

《論 説》

ナイト流不確実性と資産選択問題

浅 野 貴 央

概 要

本論文では、リスクよりも広い概念であるナイト流不確実性まで不確実性の概念を拡張し、合理的な投資家の投資行動に着目することでナイト流不確実性を考慮することの重要性を概観する。

1 序 論

経済学では、リスク (risk) と不確実性 (uncertaintyあるいはambiguity) を概念的に厳密に峻別する。リスクとは、将来何が起こるかわからない状況に直面したとき、意思決定者の信念 (belief) が一意の確率で表現される状況を意味し、不確実性とは、意思決定者の信念が一意の確率で表現できない状況を意味する¹。経済学の研究が進展するにつれて、リスクの枠組みでは捉えきれない状況の重要性が認識されるようになった。

リスクの枠組みにおける合理的な意思決定者の分析は期待効用理論 (Subjective Expected Utility, 以下ではSEUと略す。)に基づいて行われてきた。SEUは、Savage (1972) によって公理化された理論で、意思決定者がいくつかの公理をみたすとき、意思決定者の信念は一意の確率で表現され、選好はルベーク積分で決定される、という理論である。Ellsberg (1961) がSEUの正当性に疑問を投げかけて以来、その欠陥を克服すべく、期待効用理論の一般化が提案されてきた。それらの理論の中で、Choquet期待効用理論 (Choquet Expected Utility, 以下ではCEUと略す。) とマックスミン期待効用理論 (Maxmin Expected Utility, 以下ではMMEUと略す。) が特に重要である。CEUは、Schmeidler (1989) によって公理化された理論で、意思決定者がいくつかの公理をみたすとき、意思決定者の信念は非加法的測度で表現され、選好はChoquet積分で決定される、という理論である。一方、MMEUは、Gilboa and Schmeidler (1989) によって公理化された理論で、意思決定者がいくつかの公理をみたすとき、意思決定者の信念は確率の集合で表現され、選好はその集合上の期待効用の最小値で決定される、という理論である²。1990年代以降、MMEUおよびCEUの理論研究及び応用研究は進み、資産価格付け理論

1 意思決定者の信念が一意の確率で表現できない状況の重要性を最初に指摘したKnight (1921) にちなんで、ナイト流不確実性とも呼ばれる。

2 非加法的測度がある条件を満たすとき、CEUとMMEUは一致する。 $(\Omega, 2^\Omega)$ を可測空間とする。 μ を凸な非加法的測度とし、 p を $(\Omega, 2^\Omega)$ 上で定義されるすべての確率の集合とする。 Ω から $\mathbb{R}$ への有界関数 X に対して、以下が成立する。

(Dow and Werlang (1992), Epstein and Wang (1994)) や職探し理論 (Nishimura and Ozaki (2004)) 等において、従来のリスクの枠組みでは説明できなかった現象が解明されるようになった。

市場において、株価が取引されないあるいは価格が付かない状況が数分間あるいはそれ以上の時間帯、観察されることがあるが、このような状況をportfolio inertiaとよぶ。取引コストを考慮すれば、portfolio inertiaが存在することをモデルに基づいて説明できるが、取引コスト等を考慮せず、合理的な意思決定者の最適な投資戦略の結果としてportfolio inertiaが存在することをモデルに基づいて説明することは長い間、困難であった。SEUの枠組みにおいて、Arrow (1965) は、投資家は危険資産の期待値が今期の危険資産の価格を上回れば株式を購入し、下回れば売却することをモデルに基づいて説明した。Arrow (1965) の結果は、株式を購入するか売却するかは、一点を境に決定され、株式を購入しなければ売却もしない、つまり、投資ポジションを変更しない価格帯が存在することは説明できない、ということを含意している。Dow and Werlang (1992) は、非期待効用理論の枠組みにおいて、ナイト流不確実性を考慮することによって、合理的な意思決定者の最適な投資戦略の結果としてportfolio inertiaが存在することをモデルに基づいて初めて説明した。本論文は、portfolio inertiaに焦点を当てることによって、非期待効用理論の重要性について議論する。

本論文の構成は以下の通りである。第2節では、本論文で必要な数学的概念を提示する。第3節では、資産選択問題を分析する。第4節では、第3節の拡張を検討する。第5節は結語である。

2 予備的概念

$\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ を状態空間、 2^Ω を Ω のすべての部分集合の集まり (集合族)、 $\mathcal{F}$ を空集合を除くすべての部分集合の集まりとする。また、 $\mathbb{R}^\Omega = \{x|x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}$ は Ω 上の実数値関数の集合とする。

定義 1. 以下の条件を満たす非空の集合族 $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ を λ -システムとよぶ。

($\lambda.1$) $\Omega \in \mathcal{A}$,

($\lambda.2$) $A \in \mathcal{A}$ であるならば、 $A^c \in \mathcal{A}$,

($\lambda.3$) $\langle A_i \rangle_{i=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ かつ $i \neq j$ に対して $A_i \cap A_j = \emptyset$ のとき、 $\cup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{A}$.

