

微分の導入にグラフ電卓を用いる 接線のイメージ調査と曲線を調べる活動

末廣 聡
岡山県立勝岡田高等学校

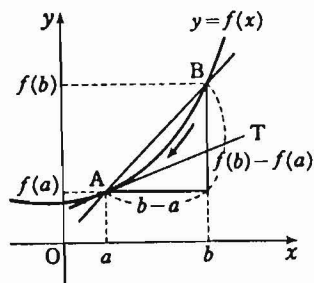
「もっと数学をいじってみること¹⁾」, これまでにない展開を可能にしてくれるテクノロジーが大変手に入りやすくなっている. 今後の中教育の数学では, 機能が発達した電卓の活用を併せて「コンピュータは人間の知性的活動のための有能な(少々気の利かない)道具」との見方を維持しつつ, 数学全般のカリキュラムのコンピュータ化を手堅く推進するのが正道であるともいわれている. 本物の数学的体験の機会を増やしてくれる²⁾との期待も大きい.

本研究は, グラフからはじまる関数の指導の一例として, 微分の導入にグラフ電卓を用いてその効用を研究した. グラフ電卓のようなテクノロジーの出現により, 捉えにくい微分概念の学習に”調べる活動”を復権することができ³⁾. 微分の学習の導入は, 平均変化率, 微分係数, 接線, 導関数といった順に展開されるのが一般的であるが, 完全な理論展開を強要することで大変難しい授業にならざるおえなかったのがこれまでである. ここにグラフ電卓を導入し, 微分の導入を一考したい. グラフ電卓を用いて微分係数の概念を視覚化することが, 生徒の微分係数の理解をどれほどサポートできるか検証した.

1. 微分の導入

従来, 微分の学習の導入は, 平均変化率の学習にはじまり, 次に変数が連続的に変化する場合の関数の極限の考えを導入し, 微分係数, 導関数の概念に到達させるような展開が大半であるといっていよい. 多くの教科書の展開を具体的に表現⁴⁾すればまず, 「 a を定めておいて, b を a に限りなく近づけると, 平均変化率 $(f(b)-f(a))/(b-a)$ が一定の値に限りなく近づく場合, この値を関数 $f(x)$ の $x=a$ における変化率 または微分係数 といい, $f'(a)$ で表す. 」と, 微分係数という言葉が登場する. 続いて, 平均変化率と微分係数の意味を関数のグラフについて考えてみようということで次のような展開になる. 「関数 $f(x)$ について, x の値が a から b まで変化するときの平

均変化率 $(f(b)-f(a))/(b-a)$ は, 曲線 $y=f(x)$ 上の2点 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ を結ぶ直線 AB の傾きを表している. 」そして, 「ここで, b を a に限りなく近づけると, 点 B は曲線上を移動しながら点 A に限りなく近づく. このとき, 直線 AB の傾きは $f'(a)$ の値に限りなく近づく. さらに, この直線を曲線 $y=f(x)$ 上の点 A における曲線の接線という. 」



もちろん、この展開は数学的に完全なものであり、スタンダードなものであるといえる。しかしながら、このような抽象的な文字の扱いはとくに苦手な生徒が多く、生徒にとっては分かりにくい内容であることは確かである。また、割線の延長としての接線の概念が非常に捉えにくいものであることから、微分係数と接線の傾きとの関係は把握しにくいものである。そこで、グラフ電卓を利用し、わかりやすい導入を工夫したい。少しでもその難しさが解消できたと考える。グラフ電卓を用いた授業をする前に、先行調査として接線のイメージ調査を実施した。

2. 接線のイメージ調査について

接線についてのイメージ調査は、微分の学習のポイントともいえる接線の概念を、生徒がどのように把握しているかを調査した。"接線"という言葉は中学校の段階で次のような形で導入される¹⁵⁾。「円と直線の位置関係は、3つの場合(2点で交わる、一点で出あう、出あわない)に分けられ、直線が円とただ1点で出あうとき、この直線は円に接するといい、この直線を円の接線、出あう1点を接点という。」高等学校では数学Ⅰ、2次関数「グラフと方程式」で簡単な定義があるのみである。

