岡山大学算数・数学教育学会誌
『パピルス』第４号（1997年）79頁～83頁

曲線の接線の図形的なとらえ方について(II)
－応用と展開－

Dedicated to Professor Hiroshi SAKATA on his 70th birthday

曽布川拓也
岡山大学教育学部

接線の概念についての新しいとらえ方を提案した([6]) に続き, 本論文ではこのとらえ方を中学校・高等学校の数学科の授業で実際に展開していくためのいくつの題材について提案したい.

1　新しい接線の概念に関連する数学的題材

本論では我々の「新しい接線のとらえ方」([6]) を中学校・高等学校数学科の授業に取り入れるための題材について述べることにする. その際本研究の当初の目的に鑑み, 次の点に留意する.

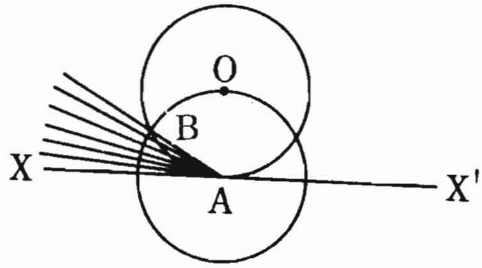
1. 現行のカリキュラムとの整合性を保つために中学校３年次で学習する「円と直線の関係」と高等学校数学IIで学習する「微分係数と接線の傾き」の間を補うものとなるようにする.
2. 高等学校数学IIを履修しない生徒にとっても, この内容を学ぶことそれ自体に意義があるようにする.

そのため題材として次のようなものを提案する.

1.1　円の接線との関係

我々の接線の定義と現行のカリキュラムの整合性を示す. すなわち新しい定義によって引いた円の接線が従来の定義と一致することを示す必要がある.

命題 1 円 O の円周上に点 A をとる. 点 A を通る円 O の従来の意味の接線 $X\bar{A}X'$ を引く. 次に点 A を中心とし, 円 O と同じ半径の円を描きこれを我々の接線の定義における「円 A」とする. 円 O と円 A の２つの交点のうち直線 OA に対して X と同じ側にある方を B とし, 弧 AB を「左側部分」とする. このとき半直線 AX と半直線 AB によって作られる角領域は「領域 L」とその境界部分を除いて一致する



証明の概略. 平面全体は直線 $X\bar{A}X'$ によって２つに分けられる. このうち円の中心 O を含む側を「上側」, 反対側を「下側」と呼ぶことにする（境界は含まない）. このとき円 O は点 A を除いて「上側」に含まれることはすぐにわかる.

次に点 A を通る円 O の左側接線について調べる. $\angle XAB$ の内部の任意の点 P をとる. A を始点とし P を通る半直線は劣弧 AB とただ１点を共有する. 従って$\angle XAB$ の内部は「左側接線」の定義の領域 L に含まれる.

一方領域 L の任意の点 Q をとるとき, A を始点とする半直線 AQ は劣弧 AB と１点を共有す

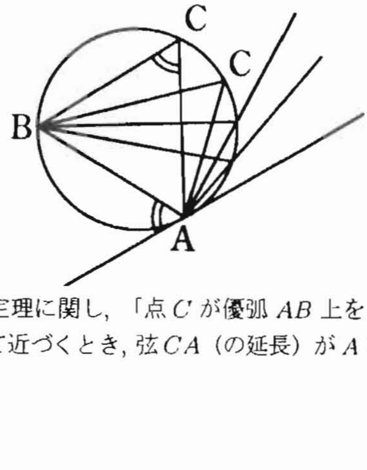
ることから直線 XAX' について円 O と同じ側に含まれる．すなわち「上側」に含まれる．また半直線 AQ は優弧 AB とは共有点を持たない．従って点 Q は $\angle XAB$ の内部にある．これらのことから領域Ｌと $\angle XAB$ の内部は一致し，従って円 O の周上の点 A において「左側接線」は従来の定義による接線と一致することがわかる．右側接線についても同様のことが示され，このことから新しい定義による接線と従来の定義による円の接線が一致することがわかる (略証終).