ただし、 A^c は A の補集合を、 $\emptyset$ は空集合をそれぞれ表す。

以下の定義から明らかなように、 λ -システムは σ -加法族よりも条件が緩いことに注意せよ。

定義 2. 以下の条件を満たす非空の集合族 $\mathcal{M} \subset 2^\Omega$ を σ -加法族とよぶ。

($\sigma.1$) $\Omega \in \mathcal{M}$,

($\sigma.2$) $A \in \mathcal{M}$ であるならば、 $A^c \in \mathcal{M}$,

($\sigma.3$) $\langle A_i \rangle_{i=1}^\infty \subset \mathcal{M}$ のとき、 $\cup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{M}$.

$$\int X(\omega)\mu(d\omega) = \min \left\{ \int X(\omega)p(d\omega) \mid p \in \text{core}(\mu) \right\}$$

ただし、 $\text{core}(\mu) = \{p \in \mathcal{P} \mid (\forall E \in 2^\Omega) p(E) \geq \mu(E)\}$ とする。

Ω の集合族を、事象が起きたか起きなかったかを捉える意思決定者の情報と解釈すると、 σ -加法族は、集合 A と B が把握できるならば、その交わり、 $A \cap B$ の部分も把握できることを要請する一方、 λ -システムは、集合 A と B が把握できていたとしても、その交わりの部分は情報として把握できないことを要請している³。

定義 3. Ω を集合、 $\mathcal{A}$ を Ω 上の λ -システムとする。関数 $p: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ を考え、 p は以下の条件を満たすとする。

(p.1) $\langle A_i \rangle_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ かつ $i \neq j$ に対して $A_i \cap A_j = \emptyset$ のとき、 $p(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i)$.

(p.2) $p(\Omega) = 1$.

このとき、 p を $(\Omega, \mathcal{A})$ 上の確率（あるいは確率測度）とよぶ。

通常、確率は σ -加法族上に定義されるが、(p.1) および (p.2) を満たすことだけを要求するのであれば、 σ -加法族よりも条件が緩い λ -システム上で定義すれば十分である。また、この論文では、 $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ を λ -システム確率空間とよぶ。

定義 4. 以下で定義される関数 $p_{\mathcal{A}}: 2^{\Omega} \rightarrow [0, 1]$ を $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ に対応する内測度とよぶ。

$$(\forall B \in 2^{\Omega}) \quad p_{\mathcal{A}}(B) = \sup\{p(A) \mid A \in \mathcal{A}, A \subset B\}.$$

ここで、 $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$ であることから、 $p_{\mathcal{A}}$ は定義可能である。

2^{Ω} 上の実数値関数で、 $\mu(\emptyset) = 0$ をみたす関数をゲームあるいは譲渡可能効用ゲームとよび、ゲーム μ に関して、以下を定義する。

- 任意の $E \in 2^{\Omega}$ に対して $\mu(E) \geq 0$ のとき、 μ を非負とよぶ。
- $E \cap F = \emptyset$ をみたす任意の $E, F \in 2^{\Omega}$ に対して $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$ が成立するとき、 μ を加法的とよぶ。
- 任意の $E, F \in 2^{\Omega}$ に対して $\mu(E \cup F) \geq \mu(E) + \mu(F) - \mu(E \cap F)$ が成立するとき、 μ を凸とよぶ。
- $E \subseteq F$ をみたす任意の $E, F \in 2^{\Omega}$ に対して $\mu(E) \leq \mu(F)$ かつ $\mu(\Omega) = 1$ をみたすとき、 μ を非加法的測度とよぶ。

ゲーム μ は、 $\mathcal{F}$ に対して $\mathbb{R}$ を割り当てる関数なので、ゲームの集合全体を $\mathbb{R}^{\mathcal{F}}$ で表すとする。

任意の提携 $T \in \mathcal{F}$ 上の全会一致ゲーム u_T を以下で定義する：

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & T \subseteq S \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

3 詳細は、Zhang (1999), Asano (2006) を参照せよ。情報と σ -加法族に関して、Dubra and Echenique (2004) も参照せよ。