(1) 調査方法・内容・対象

方法 質問紙法

対象 農業機械科(85名)

調査用紙(別紙1参照)

(2) 調査結果とその考察

a. 項目1, 2, 3, 4, 5について

接線の捉え方の違いで3つのグループに分類した。

タイプⅠ 「曲線上のある点における

接線は1本である」

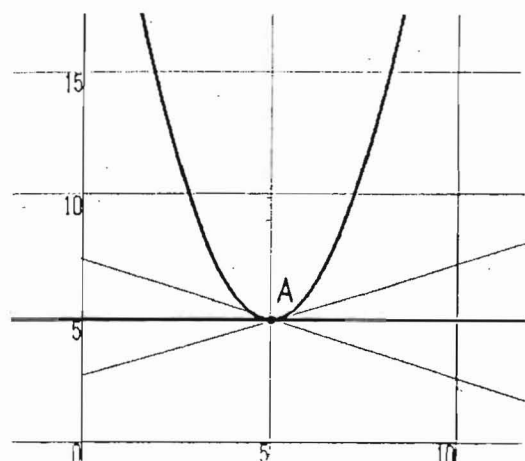
タイプⅡ 「曲線上のある点における接線は1本とは限らない」

タイプⅢ 「接線という言葉自体をよく把握していない」

タイプⅠ	36.9 %	*****
タイプⅡ	44.1 %	*****
タイプⅢ	19.0 %	*****

接線の概念が明らかに曖昧な生徒はタイプⅡのカテゴリーに分類されるが、タイプⅢの生徒も入れると、その割合が63.1%と非常に高いことがわかった。タイプⅡの多くの生徒の解答例は接線を(図1)のように複数ひいて、接線の存在を主張している。中には、「接線が無限にあってかけない」とする生徒も確認できた。

図1



b. 項目6「曲線上のある点における接線は複数ひけるか?」について

特に、概念の曖昧さを顕著に表している生徒の自由記述は次のようなものが多かった。

・ 曲線と接線との角度を変えると何本か

ひくことができる。

- ・ 曲がっているから何本でもひける。
- ・ 緩やかなカーブを持つ曲線は交わる確率が高くなるから接線は1本しかひけない。

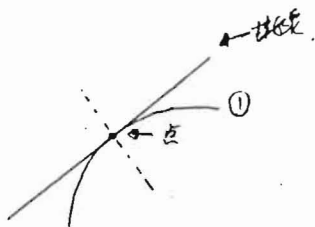
曲線全体を捉えることで、その曲線のミクロな部分が見えてなく、あくまでも曲線は曲がっていると捉えていて、曲線に接した直線の極限の様子が想像できないことがわかった。

c. 項目7「接線はどのようにしてひくのですか？」について

解答の典型的な例は次のものであった。

- ・ 点と接するように直線でひく。(II)
- ・ ある点を決め、その点に接して他の点には接しないようにひく。(I)
- ・ 接線は線にふれて交わることのない線。(II)
- ・ ある点に1点だけくっつくようにひく。(II)

図2



点を中心には①の線に対し左右おなじ
角度になるような直線を作り
点線上で点をとるおなじ
線をひく。

図2のように、自分の考えで説明ができた生徒は、大変少なかった。タイプIに分類できた生徒でも説明は難しく、き

ちんとした説明ができていなかった。

また、タイプIIの生徒の解答に、説明としては正しいものが見られた、例えば「線が曲線に交わらないようにひく」といった解答があった。これらの生徒は、言葉の説明による接線は十分に捉えているが、曲線上のある点における接線は複数ひけると考えている生徒であり、接線の知識はたいへん曖昧なものである。

3. 授業計画 [微分係数 - 第1時]