この証明はユークリッド幾何の公理までさかのぼる形で証明される．このとき２つの定義による「接線」が同一であるという，いわば一意性証明のようなものは中学生・高校生にとってはとても難解なものである．このあたりをどうするかがもっとも重要な課題である．

1.2 接弦定理との関係

円周角の定理の「極限」として接弦定理をとらえることはよく行われているようである．

> 円 O の周上に点 A, B, C を優弧 AB 上に C があるようにとる．点 A, B を固定し点 C を動かすとき，C はどこにあっても $\angle ACB$ は一定である（円周角の定理）
>
> 弦 BA と A を通る円 O の接線のなす角は $\angle ACB$ と等しい（接弦定理）



これらの定理に関し，「点 C が優弧 AB 上を A に向かって近づくとき，弦 CA（の延長）が A を通る接線に近づく．このとき $\angle ACB$ が弦 BA とこの接線のなす角に近づく．」という形で関連づける．

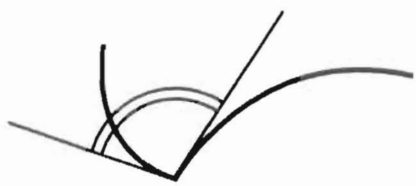
ここでは「近づく」という語の定義が曖昧である．そもそも極限というただでさえとらえにくい概念が使えないところで単に「近づく」といっても実感しにくい．

点Ａについて点Ｃが「右側部分」にあるとしたとき，“すべての” $\angle ACB$（弦 CA）を描くことによって求まるのが点Ａにおける右側接線である．この右側接線と弦 BA のなす角が接線と弦のなす角に相当する．実際にこの作業を自ら行うことによって，極限の概念がより確実なものになるであろう．

1.3 折れ曲線の角度の定義

２つの曲線の角度を定義することができる．

定義.　２つの曲線 ℓ_1 と ℓ_2 が点 A で交わっているとする．点 A においてそれぞれの曲線に対して「右側」「左側」に接線を引くことができるとき，この２つの接線のなす角度が２つの曲線のなす角度であると定める．



この定義は概念としては意味があるが，実際には使いものにならない．それは具体的に両側に接線を引く作業が，大きな誤差をもたらすからである．しかし生徒に「折れ曲線の角度をどう定義するか」という内容で討論をさせることは意義があるであろう．

また我々の定義によれば，折れ曲線の角度が１８０度ならばそれが接線が引ける状態であるとい

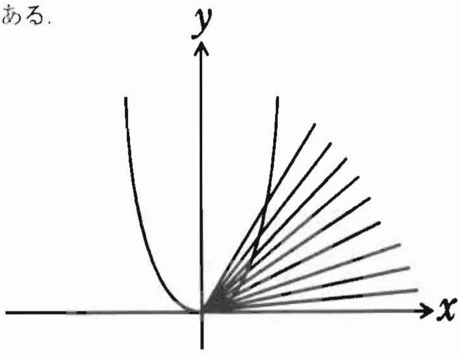
うことになる. 従って接線が引けるかどうか（曲線がC^1級であるかどうか）を考えることができる. [6] において, この定義では接線の存在性の議論がしにくいという欠点をあげたが, この概念を導入することによって直感的な議論の中でも誤解を少なくすることができる.

1.4 放物線の頂点における接線

[1] によれば, 一般の曲線上の点において複数の接線が引けると考えている生徒がたくさんいるようである. その調査例として放物線の頂点における接線についての意識調査が行われている.

我々の接線の定義を用いれば, 放物線の頂点における接線がどういうものであるか限定することができる.

命題 2 原点を通り縦軸を対称軸に持つ放物線 $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ の原点における接線は, x 軸である.



証明. 簡単のため $a > 0$ とする. 原点を中心にして半径 $\sqrt{1+a^2}$ の円を描く. 放物線のこの円および第1象限に含まれる部分を「右側部分」とする. x 軸正の部分と直線 $y = ax$ で囲まれる角領域を R_1 とする.