つまり、全会一致ゲームとは、任意の提携 T に対して、提携 S が T を含むとき（提携 T のメンバーがすべて S 内に揃ったとき）かつそのときに限り利得 1 が得られるゲームのことである。全会一致ゲームに関して、以下の定理が成立する。

定理 1 (Shapley (1953)). 任意の提携 $T \in \mathcal{F}$ に対して、 u_T を全会一致ゲームとする。このとき、任意のゲーム $\mu \in \mathbb{R}^{\mathcal{F}}$ に対して、

$$\mu = \sum_{T \in \mathcal{F}} \beta_T u_T$$

をみたす $|\mathcal{F}| = 2^\Omega - 1$ 個の係数の組 $\{\beta_T | T \in \mathcal{F}\}$ が一意に存在する。ここで、 $|\cdot|$ は $\mathcal{F}$ の集合の個数を表す。この係数の組をメビウス係数という。

以下の証明は中山、舟木、武藤 (2008, p. 60) による。

証明. ゲーム μ は、 $\mathcal{F}$ の要素、つまり、 2^Ω から空集合を除いた $2^\Omega - 1$ 個の提携にどのような数字を割り当てるかを表す関数なので、 $\{\beta_T | T \in \mathcal{F}\}$ が $2^\Omega - 1$ 次元のベクトル空間 $\mathbb{R}^{2^\Omega - 1} = \mathbb{R}^{\mathcal{F}}$ の基底であることを示せば良い。つまり、 $\{\beta_T | T \in \mathcal{F}\}$ が一次独立であることを示せば十分である。

少なくとも 1 つの集合 $T \in \mathcal{F}$ に対して、 $\beta_T \neq 0$ とし、そのうちの極小な集合を T' とする。つまり、任意の $T \subset T'$ に対して、 $\beta_{T'} \neq 0$, $\beta_T = 0$ をみたす T' をとる。このとき、定義より、 $T \subseteq T'$ でなければ $u_T(T') = 0$ となるから、

$$\sum_{T \in \mathcal{F}} \beta_T u_T(T') = \sum_{T \subset T', T \in \mathcal{F}} \beta_T u_T(T') + \beta_{T'} u_{T'}(T') = \beta_{T'} u_{T'}(T')$$

であり、 β_T の定義および $u_{T'}(T') = 1$ となることから、右辺の $\beta_{T'}$ は $\beta_{T'} \neq 0$ である。一方、 $\sum_{T \in \mathcal{F}} \beta_T u_T(T') = 0$ であることから矛盾。したがって、任意の $T \in \mathcal{F}$ に対して $\beta_T = 0$ 。 $\{\beta_T | T \in \mathcal{F}\}$ が一次独立であることから一意性も直ちに従う⁴。 $\square$

協力ゲーム理論における重要な概念であるシャプレー値 (Shapley value) はメビウス係数を使って表現することができる⁵。

定義 5. 関数 $x \in \mathbb{R}^\Omega$ と非加法的測度 μ について、 x の μ に関する Choquet 積分を以下で定義する。

4 ほぼ同様であるが、次のように証明しても良い。 $|T'| = 1$ であれば、 $u_T(T') = 1$ をみたす提携は $T = T'$ のときだけなので、 $(\sum_{T \in \mathcal{F}} \beta_T u_T)(T') = \beta_{T'} = 0$ が成立する。次に、大きさが k 未満のすべての提携 T について $\beta_T = 0$ が成立しているとする。ただし、 $k > 1$ とする。ここで、 $|T'| = k$ なる提携 T' を固定する。大きさが k 以上で、提携 T' を含む提携 T'' を考えると、 $u_{T''}(T') = 1$ となるのは $T'' = T'$ のときだけであるから ($|T''| \geq |T'|$ かつ $T'' \neq T'$ のとき、 $u_{T''}(T') = 0$)、 $(\sum_{T \in \mathcal{F}} \beta_T u_T)(T') = (\sum_{|T| < k} \beta_T u_T)(T') + (\sum_{|T| \geq k} \beta_T u_T)(T') = \beta_{T'} = 0$ が成立する。この証明は梶井 (2012) による。

5 シャプレー値の公理化については多くの論文があるが、例えば、Shapley (1953)、Young (1985)、あるいは Chun (1991) を参照せよ。また、Asano and Kojima (2014) も参照せよ。

$$\int x d\mu = \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} \mu(x \geq \alpha) d\alpha + \underline{x} \mu(\Omega) \quad (1)$$

ここで, $\mu(x \geq \alpha) = \mu(\{\omega \in \Omega | x(\omega) \geq \alpha\})$, $\bar{x} = \max_{\omega \in \Omega} x(\omega)$, $\underline{x} = \min_{\omega \in \Omega} x(\omega)$ とする。