先行の調査のまとめとして、多くの生徒の特徴として「曲線の曲がっている箇所は、あくまでも曲がっていて”接線”はいくらでもひける。」と考えていることがわかった。また、言葉ではきちんと説明できても、かいてみると複数になったりするように概念が曖昧であることがわかった。接線に関しては円に対する接線を中学校で学習済みであるが、言葉では多くの生徒が理解していると判断できるが、正しく理解している生徒は少ないことがわかった。この先行調査から、接線の概念について曖昧な考えを持つ生徒に着目し授業を計画した。次ページに記載した指導案は、その授業計画である。ただし本授業は、曲線と接線の間関係を把握させることを目的とした授業ではなく、あくまでも数学IIの微分係数の導入の授業である。指導案は次ページ参照。なお、使用したプリントは別紙2の通り。

4. 検証

(1) 調査方法・対象・内容

方法 質問紙法

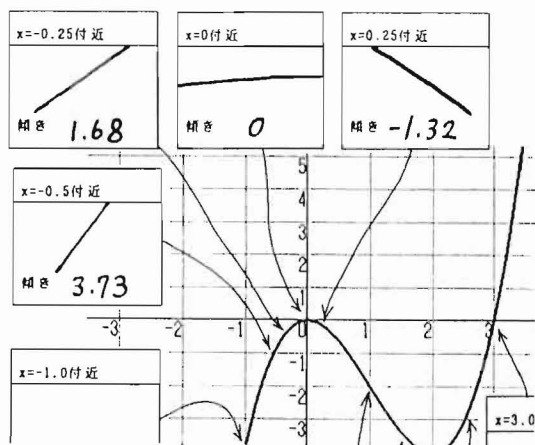
対象 農業機械科3年(28名)

ね ら い

自分の考えを整理する

どのような曲線も拡大してみると直線になっていることを知る。

(例)



接線の傾きが変化していることを知る。

まとめ

学 習 活 動

イメージ調査の結果を知り曲線と接線の関係をどのように解明するか考える。

- ・ 曲線に接線を正確にひく
- ・ 曲線を、拡大してみる。

グラフ電卓を用いて、曲線を **ZOOM** して観察してみる

- ・ 急なカーブの部分はどうか。
- ・ 緩いカーブの部分はどうか
- ・ 傾きはどのように、変化しているか。

指導上の留意点及び評価

問題に関心を持ち、積極的に解明の方法を考える。

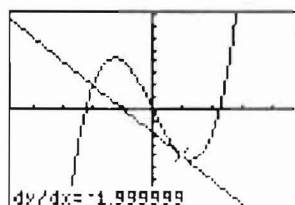
(関心・意欲・態度)

グラフ電卓を用いてもよいことを知らせる

曲線上の特定の点を観察すると、直線に近くなっていることを把握し、同時に曲線と接線との関係について考える。

(数学的な考え方)

電卓画面(出力例)



熱心にグラフ電卓が操作できるか。

(関心・意欲・態度)

各点を正確に **ZOOM** して x 座と傾きの関係が把握できるか

(数学的な考え方)

《農業機械科3年のタイプ別生徒割合》

タイプⅠ	35.7 %	*****
タイプⅡ	42.9 %	*****
タイプⅢ	21.4 %	*****

調査項目（別紙3）

(2)調査結果と考察

a. 項目4. 接線のイメージが変わったか？

《タイプⅠ》

変わった	20.0 %	**
変わらない	80.0 %	*****

《タイプⅡ》

変わった	83.3 %	*****
変わらない	16.7 %	***

《タイプⅢ》

変わった	33.3 %	***
変わらない	66.7 %	*****

曲線上のある点における接線は複数ひけると考えている(タイプⅡ)生徒が他のタイプの生徒よりきわだって接線のイメージを変えている。

b. 項目1「曲線を調べてわかったことをかきなさい。」

- ・曲線は拡大すればまっすぐになっている。(10)
- ・それぞれ点によって傾きが違う。(3)
- ・ $(0,0)$ には傾きがない。(1)
- ・ $(y = x^2$ のグラフ) $(0,0)$ に近づいたらだんだんと数が小さくなった。(1)
- ・拡大された世界はまた違うんだなと思った。(1)
- ・ $(y = x^2$ のグラフ)傾きがx座標の2倍になっている。(1)

