{RO}_0(G)^{\{G^{\mathrm{nil}}\}}_{\mathcal{P}(G)}$$

である．

証明．仮定と命題 7.4 より，$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G)_{\mathcal{P}(G)} = \mathrm{RO}_0(G)^{\{G^{\mathrm{nil}}\}}_{\mathcal{P}(G)}$ が直ちに得られる．このとき，$\mathrm{RO}_0(G)^{\{G^{\mathrm{nil}}\}}_{\mathcal{P}(G)} \subset \mathfrak{d}\mathfrak{S}(G)$ であり，更に G^{nil} が奇数位数であれば $\mathcal{P}(G) = \mathcal{P}^*(G)$ であるので，$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) = \mathrm{RO}_0(G)^{\{G^{\mathrm{nil}}\}}_{\mathcal{P}(G)}$ が得られる． □

次の事実は容易に得られる．

命題 7.6. G は有限群で， N をその正規部分群する．もし G/N が有限個の C_2 の直積と同型ならば，$\lambda(G,N) = \nu(G,N)$ である．

定理 1.6，(7.1)，命題 7.5, 7.6 より，次の命題が直ちに得られる．

命題 7.7. $G = D^n_{2u_m}$ とする．m, $n \geq 2$ ならば，

$$\mathfrak{d}\mathfrak{S}(G) = \mathrm{RO}_0(G)^{\{G^{\mathrm{nil}}\}}_{\mathcal{P}(G)}$$

であり， $\mathrm{RO}_0(G)^{\{G^{\mathrm{nil}}\}}_{\mathcal{P}(G)}$ の $\mathbb{Z}$ 上の階数は $\lambda(G,E) - \nu(G,E)$ である．

定理 1.8 (1) は命題 7.7 から直ちに得られる．

定理 *1.8 (3)* の証明．$G = D^n_{2u_2}$ とおく． $i = 1$, 2 に対し，X_i を $H \cong C_{2p_i}$ を満たす G の部分群 H の G-共役類 $(H)_G$ 全体の集合とする．X_3 を $p_1p_2 \mid |H|$ かつすべての i に対して $o(g_i) \neq p_1p_2$ を満たす $H = \langle (g_1, g_2, \ldots, g_n) \rangle \in \mathcal{C}(G)$ の G-共役類 $(H)_G$ 全体の集合，X_4 を $p_1p_2 \mid |H|$ かつある i に対して $o(g_i) = p_1p_2$ を満たす $H = \langle (g_1, g_2, \ldots, g_n) \rangle \in \mathcal{C}(G)$ の G-共役類 $(H)_G$ 全体の集合とする．4 つの集合 B_1, B_2, B_3, B_4 をそれぞれ，

$$B_1 = \{(a,b,e) \mid a \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ b,\ e \in \mathbb{N},\ a+b+e = n\},$$

$$B_2 = \{(a,c,e) \mid a \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ c,\ e \in \mathbb{N},\ a+c+e = n\},$$

$$B_3 = \{(a,b,c,e) \mid a, e \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ b, c \in \mathbb{N},\ a+b+c+e = n\},$$

$$B_4 = \{(a,b,c,d,e) \mid d \in \mathbb{N},\ a,\ b,\ c,\ e \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ a+b+c+d+e = n\},$$

により定める．このとき，補題 7.2 と多項定理より，次の計算結果が得られる．

$$\begin{aligned}
|X_1| &= \sum_{(a,b,e)\in B_1} \frac{n!}{a!b!e!}\left(\frac{p_1-1}{2}\right)^{b-1} \\
&= \frac{2}{p_1-1}\left(\left(\frac{p_1+3}{2}\right)^n - \left(\frac{p_1+1}{2}\right)^n - 2^n + 1\right), \\
|X_2| &= \sum_{(a,c,e)\in B_2} \frac{n!}{a!c!e!}\left(\frac{p_2-1}{2}\right)^{c-1} \\
&= \frac{2}{p_2-1}\left(\left(\frac{p_2+3}{2}\right)^n - \left(\frac{p_2+1}{2}\right)^n - 2^n + 1\right), \\
|X_3| &= \sum_{(a,b,c,e)\in B_3} \frac{n!}{a!b!c!e!}\left(\frac{p_1-1}{2}\right)^{b-1}\left(\frac{p_2-1}{2}\right)^{c-1} \\
&= \frac{4}{(p_1-1)(p_2-1)}\left(\left(\frac{p_1+p_2+2}{2}\right)^n - \left(\frac{p_1+3}{2}\right)^n - \left(\frac{p_2+3}{2}\right)^n + 2^n\right), \\
|X_4| &= \sum_{(a,b,c,d,e)\in B_4} \frac{n!}{a!b!c!d!e!}\left(\frac{p_1-1}{2}\right)^{b}\left(\frac{p_2-1}{2}\right)^{c}\left(\frac{(p_1-1)(p_2-1)}{2}\right)^{d-1} \\
&= \frac{2}{(p_1-1)(p_2-1)}\left(\left(\frac{p_1p_2+3}{2}\right)^n - \left(\frac{p_1+p_2+2}{2}\right)^n\right).
\end{aligned}$$