定義より, Choquet積分は以下のように書き換えることが出来る。

$$\int x d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(x \geq \alpha) d\alpha + \int_{-\infty}^0 (\mu(x \geq \alpha) - \mu(\Omega)) d\alpha$$

また, 定義より, $\int 1_E d\mu = \int_0^1 \mu(1_E \geq \alpha) = \mu(E)$ が成立することがわかる。ここで, 1_E は集合 E の定義関数である。Choquet積分について, 以下が成立する。

定理 2. 関数 $x \in \mathbb{R}^\Omega$, 非加法的測度 μ, μ' に対して, 以下が成立する。

- (1) 全会一致ゲーム u_T に対して, $\int x du_T = \min_{\omega \in T} x(\omega)$.
- (2) 任意の $s, t \in \mathbb{R}$ に対して, $\int x d(s\mu + t\mu') = s \int x d\mu + t \int x d\mu'$.
- (3) 任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対して, $\int t x d\mu = t \int x d\mu$.

証明. 定義より証明できる。 □

メビウス変換を考慮することによって, Choquet積分に関する以下のような線形性が成立する。

定理 3 (Gilboa and Schmeidler (1994)). 非加法的測度 μ のメビウス変換を, 全会一致ゲームを使っ

て $\mu = \sum_{T \in \mathcal{F}} \beta_T u_T$ と書くと, 任意の $x \in \mathbb{R}^\Omega$ に対して,

$$\int x d\mu = \sum_{T \in \mathcal{F}} \beta_T \min_{\omega \in T} x(\omega)$$

が成立する。

証明. 定理 2(1), (2)より, 以下が成立する。

$$\begin{aligned} \int x d\mu &= \int x d\left(\sum_T \beta_T u_T\right) = \sum_T \beta_T \int x du_T \\ &= \sum_T \beta_T \min_{\omega \in T} x(\omega). \end{aligned} \quad \square$$

p を確率測度とし, $x \in \mathbb{R}^\Omega$ とする。ルベーク積分 $\int x dp$ において, 任意の $x, y \in \mathbb{R}^\Omega$ に対して加法性, つまり, $\int (x + y) dp = \int x dp + \int y dp$ が成立するが, Choquet積分において, この加法性は

必ずしも成立しない⁶。Choquet積分の加法性を証明するために、共単調性を以下で定義する。

定義 6. 2つの関数 $x, y \in \mathbb{R}^\Omega$ について、任意の $i, j \in \Omega$ に対して $(x(i) - x(j))(y(i) - y(j)) \geq 0$ が成立するとき、共単調とよぶ。

μ を非加法的測度とし、 $x \in \mathbb{R}^\Omega$ とする。Choquet積分 $\int x d\mu$ は、 $x \in \mathbb{R}^\Omega$ に関して一次同次であり、共単調な関数 $x, y \in \mathbb{R}^\Omega$ に関して加法性を持つ。また、 $\mu \geq 0$ であれば単調性を持つ（つまり、 $x \geq y$ ならば $\int x d\mu \geq \int y d\mu$ ）。Schmeidler (1986) は、そのような性質を持つ $\mathbb{R}^\Omega$ 上の唯一の写像は Choquet積分であることを証明した⁷。

定理 4 (Schmeidler (1986)). 写像 $I : \mathbb{R}^\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が以下の二つの性質を満たすとする。

(1) (一次同次性) 任意の $x \in \mathbb{R}^\Omega$ について、 $t \in \mathbb{R}_+$ であるならば、 $I(tx) = tI(x)$ 。

(2) (共単調加法性) $x, y \in \mathbb{R}^\Omega$ が共単調であるならば、 $I(x + y) = I(x) + I(y)$ 。

このとき、すべての $x \in \mathbb{R}^\Omega$ に対して、 $I(x) = \int x d\mu$ が成立する。ここで、 μ は $\mu(E) = I(1_E)$ で定義される。

この定理の系として以下が成立する。

系 1. 写像 $I : \mathbb{R}^\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が以下の二つの性質を満たすとする。

(1) (単調性) 任意の $x, y \in \mathbb{R}^\Omega$ について、 $x \geq y$ であるならば、 $I(x) \geq I(y)$ 。

(2) (共単調加法性) $x, y \in \mathbb{R}^\Omega$ が共単調であるならば、 $I(x + y) = I(x) + I(y)$ 。

このとき、すべての $x \in \mathbb{R}^\Omega$ に対して、 $I(x) = \int x d\mu$ が成立する。ここで、 μ は $\mu(E) = I(1_E)$ で定義される。