曲線をzoomして観察すると、直線に近似してくることから、それについての記

述が一番多い。大半の生徒はそのことに気がついたようである。また、傾きの変化の規則性を指摘している生徒もあり、微分係数がxの値によってある約束によって決まってくることに気がついた生徒であることが確認できた。

c. 項目4, 5「接線のイメージ」「曲線上のある点における接線について」

- ・曲線は拡大すると直線になっているから、接線は1本しかひけない。(9)
- ・(ある点における接線は)かどがあれば何本でもひける。(1)
- ・傾きは一つだけなので接線は1本だけだ。(1)

接線が何本ひけるかという問題に関しては、2通りの説明があることがわかった。まず曲線は接点付近で直線に近くなるので、接線は1本であるとするものと、各点が固有の傾きを持つので、それぞれの点における接線は1本であるとするものである。後者は、微分係数そのものをとらえた見解であるということが出来る。

また、「接線はかどがあれば何本もひくことができる」ということを明記した生徒がいた。この考えは先行調査でもなかったものである。微分不可能な点について生徒自らが気づいたことは、これまでの授業にはなかったことである。

5. まとめ

高校生の接線のイメージは非常に曖昧で「曲線は曲がっているのだから、ある点における接線は1本とは限らない。」と考えている生徒は全体の47.6%を占めている。そこで、グラフ電卓を使った「曲線を調べる活動」を取り入れた微分の導入の授業を展開した。ここで「曲線を調べる活動」は、2

次関数のグラフと3次関数のグラフをzoomして各点における接線の傾きを調べるという活動である。授業後、再度調査をしたところ、多くの生徒の接線のイメージが変化していることがわかった。シンプルな活動であったが成果は大きく、とくに接線に関して曖昧な概念を持っていた生徒(タイプⅡ)は、83.3%がイメージが変わったと回答しており、その段階にある生徒に顕著な効果があったといえる。

さらに、生徒の接線のイメージの変化を導くばかりでなく、微分に関する様々な概念を生徒が捉えていることがわかった。各点における接線がそれぞれ固有の値をもつこと、接線の傾きがあるきまりによって定まること、場合によっては接線がいくらかでもひけるような場合があることを発見したことである。微分とは接線の傾きを求めること也と言ってしまうと、あまりにも直線的かもしれないが、微分の導入の授業としては、許されるものであると確信する。曲線上のある点の傾きを知ること、傾きがある規則によってきまることが体験することで、微分学の門戸は叩いたと言えるし、その後の展開も非常にし易いものになる。

生徒は、教師が予想する以上の感覚で、グラフ電卓の画面に起こった曲線の変化を読みとることができたといえる。曲線が次第に直線に近似してゆく姿、教科書上では接線として定義せざるおえないものが、グラフ電卓を用いることで、曲線そのものが直線になっている姿を生徒は観察できる。曲線とは別物の接線を調べるのではなく、曲線自体が直線そのものとして観察されるのである。このような曲線を調べる活動を通して接線について理解を深め、さらにその作業は微分そのものに他ならないという授業ができるといえる。

Waits(1995)は、グラフ電卓を用いた授業で次のような感想を述べている。「私たち

は学生たちがグラフ電卓を用いて信じられないほど高度な作業をしたり、数学的な思考法にすっかり精通するようになったり、このテクノロジーが用いられる以前よりも深い理解に達するのを何度も見てきました。」と。