放物線の右側部分は R_1 に含まれる. 従って原点を始点とし, この右側部分を通る半直線は R_1 に含まれる. このことから右側接線の定義における角領域 R は R_1 に含まれることがわかる.

一方, R_1 内部の任意の点 (p,q) に対してその点と原点を結ぶ直線 $y = \frac{q}{p}x$ $(0 < \frac{q}{p} < a)$ とこの放物線共有点は, その「右側部分」に含まれる. 従って R_1 が R に含まれることがわかり, 2つの角領域が一致することがわかる.

従って「右側接線」は x 軸であることがわかる. 同様にして左側接線も x 軸に一致することがわかるので, 接線が引けることがわかる. （証明終）

このことがわかれば定義から明らかに放物線の頂点における接線が1本しかないこともわかる.

また前節の折れ曲線の角度と接線の関係から, 放物線の「右側」と「左側」の「成す角」が180度であることがわかり, 放物線が「角張らない」ことも示される.

1.5 微分の概念の導入

微分の概念の導入でもっとも難しいのは, 極限の概念である. 高等学校2年・3年で極限の計算を学ぶが, これは概念がわからなくても答えを出す方法さえ身につければ点数がとれるような内容になっている. 微積分をいきなり公式から学んでもある程度グラフがかけたり体積が計算できたりするので, 「ものわかりの良い」「優秀な」生徒は, 逆にその「本質」を必要と感じていないことが多い. しかしそういう生徒にとっても, 少し難しい問題に直面したときに, この本質をとらえることが必要になってくる. また「ものわかりの良くない」生徒にとっては, 意味もわからず丸暗記するということに陥ってしまい, 数学嫌いを助長するのではないかと思われる.

この点において我々の新しい接線の概念を先に導入してあれば, 「割線の傾きの極限が接線の傾きである」という表現が直感的にわかりやすいのではないだろうか. そうすれば「微分係数はその点での接線の傾きである」という定義ができて, 微分の概念を複合的にとらえることができるようになる.

微分の概念が直感的にわかれば, 計算してグラフを描くことはグラフ電卓などを用いればすぐできるので数学を苦手とする生徒にとって負担が少

なくなると考えられる.

2 新しい題材の扱い方

現行のカリキュラムでは中学校3年次で円について学ぶ. この新しい接線の概念はそのあとに位置づけることについては異論のないところであろう. 問題は最終目標をどこに設定するかである. 場合によっては「新しい接線の概念」を導入する手間の割にメリットが薄い場合もあり得る. 従って扱い方を考慮する必要がある. 以下にいくつかの方法を提案する.

2.1 従来の枠組の中での取り組み

従来の中学校数学科の内容から大きく逸脱しないという方針の下には次のような扱いをすることが考えられる.

1. 新しい接線の定義を導入する. その際は定義として導入するのではなく,
「領域 R を作るとその境界はどういう図形になるだろうか」
という形での問いかけとし, 概念をある程度把握させるだけにとどめる.
2. 円周角と接弦定理の関係について考えさせる.

これは従来よく行われていたものを補充することになるが, 新しい定義それ自体の必要性は薄い.

2.2 高等学校数学 II を履修しないことを前提とした取り組み

高等学校数学 II では微分の概念が導入される. しかしこれをすべての高校生が学ぶわけではない. そういったことを念頭に置いたとき, 中学校3年次, 高等学校数学 I・A までの範囲でもわれわれの新しい定義が意味を持つようにしたい. そのために次のような扱いが考えられる.

1. 折れ曲線の角度について考える. 結論がはっきりしやすいので生徒同士の議論を通じて捉えさせる.
2. 新しい接線の定義を導入する.
3. 放物線の頂点における接線を定義する. 接線は一本しかない.
4. 「接線が引ける」ことは「折れ曲線の角度が180度」であることから放物線の「頂点」は「角張らない」ことがわかる.