CEUの枠組みにおける資産選択問題を考える際、Choquet積分におけるジェンセンの不等式が重要な役割を果たす。

定理 5 (ジェンセンの不等式). $(\Omega, 2^\Omega, \mu)$ を測度空間とする。ただし、 μ は非加法的測度とする。 X を Ω から $\mathbb{R}$ への有界関数とし、 u は $\mathbb{R}$ 上の増加かつ凹な実数値関数とする。このとき、任意の非加法的測度 μ に対して、以下が成立する。

6 ルバーク積分において成立する $-\int (-x) d\mu = \int x d\mu$ の性質も Choquet積分では必ずしも成立しない (定理 2(3)を参照)。この性質が成立しないことが、後述する資産選択問題において重要な役割を果たす。

7 Kajii, Kojima, and Ui (2007) は、写像 $I : \mathbb{R}^\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ の加法性 (任意の $x, y \in \mathbb{R}^\Omega$ に対して $I(x + y) = I(x) + I(y)$ が成立する。) と共単調加法性を両極端とする $\mathcal{E}$ -共最小加法性 ($\mathcal{E}$ -cominimum additivity) を提案した。ここで、 $\mathcal{E}$ はある集合族とする。Asano and Kojima (2013) は、Kajii, Kojima, and Ui (2007) に対して、意思決定理論の視点から公理的基礎付けを行った。

$$\int u(X(\omega)) \mu(d\omega) \leq u \left(\int X(\omega) \mu(d\omega) \right).$$

証明. Asano (2006) を参照せよ。

□

3 資産選択問題

この節では、資産選択問題を考える。まず、リスクの下での資産選択問題を分析した Arrow (1965) に基づいて、モデルを説明する。次に、ナイト流不確実性の下での資産選択問題を考える。

$W \in \mathbb{R}_{++}$ を $t = 0$ における初期富, $N \in \mathbb{R}$ を $t = 0$ における投資金額, $q > 0$ を $t = 0$ における危険資産の価格, X を $t = 1$ におけるこの危険資産の現在価値とする。ここで, X を Ω から $\mathbb{R}$ への有界関数とする。さらに, $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を増加かつ凹関数とする。

3.1 リスクの下での資産選択問題

この小節では、リスクの下での投資家の資産選択問題を考える。投資家は以下の期待効用を最大にするように2つの金融資産、つまり、無リスク資産および危険資産の投資額を決定するとする。

$$\int u \left(W - N + \frac{N}{q} X(\omega) \right) p(d\omega)$$

Arrow (1965) は以下の定理を導出した。

定理6 (Arrow (1965)). p を可測空間 $(\Omega, \mathcal{M})$ 上の確率測度とする。ただし, $\mathcal{M}$ は σ -加法族とする。

関数 $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を増加かつ凹関数とする。このとき, 危険資産の価格 q が以下の式を満たすとき投資家は危険資産を購入 (売却) する。

$$q < (>) \int X(\omega) p(d\omega)$$

証明. Arrow (1965) を参照せよ。

□

この定理は、危険資産の期待値が危険資産の価格を上回れば危険資産を購入し、逆に下回れば売却 (あるいは空売り) するということを主張している。つまり、危険資産を購入するか売却するかは、危険資産の $t = 0$ における価格 q の一点を境に決定されると主張している。この定理から明らかな通り、序論で説明した portfolio inertia の存在は、リスクの枠組みでは説明できない。数学的には、ルベーグ積分の微分可能性が、この結果を導出する上で重要な役割を果たしている。

3.2 ナイト流不確実性の下での資産選択問題

本小節では、不確実性の概念をナイト流不確実性に拡張することによって、CEUの枠組みにおいて portfolio inertiaが存在することをモデルに基づいて説明する。ナイト流不確実性を考慮することによって portfolio inertiaが存在することを最初に説明したのは Dow and Werlang (1992) であるが、本論文では、Asano (2006) の枠組みに基づいて議論する。前小節同様、投資家は以下の非期待効用を最大にするように2つの金融資産、つまり、無リスク資産および危険資産の投資額を決定するとする。ただし、目的関数が異なっていることに注意せよ。

$$\int u \left(W - N + \frac{N}{q} X(\omega) \right) p_A(d\omega)$$

ここで、 p_A は前節で定義した内測度である。簡単に確認できるが、 p_A は非加法的測度の条件をみたすので、上記の目的関数は Choquet積分である。

定理7 (Asano (2006)). p_A を $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ に対応する内測度とする。関数 $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を増加かつ凹関数とする。このとき、以下が成立する。