【引用及び参考文献】

- [1] 根岸 秀孝(グラフ電卓研究会, 第1回T1-92セミナー口頭発表)
- [2] 藤田 宏 「数学教育への、そうして、数学教育からの提言-新世紀の教育と次期指導要領を望んで」、数学教育の重要性を訴える、1995
- [3] 磯田 正美 「関数を「調べる」活動の復権～テクノロジーを活用した関数の探求を思考して～」 学校数学におけるテクノロジーの活用法の開発に関する研究筑波大学教育学研究室, pp.34-43, 1993
- [4] 文部省『高等学校 数学Ⅱ』, 数研出版, 1994
- [5] 文部省『新しい数学3』, 東京書籍, 1993

参考文献

- [6] Bert K. Waits, Frank Demana
"Graphing Calculator Intensive
Calculus: A First Step in Calculus
Reform for All Students"
NMA Notes no. 36, pp. 96-102
- [7] Bert K. Waits "The Power of Visualization in Calculus" 1992
- [8] Rosalie Dance, Zachary Jeffers,
Joanne Nelson, Joa Reinthaler "Using
Graphing Calculators to Investigate a
Population-Growth Model,
NCTM yearbook, P120-144, 1992
- [9] 磯田 正美 「米国での代数の関数化と関数のグラフ表現に関する研究動向

～テクノロジー利用と関連して～」

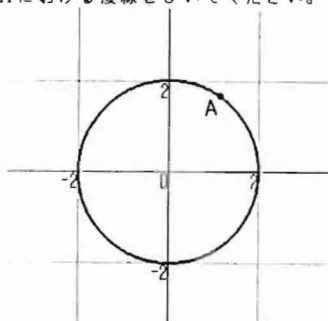
学校数学におけるテクノロジーの活用法の開発に関する研究 筑波大学教育学研究室, pp. 17-33, 1995

- [10] 清水 克彦 「数学教育におけるテクノロジーの利用について」 学校数学におけるテクノロジーの活用法の開発に関する研究, 筑波大学教育学研究室 pp. 13-16, 1995
- [11] 渡辺 信 「何故, $y=x^2$ からののか? - 2 次関数の導入 -」 '95 日数学会誌, P414
- [12] 渡辺 信 「グラフにみる極大・極小の軌跡追跡 - 見ることによって発見した規則 -」 BASIC 数学 8月号, pp. 60-63, 1995
- [13] 一松 信監修 『グラフ電卓を数学に - 活用の意義と教材集 -』 教育社, 1995
- [14] 巻 久編 Create Math1「高等学校数学指導資料 数学 I」 みずうみ書房, 1995
- [15] 拙稿「グラフ電卓(TI-82)を利用して 2 次関数の指導」 '95 日数教発表資料

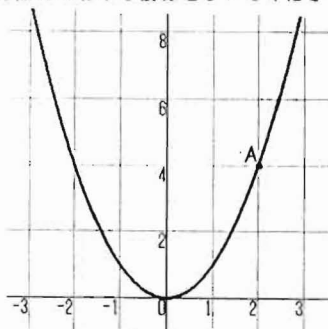
接線のイメージに関する調査

このアンケートは前の質問には戻らないようにしてください。

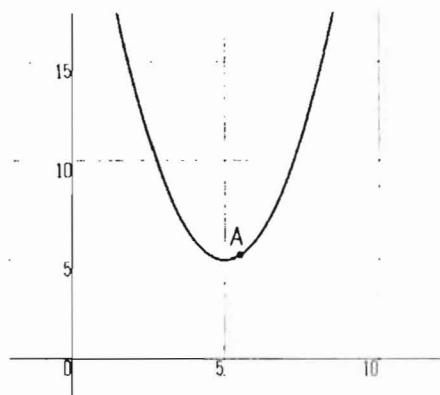
1. 次の円で点Aにおける接線をひいてください。



2. 次の放物線で点Aにおける接線をひいてください。



3. 次の放物線で点Aにおける接線をひいてください。



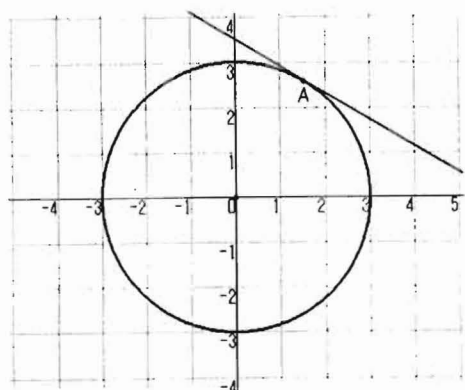
() - ()