$\nu(G,E) = |X_1|+|X_2|+|X_3|+|X_4|$ であるので，定理 1.8 (3) が得られる． □

定理 *1.7* の証明. $G = D_{2u_m}^2$ とおく． 補題 7.1 から次の計算結果が得られる．

$$\begin{aligned}
\nu(G,E) &= \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{1}\left|\{(H)_G \mid H \in Y_k^j\}\right| \\
&= \sum_{k=1}^{m}\frac{3^{m-k}}{2}\sum_{1\le t_1<\cdots<t_k\le m}\prod_{i=1}^{k}(p_{t_i}-1) - \sum_{i=1}^{m}\frac{p_i+5}{2} + 3^m + 2^{m+1} - 3.
\end{aligned}$$

従って，定理 1.7 は命題 7.3, 7.7 から直ちに得られる． □

コメント 7.1. 本節は [Sei21] に基づいているが，その論文を投稿するにあたり，レフェリーから多くの提案とアドバイスをいただいた．特に，$D_{2u_m}^n$ に関する事実をセクションの冒頭でまとめること，命題 7.3 の証明方法，$G = D_{2p_1p_2}^n$ に対する $\nu(G,E)$ の値を p_1, p_2, n の式でまとめる方法については，レフェリーからいただいた提案に基づいている．

謝辞

去年度まで指導教員であった森本雅治先生には大変お世話になりました．幾何学や代数学の基礎知識，表現論や Smith 同値の基礎理論についてご教示いただき，論文執筆についても手厚くご指導していただきました．ここに，心から深謝の意を表します．現指導教員である石川雅雄先生には，2 編の論文の出版や博士論文の執筆において，多くの有用なアドバイスをいただきました．深くお礼申し上げます．博士前期課程の時から長きに渡り，副指導教員として支えてくださった鳥居猛先生に，感謝の意を表します．寺井直樹先生には，博士論文の執筆において，貴重なご意見をいただきました．ここに，感謝申し上げます．本論文は 2 編の論文 [Sei21], [Sei22] に基づいているが，これらを投稿するにあたり，それぞれのレフェリーから，多くの有用な提案とアドバイスをいただきました．心よりお礼申し上げます．最後に，今まで支えてくれた私の家族と友人たちに心より感謝致します．家族の理解とサポートや，友人たちの激励が，私の研究の支えとなりました．

参考論文

[Sei19] 清田 航平 (Kohei Seita): d-Smith 集合の計算の具体例について, In RIMS Kôkyûroku. **2135**, RIMS Kyoto University, Kyoto, 2019, pp. 12–17.

[Sei21] K. Seita: The d-Smith sets of direct products of dihedral groups, Math. J. Okayama Univ. **63** (2021), 153–165.

[Sei22] K. Seita: The d-Smith sets of cartesian products of the alternating groups and finite elementary abelian 2-groups, accepted by Math. J. Okayama Univ.

引用文献

[AB68] M. F. Atiyah and R. Bott: A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes:II. Applications, Ann. of Math. **88** (1968), 451–491.

[BM96] A. Bak and M. Morimoto: Equivariant surgery with middle dimensional singular sets. I, Forum Math. **8** (1996), 267–302.

[BM08] A. Bak and M. Morimoto: Equivariant intersection theory and surgery theory for manifolds with middle dimensional singular sets, J. K-Theory **2** (2008) Special Issue 03, 507–600.

[Br69] G. E. Bredon: Representations at fixed points of smooth actions of compact groups, Ann. of Math. **89** (1969), 515–532.

[CS82] S. E. Cappell and J. L. Shaneson: Fixed point periodic differentiable maps, Invent. Math. **68** (1982), 1–19.