- (a) 危険資産の価格 q が以下の条件をみたすとき、投資家は危険資産を購入もしなければ売却もしない。つまり、投資ポジションを変更しない。

$$\int X(\omega) p_A(d\omega) < q < - \int (-X(\omega)) p_A(d\omega).$$

- (b) さらに、 u は連続微分可能かつ、 $u'(\cdot) > 0$ を仮定する。このとき、危険資産の価格 q が $q < \int X(\omega) p_A(d\omega)$ をみたすとき、危険資産を購入し、 $q > - \int (-X(\omega)) p_A(d\omega)$ をみたすとき、危険資産を売却する。

証明. Asano (2006) を参照せよ。 □

ここで、いくつかの補足説明を加える。第1に、この定理は、CEUの枠組みにおいて、ナイト流不確実性を考慮すると、portfolio inertiaの存在をモデルに基づいて説明できることを主張している。第2に、序章で説明したとおり、MMEUとCEUを関連づけるためには、非加法的測度の凸性は重要であるが⁸、Dow and Werlang (1992) 同様、上の定理から明らかとなっており、非加法的測度の凸性は portfolio inertiaの存在を説明する上で必ずしも必要ではない⁹。第3に、数学的には、非加法的測度の凸性よりも Choquet積分の微分不可能性が、この結果を導出する上で重要な役割を果たしている¹⁰。

⁸ 脚注2を参照せよ。

⁹ 内測度 p_A は必ずしも凸性をみたさない。詳しくは Asano (2006) を参照せよ。

¹⁰ MMEUの枠組みにおいても、portfolio inertiaを導出する上で微分不可能性が重要な役割を果たす。より正確には、片側微分可能性であるが、この点については、Asano and Shibata (2011), Asano, Kanaya, and Takahashi (2014), Epstein and Wang (1994) を参照せよ。

2節で説明したように、 λ -システムを意思決定者の情報と解釈すると、以下の定理が成立する。

定理 8 (Asano (2006)). $(\Omega, \mathcal{A}_1, p_1)$ および $(\Omega, \mathcal{A}_2, p_2)$ を λ -システム確率空間とする。ただし、 $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, $p_1 = p_2|_{\mathcal{A}_1}$, q を $t=0$ における危険資産の価格, X を Ω から $\mathbb{R}$ への有界関数で, $t=1$ における危険資産の現在価値とする。1人の投資家の選好は, $(\Omega, \mathcal{A}_1, p_1)$ に対応する内測度 $p_{\mathcal{A}_1}$ を持つCEUで表現されていると仮定し, 別の投資家の選好は, $(\Omega, \mathcal{A}_2, p_2)$ に対応する内測度 $p_{\mathcal{A}_2}$ を持つCEUで表現されていると仮定する。このとき, q が以下をみたすとき, 2人の投資家はともに危険資産に対するポジションを変更しない。つまり, 危険資産を購入しなければ売却もしない。

$$\int X(\omega) p_{\mathcal{A}_2}(d\omega) < q < - \int (-X(\omega)) p_{\mathcal{A}_2}(d\omega).$$

さらに, 上の不等式をみたす価格に対して, $(\Omega, \mathcal{A}_1, p_1)$ に対応する内測度 $p_{\mathcal{A}_1}$ を持つCEUで表現される投資家のportfolio inertiaは, $(\Omega, \mathcal{A}_2, p_2)$ に対応する内測度 $p_{\mathcal{A}_2}$ を持つCEUで表現される投資家のportfolioよりも広い。つまり, 以下の不等式が成立する。

$$\int X(\omega) p_{\mathcal{A}_1}(d\omega) \leq \int X(\omega) p_{\mathcal{A}_2}(d\omega) < q < - \int (-X(\omega)) p_{\mathcal{A}_2}(d\omega) \leq - \int (-X(\omega)) p_{\mathcal{A}_1}(d\omega).$$

証明. Asano (2006) を参照せよ。□

この定理は, 確率がふれる集合を多く有している投資家のportfolio inertiaは, そうでない投資家よりも portfolio inertiaが狭いことを主張している。換言すれば, λ -システムに含まれる集合が多ければ多いほど (ファインであればあるほど), 投資ポジションを変更しない, つまり, 購入しなければ売却もしない価格帯が狭いことを含意している。

4 拡張

前節の議論では, $t=0$ と $t=1$ の二期間のモデルを議論したが, 現実の資産選択問題を考慮した場合, 信念の更新を考慮したモデルや多期間のモデルによる分析が重要である。