- 2 -

(別紙1)

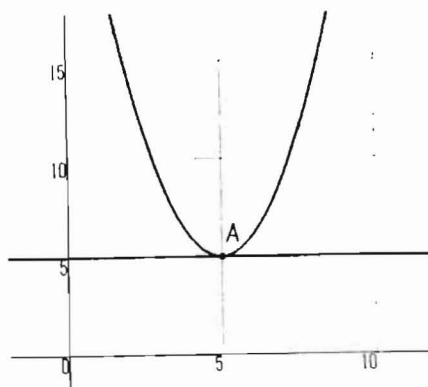
771-1-100

4. 次の図で円上の点Aにおける接線は他にもありますか。あれば書きなさい。



- 3 -

5. 次の図の放物線上の点Aにおける接線は他にもありますか。あれば書きなさい。



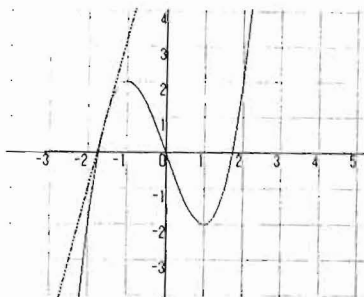
() - ()

- 4 -

6. 曲線上のある点に接線をひくことを考えてください。次の質問のうち、正しいと思うものに○をしなさい。また理由も書きなさい。

- a) ある点における接線は1本だけとは限らない。
- b) ある点における接線は1本だけである。
- c) 緩やかな曲線の場合、ある点における接線は1本しかひけないが、急なカーブをもつ曲線には接線が1本以上ひけると思う。