[CS85] S. E. Cappell and J. L. Shaneson: Representations at fixed points, in: Group Actions on Manifolds (Boulder, Colo. 1983), ed. R. Schultz, Contemp. Math. **36**, 1985, pp. 151–158.

[tD79] T. tom Dieck. *Transformation Groups and Representation Theory*. Lect. Notes Math. **766**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1979.

[DP85] K. H. Dovermann and T. Petrie: Smith equivalence of representations for odd order cyclic groups, Topology **24** (1985), 283–305.

[FH91] W. Fulton and J. Harris: Representation Theory. A First Course, Grad. Texts in Math. 129, Springer-Verlag, New York, 1991.

[J10] X.-M. Ju: The Smith set of the group $S_5 \times C_2 \times \cdots \times C_2$, Osaka J. Math. **47** (2010), 215–236.

[JK84] G. James and A. Kerber: The Representation Theory of the Symmetric Group, Encyclopedia of Math. and its Appl. 16, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.

[KMQ08] A. Koto, M. Morimoto and Y. Qi: The Smith sets of finite groups with normal Sylow 2-subgroups and small nilquotients, J. Math. Kyoto Univ. **48** (2008), 219–227.

[LM98] E. Laitinen and M. Morimoto: Finite groups with smooth one fix point actions on spheres, Forum. Math. **10** (1998), 479–520.

[LMP95] E. Laitinen, M. Morimoto and K. Pawałowski: Deleting-inserting Theorem for smooth actions of finite nonsolvable groups on spheres, Comment. Math. Helv **70** (1995), 10–38.

[LP99] E. Laitinen and K. Pawałowski: Smith equivalence of representations for finite perfect groups, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 297-307.

[Mi66] J. W. Milnor: Whitehead torsion, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 358–426.

[Mo07] M. Morimoto: Construction of smooth actions on spheres for Smith equivalent representations, In RIMS Kôkyûroku. **1569**, RIMS Kyoto University, Kyoto, 2007, pp. 52–58.

[Mo08] M. Morimoto: Smith equivalent $\mathrm{Aut}(A_6)$-representations are isomorphic, Proc. Amer. Math. Soc., **136** (2008), 3683-3688.

[Mo10] M. Morimoto: Nontrivial $\mathcal{P}(G)$-matched $\mathfrak{S}$-related pairs for finite gap Oliver groups, J. Math. Soc. Japan **62** (2010), 623–647.

[Mo12] M. Morimoto: Deleting and inserting fixed point manifolds under the weak gap condition, Publ. RIMS Kyoto Univ. **48** (2012), 623–651.

[Mo16] M. Morimoto: One-fixed-point actions on spheres and Smith sets, Osaka J. Math. **53** (2016), 1003–1013.

[MQ10] M. Morimoto and Y. Qi: The primary Smith sets of finite Oliver groups, in: Group Actions and Homogeneous Spaces, Comenius University, Bratislava, 2009, eds. J. Korbaš, M. Morimoto and K. Pawałowski, Fac. Math. Physics Inform., Comenius University, Bratislava, 2010, pp. 61–73. (http://www.fmph.uniba.sk/index.php?id=2796).

[PaSo02] K. Pawałowski and R. Solomon: Smith equivalence and finite Oliver groups with Laitinen number 0 or 1, Alge. Geom. Topol. **2** (2002), 843–895.

[PaSu13] K. Pawałowski and T. Sumi: The Laitinen conjecture for finite non-solvable groups, Proc. Edinburgh Math. Soc. **56** (2013), 303–336.

[Pe79] T. Petrie: Three theorems in transformation groups, in: Algebraic Topology (Aarhus, 1978), eds. J. Dupont and I. Madsen, Lecture Notes in Math. **763**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1979, pp. 549–572.

[Pe82] T. Petrie: The equivariant J homomorphism and Smith equivalence of representations, in: Current Trends in Algebraic Topology (Univ. Western Ontario, 1981), M. Kane, S. O. Kochman, eds. P. S. Serik and V. P. Snaith, CMS Conference Proc. **2**, Part 2, 1982, pp. 223–233.

[Pe83] T. Petrie: Smith equivalence of representations, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **94** (1983), 61–99.

[Sa76] C. U. Sanchez: Actions of groups of odd order on compact, orientable manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. **54** (1976), 445–448.

[Ser77] J. P. Serre: Linear Representations of Finite Groups, Graduate Texts in Mathematics 42, Springer, New York, 1977.

[Sm60] P. A. Smith: New results and old problems in finite transformation groups, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), 401–415.