Asano (2010) は, 人々の信念が ε -contaminationで表現されるMMEUの枠組みを考慮した場合, 信念の更新をモデルに取り入れたモデルにおいて, ナイト流不確実性の度合いが十分大きい場合, 正の確率で生起する事象を観察すると, 直観に反して, portfolio inertiaが拡大することを示した¹¹。

Epstein and Wang (1994) は, 期待効用理論の枠組みにおける多期間モデル (Lucas (1978)) を非期待効用理論の枠組みに拡張し, オイラー不等式を導出, 均衡価格がある価格帯に収まっている限り,

11 ε -contaminationの公理的基礎付けについては, Nishimura and Ozaki (2006), Asano and Kojima (2013) を参照せよ。ナイト流不確実性の度合いを測るパラメータとして非加法的測度の凸性に着目した論文については, Ozaki and Streufert (1999, 2001) あるいは, Asano (2012) を参照せよ。

それらがすべて均衡価格として達成されることを証明した。

また, Asano, Kanaya, and Takahashi (2014) は, 別の観点から $t = 0$ と $t = 1$ の二期間のモデルにおける資産選択問題を議論した。Asano, Kanaya, and Takahashi (2014) は, 非期待効用理論の枠組みにおいて, $t = 0$ 以前に危険資産を保有しているか否かが, portfolio inertiaの存在に影響を与えることを示した。非期待効用理論の枠組みを考慮したからといって, 必ずしも portfolio inertiaの存在を導けるわけではないことを明らかにした¹²。

5 結 語

本論文では, portfolio inertiaに焦点を当てながら, ナイト流不確実性を考慮することの重要性を概観した。リスクよりも広い概念であるナイト流不確実性を考慮することの重要性は, 資産選択問題に限らず, 国際経済学, 産業組織論, 環境経済学においても認識されている。Epstein and Miao (2003) は, ナイト流不確実性を考慮することによって, ホームバイアスパズルを解消した¹³。また, Nishimura and Ozaki (2004) は, 失業者が職のオファーを受け入れて働くか, 失業手当を受け取り, 次期の労働市場でもう一度, 職探しを行うかという職探し (job search) 理論において, 労働市場に関する将来の (ナイトの意味での) 不確実性が増大すると, 職のオファーを受け入れるタイミングが早まるという直観に合う結果を理論的に証明した¹⁴。従来のリスクの枠組みでは, 労働市場に関する将来の (リスクの意味での) 不確実性が増大すると, 職のオファーを受け入れるタイミングが先送りされるという直観に合わない結論が得られており, Nishimura and Ozaki (2004) は, 長年, パズルとして認識されていた問題を初めて解明した重要な結果である。

ナイト流不確実性及び非期待効用理論の応用研究が進展するにつれて, 非期待効用理論の基礎研究も進展した¹⁵。基礎研究とともにその応用研究および実証研究の進展も待たれる。

参 考 文 献

- [1] Arrow, K. J. (1965): *Aspects of the Theory of Risk-Bearing*, Helsinki: Yrjo Jahnsonin Saatio.
- [2] Asano, T. (2006): "Portfolio Inertia under Ambiguity," *Mathematical Social Sciences* 52, 223-232.
- [3] Asano, T. (2010): "Portfolio Inertia and Epsilon-Contaminations," *Theory and Decision* 68, 341-365.
- [4] Asano, T. (2012): "Uncertainty Aversion and Portfolio Inertia," *Bulletin of Economic Research* 64, 334-343.
- [5] Asano, T., S. Kanaya, and S. Takahashi (2014): "An Ambiguity-Free Asset and Portfolio Inertia under Max-min Expected Utility," mimeo.
- [6] Asano, T. and H. Kojima (2013): "An Axiomatization of Choquet Expected Utility with Cominimum Independence," forthcoming in *Theory and Decision*.
- [7] Asano, T. and H. Kojima (2014): "Modularity and Monotonicity of Games," *Mathematical Methods of Operations Research*

12 CEUの枠組みで portfolio inertiaが存在するかどうかは, 定義6で提示した関数の共単調性が鍵となる。詳細は Asano, Kanaya, and Takahashi (2014) を参照せよ。

13 ホームバイアスパズルとは, 投資家は他国よりも自国の金融資産に高い比率で投資する傾向があるが, リスクの枠組みではこの状況を十分説明できない問題のことである。

14 Asano, Okudaira, and Sasaki (2014) は, Nishimura and Ozaki (2004) の結果を実験経済学の視点からサポートした。

15 例えば, Klibanoff, Marinacci, and Mukerji (2005), Maccheroni, Marinacci, and Mukerji (2006) 等を参照せよ。