イメージ図



理由

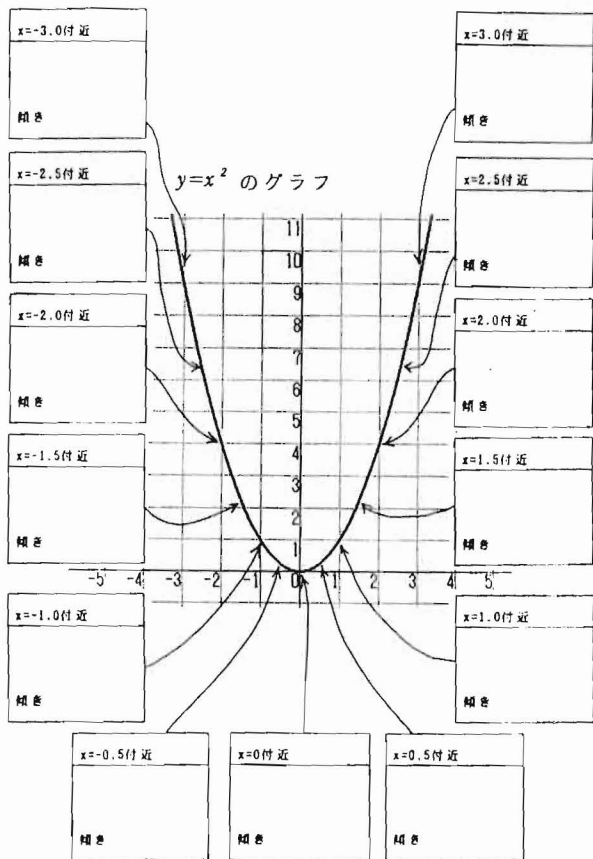
7. 接線はどの様にしてひくのですか。言葉で説明しなさい。

8. 接線がひけないような場合はありますか。あれば説明しなさい。図を書いてもよい。

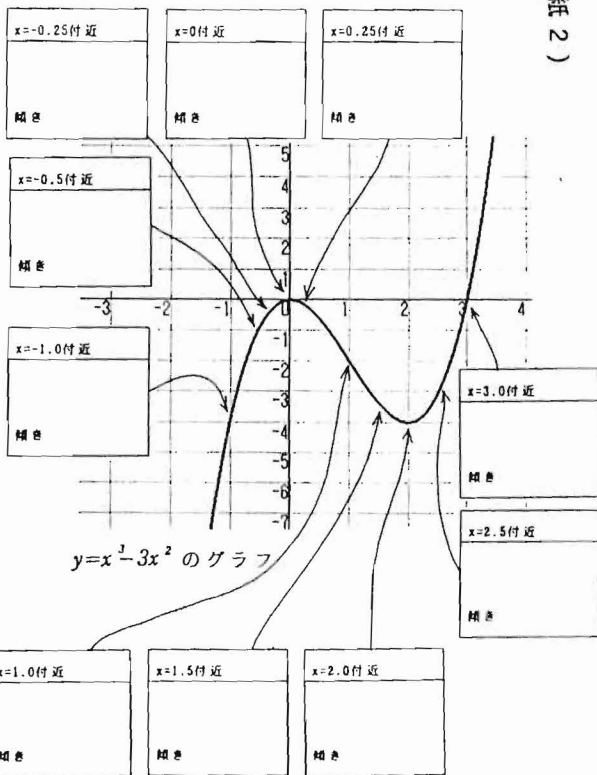
() - ()

- 5 -

- 6 -



グラフを調べる (1)



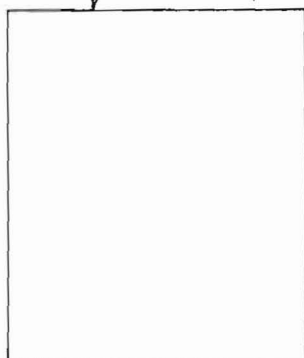
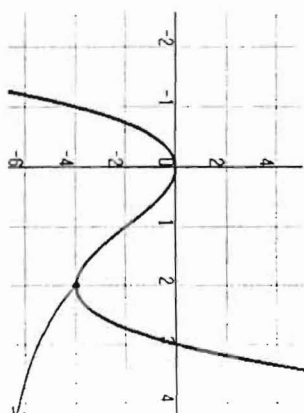
(別紙2)

(別紙 3)

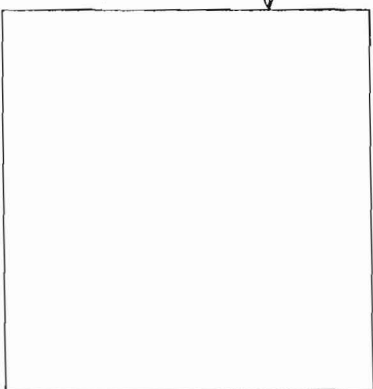
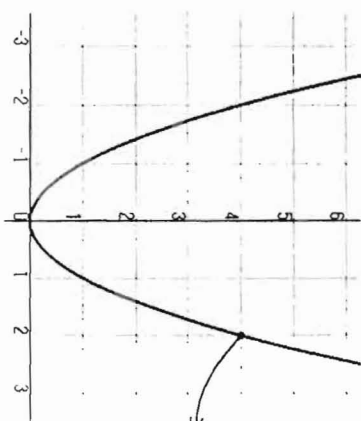
曲線を調べる (2)

1. 曲線を調べてわかったことを書きなさい。

3. 下の曲線上の点(2,-4)における接線はどのようなになっている
と思いますか。接する部分を拡大して書いてみなさい。



2. 下の曲線上の点(2,4)における接線はどのようなになっていると
思いますか。接する部分を拡大して書いてみなさい。



4. あなたの接線のイメージは変わりましたか。またどのように
変わったか書いてください。

変わった 変わらない

() - ()

(平成8年3月29日受理)