氏　　　名	清田　航平
授与した学位	博　士
専攻分野の名称	理　学
学位授与番号	博甲第　　　６３９２　　　号
学位授与の日付	２０２１年　３月　２５日
学位授与の要件	自然科学研究科　　　　数理物理科学専攻 （学位規則第４条第１項該当）
学位論文の題目	有限群の実表現の d-Smith 同値の研究
論文審査委員	教授　　石川　雅雄　　　　教授　　鳥居　猛　　　　教授　　寺井　直樹

学位論文内容の要旨

1960 年に P. A. Smith により「有限群Gに対し，丁度 2 個のG-不動点a,bを持つ球面S上の滑らかなG-作用の 2 つの接空間表現$T_a(S),T_b(S)$は同型であるか」という問題が提唱された。実G-加群V,Wに対し，滑らかなG-作用を持つホモトピー球面Σで，それが丁度 2 個のG-不動点a,bを持ち，更に接空間表現$T_a(\Sigma),T_b(\Sigma)$がそれぞれV,Wと実G-加群として同型である，そのようなΣが存在するとき，T. Petrie は「VとWは Smith 同値である」と定義した。Gの実表現環を$\mathrm{RO}(G)$で表す。2 つの実G-加群VとWが Smith 同値であるような元$[V]-[W]\in\mathrm{RO}(G)$全体を$\mathrm{Sm}(G)$で表し，Gの Smith 集合と呼ぶ。様々な研究者により，$\mathrm{Sm}(G)$が$\{0\}$であるか否かという問題について研究されてきた。K. Pawalowski-L. Solomon により，m次対称群S_mまたはm次交代群A_mの Smith 集合が$\{0\}$であることの必要十分条件は，それぞれ$m\leq 5, m\leq 7$であることが知られており，X. -M. Ju によって$S_5\times C_2\times\ldots\times C_2$，$A_5\times C_2\times\ldots\times C_2$の Smith 集合も決定されている。但し，$C_2$は位数 2 の巡回群を表す。互いに Smith 同値な 2 つの実G-加群V,Wが任意のGの部分群Hに対して$\dim V^H=\dim W^H$を満たすとき，VとWは d-Smith 同値であると定義する。またそのような$[V]-[W]\in\mathrm{RO}(G)$全体を$\mathrm{dSm}(G)$で表し，Gの d-Smith 集合と呼ぼう。

本論文は，$S_m, A_m, S_m\times C_2\times\ldots\times C_2$，$A_m\times C_2\times\ldots\times C_2$の d-Smith 集合を決定したものである。一例をあげると，S_m，$S_m\times C_2\times\ldots\times C_2$の d-Smith 集合は$\{0\}$であること，$A_m, A_m\times C_2\times\ldots\times C_2$の d-Smith 集合は$\mathbb{Z}$-自由加群であり，更にそれが$\{0\}$になることの必要十分条件はそれぞれ $m\in\{1,2,\ldots,9,12,13,17\}$，$m\in\{1,2,3,4,7,8,12\}$ であることを示した。

Gが有限群，Nがその正規部分群であるとき，$\mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}_{P(G)}$を，任意の$G$の部分群$H$に対して$\dim V^H=\dim W^H$，$V^N=W^N=0$，任意の$G$の素数冪位数の部分群$P$に対して$\mathrm{res}^G_P V\cong\mathrm{res}^G_P W$を満たすような$[V]-[W]\in\mathrm{RO}(G)$全体とする。これは$\mathbb{Z}$-自由加群である。本論文では，$G$が素数冪位数でない元を含む有限群の場合の$\mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}_{P(G)}$の階数公式を与えた。$p_1, p_2,\ldots,p_m$を相異なる$m$個の奇素数とし，$D^n_{2p_1p_2\cdots p_m}$を位数$2p_1p_2\cdots p_m$の二面体群の$n$個の直積とする。$\mathrm{RO}_0(G)^{\{N\}}_{P(G)}$の階数公式を用いて，$m=2, n\geq 2$または$m\geq 2, n=2$の場合に$D^n_{2p_1p_2\cdots p_m}$の d-Smith 集合を決定した。

著者は本論文において，以上の具体的な有限群の d-Smith 集合を決定した。

論文審査結果の要旨

清田航平氏は有限群の実表現の d-Smith 集合の自明性を決定することを動機とし，いくつかの有限群に対して d-Smith 集合の決定を行った。特に，対称群・交代群及びその巡回群 C_2 との直積である S_m,A_m,S_m×C_2×⋯×C_2,A_m×C_2 ×⋯×C_2 の d-Smith 集合を決定し， A_m,A_m×C_2 ×⋯×C_2 等の d-Smith 集合が自明{0}であることの必要十分条件を与えた。その手法はヤング対称子を使った対称群の既約表現に基づき，その必要十分条件を共役類を表す整数の分割の条件でシンプルな形で言い換えることができる。また，Smith 集合の先行研究の結果等を用いることで，m,n を 2 以上の整数としたときの，相異なる m 個の奇素数 p_1,p_2,…,p_m に対する位数 2p_1 p_2⋯p_m の二面体群の n 個の直積の d-Smith 集合の決定も行った。これらの研究は独自なもので大変優れており既に２つの論文 Kohei SEITA, “The d-Smith sets of direct products of dihedral groups”, *Math. J. Okayama Univ.* **63** (2021), 153-165, Kohei SEITA, “The d-Smith sets of cartesian products of the alternating groups and finite elementary 2-groups”, to appear in Math. J. Okayama Univ に発表されている。その他にも国内や国外の研究集会において口頭発表を行っており，学位審査の基準を十分満たしており，ここに最終試験の結果を「合」と判断した。