- 80, 29–46.
- [8] Asano, T., H. Okudaira, and M. Sasaki (2014): “An Experimental Test of a Search Model under Knightian Uncertainty,” mimeo.
- [9] Asano, T. and A. Shibata (2011): “Risk and Uncertainty in Health Investment,” *European Journal of Health Economics* 12, 79–85.
- [10] Chun, Y. (1991): “A New Characterization of the Shapley Value,” *Games and Economic Behavior* 1, 119–130.
- [11] Dubra, J. and F. Echenique (2004): “Information is not about Measurability,” *Mathematical Social Sciences* 47, 177–185.
- [12] Dow, J. and S. R. C. Werlang (1992): “Uncertainty Aversion, Risk Aversion, and the Knightian Uncertainty,” *Econometrica* 60, 197–204.
- [13] Ellsberg, D. (1961): “Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms,” *Quarterly Journal of Economics* 75, 643–669.
- [14] Epstein, L. G. (1999): “A Definition of Uncertainty Aversion,” *Review of Economic Studies* 66, 579–608.
- [15] Epstein, L. G. and T. Wang (1994): “Intertemporal Asset Pricing under Knightian Uncertainty,” *Econometrica* 62, 283–322.
- [16] Epstein, L. G. and J. Miao (2003): “A Two-Person Dynamic Equilibrium under Ambiguity,” *Journal of Economic Dynamics and Control* 27, 1253–1288.
- [17] Gilboa, I. and D. Schmeidler (1989): “Maxmin Expected Utility with Non-Unique Prior,” *Journal of Mathematical Economics* 18, 141–153.
- [18] Gilboa, I. and D. Schmeidler (1994): “Additive Representation of Non-Additive Measures and the Choquet Integral,” *Annals of Operations Research* 52, 43–65.
- [19] 梶井厚志 (2012) : 『凸集合の分離定理 : 経済学・ゲーム理論への応用』, 講義ノート
- [20] Kajii, A., H. Kojima, and T. Ui (2007): “Cominimum Additive Operators,” *Journal of Mathematical Economics* 43, 218–230.
- [21] Klibanoff, P., M. Marinacci, and S. Mukerji (2005): “A Smooth Model of Decision Making under Uncertainty,” *Econometrica* 73, 1849–1892.
- [22] Knight, F. (1921): *Risk, Uncertainty and Profit*. Boston: Houghton Mifflin.
- [23] Lucas, R. E. Jr. (1978): “Asset Prices in an Exchange Economy,” *Econometrica* 46, 1429–1445.
- [24] Maccheroni, F., M. Marinacci, and A. Rustichini (2006): “Ambiguity Aversion, Robustness, and the Variational Representation of Preferences,” *Econometrica* 74, 1447–1498.
- [25] 中山幹夫, 舟木由喜彦, 武藤滋夫 (2008) : 『協力ゲーム理論』, 勁草書房
- [26] Nishimura, K. G. and H. Ozaki (2004): “Job Search and Knightian Uncertainty,” *Journal of Economic Theory* 119, 299–333.
- [27] Nishimura, K. G. and H. Ozaki (2006): “An Axiomatic Approach to Epsilon-contamination,” *Economic Theory* 27, 333–340.
- [28] Ozaki, H. and P. Streufert (1999): “Dynamic Programming for Choquet Objectives,” mimeo.
- [29] Ozaki, H. and P. Streufert (2001): “Solutions for Some Dynamic Problems with Uncertainty Aversions,” *Japanese Economic Review* 52, 251–283.
- [30] Savage, L. J. (1972): *The Foundation of Statistics*. Dover Publications. (First published 1954.)
- [31] Schmeidler, D. (1986): “Integral Representation without Additivity,” *Proceedings of the American Mathematical Society* 97, 255–261.
- [32] Schmeidler, D. (1989): “Subjective Probability and Expected Utility without Additivity,” *Econometrica* 57, 571–587.
- [33] Shapley, L. S. (1953): “A Value for n -person Games,” In: Kuhn, H., Tucker, A. (Eds.), *Contributions to the Theory of Games*, vol. II. Princeton University Press, 307–317.
- [34] Young, H. P. (1985): “Monotonic Solutions of Cooperative Games,” *International Journal of Game Theory* 14, 65–72.
- [35] Zhang, J. (1999): “Qualitative Probabilities on λ -systems,” *Mathematical Social Sciences* 38, 11–20.

Knightian Uncertainty and Asset Pricing

Takao Asano

Abstract

This paper sheds light on the importance of Knightian uncertainty (or ambiguity) for rational decision makings and provides a short survey of asset pricing under Knightian uncertainty (or ambiguity).