2次関数のグラフを描かせたときに放物線の頂点が角張ってしまう答案をよく見かける. 独立変数の値を変えてグラフ上に点をとってグラフを描かせてみるという以外に, それが間違っていることを説明する有効な手段がなかったものと思われる.

数学 I の1つの主要な題材である2次関数のグラフについて理解を深めることがこの扱い方における一つの目標である.

2.3 微分法への橋渡しとしての取り組み

本研究の当初の目的は中学校で学ぶ「接線」と高等学校で学ぶ「接線」の間にあるギャップを埋める, すなわち図形の性質と微分法の概念の間の橋渡しをすることであった. このために次のような扱い方を提案する.

まず前節と同じように「折れ曲線の角度」「接線の定義」「放物線の頂点における接線」について扱ったのち, 一般の関数 (多項式関数) について

1. 平均変化率 (割線の傾き) を定義する.
2. 瞬間変化率 (微分係数) を定義する.
3. 「平均変化率の極限が瞬間変化率である」ことを図の上で見て, そこから「新しい定義による接線」の傾きが瞬間変化率であることを知る.

このような形で「微分係数」を導入し, limit を使った定義を直感的につかむことにより, 生徒に感覚的に理解させることが可能になるものと予想

される.

3　本研究のまとめと今後の方針

本研究のまとめとこれからの進むべき方針についていくつか述べる.

3.1　本研究における問題点

本研究は, 従来中学校と高等学校の間でのギャップを埋めることを大きな目的としている. しかしそのためこの内容を具体的に中学校・高等学校のどの段階に行うかがはっきり決められない. 前章でその扱い方についていくつか考えられる方法を述べたが, 2.1 の扱い方は中学校数学科の範疇にはいるものの, 前章であげたそれ以外の扱い方については, どの内容をどこでどう扱うかは, 現行の学校制度では難しい問題である.

3.2　本研究の持つ意義と今後の方向

これまで極限について, 中学校では「扱わない」高等学校では「直感的な定義に基づいて計算をさせる」という方針で教育が行われてきた. その結果, 微分の概念を捉えようとせず公式を覚えて計算するだけに陥り, ひいては生徒の興味を薄れさせ, 学力が低下するという状況になってきた.

近年, 教育に計算機を導入しようという動きが目立つ. 数学はその中でももっとも重要な教科であるとされている. 計算機を使うことにより, 極限を「動的に」捉えることができるようになり, 一見理解しやすくなったかのように見えるが, 実際は与えられたソフトによって提示される画面を見るだけに終始し, 「自ら手を動かしながら考える」ということがおろそかになることが危惧される.

この点でむしろ時代遅れとも言える本論文の内容を元にして「生徒自ら手を動かし追求する」「他の生徒と議論をする」ための教材を作ることができるのではないかと期待している. それが「数学の良さ・おもしろさ」「数学教育の存在意義」といった問題に対する答えだと考えるからである.

4　謝辞

本研究の進め方について、高橋敏雄教授に有意義なアドバイスをいただいた。また本稿の図表作成に関し、岡山大学教育学部工芸教室　橋ヶ谷佳正助教授にお力添えをいただいた。

また本稿の referee からは表現上いろいろなアドバイスをいただいた。

この場を借りて感謝を申し上げたい。

参考文献

[1] 末廣　誠「微分の導入にグラフ電卓を用いる－接線のイメージ調査と曲線を調べる活動－」, 岡山大学算数・数学教育学会誌「パピルス」, 第3号, pp.59～68, 1995.

[2] 文部省検定済教科書　中学校数学科用『新訂数学3年』, 啓林館, 平成9年度用.

[3] 文部省検定済教科書　高等学校数学科用『高等学校新数学II』, 第一学習社, 平成7年.

[4] 小林昭七『曲線と曲面の微分幾何』, 裳華房, 1984.

[5] 田島一郎『解析入門』, 岩波書店, 1991.

[6] 曽布川拓也「曲線の接線の図形的なとらえ方について (I) －定義と背景－」岡山大学算数・数学教育学会誌「パピルス」第4号, 1997

(平成9年4月17日受理)