グラフ電卓を用いたオープンアプローチの指導の研究 ~4次方程式について~

Dedicated to Professor Hiroshi SAKATA on his 70th birthday

広谷 真治 岡山県立高松農業高等学校

教育課程が新しくなって5年ほどたった。生徒に数学を通して「考える力」を与える試みが数多くなされている中でオープンアプローチを用いた課題学習型の授業が今こそ必要とされている。今回は特に「グラフ電卓」というテクノロジーを導入し、問題解決の糸口をつかめない生徒に、予測を立てさせることにより実業高校では扱いにくい大学入試レベルの問題を考えさせた。

本研究ではグラフ電卓を用いて「予測をたてる」ことによっていかに学習活動が活発に行われるかということについての授業実践をもとに究明していくことにする。

1. はじめに

実業高校では基礎の反復(中学校の復習) が中心で1つの問題をじっくりと考える機 会がなかなかない。

既習事項と未知の問題を関連づけさせながら、生徒たちが長時間にわたり数学的な活動を行い数学的思考力をつけるために、今回グラフ電卓というテクノロジーを導入し大学入試レベルの問題をじっくり考えさせる機会を与えることを試みた。

まずはじめに研究の基本となるオープン アプローチとグラフ電卓と4次方程式につ いて、それらの概略について説明する。

2. オープンアプローチについて

オープンアプローチとは、能田伸彦 (1) が 我が国で最初に展開した数学教育における アプローチの1つで、島田茂のグループ(能 田もそこに属していた)の先行研究である 「オープンエンドアプローチ」を発展させ たものである。「オープンエンドアプロー チ」では「正解が1つに決まらない」いわ ゆる"オープンな問題"の設定によって授

業を行い、"正答の多様性"を積極的に利 用する展開である。ここでの問題点は適切 な、"オープンな問題"の開発が非常に難 しく, したがって, この問題が開発できな かったら、オープンエンドアプローチの授 業が行えないことになる。能田は、この不 安を解消するためにエンドをオープンに制 限するだけでなく解決の仕方の多様性を認 めることで, まず制限を解除し, さらにク ローズドな問題を指導の仕方で、つまり、 子どもの学力差や必要性に応じて,解決の 仕方を多様にすること,次に,問題が問題 を生む、つまり発展させることのできる見 方や考え方を取り入れること, さらに, 多 様な解決をさせた後で子どもの能力に応じ た、より一般性のある解法にまとめあげて いく指導の展開を考え、いわゆる「オープ ンアプローチ」による指導の研究を進めた。

坂田泩他 (2) もいうように、オープンア プローチによる指導の目指すものは子ども の創造的な考え方を育成するとともに数学 的活動をうながすことである。

なお本研究では取り上げたのは, クローズ

ドな問題であるが, オープンアプローチの 観点から授業展開している。

3. グラフ電卓について

グラフィック電卓 (通称グラフ電卓) は 軽量、廉価、コンパクトという3拍子そろ っているということと、 なによりコンピュ ータと違い、 通常教室の授業の中で一人一 台の形で授業展開できるということで近年 普及している。国立教育研究所の顧沼花子 (3) の研究をはじめ岡山県でも、末廣聡(4) をはじめ中学校や高等学校で研究が進めら れている。機種によっては、文字式の計算 や微積分が可能なものもあり、外部の物理 的な運動を取り込んでグラフに変換するこ とも可能である。しかし「式を入力すれば 直ちにグラフが描ける」ことが最大の利点 であり、グラフを描くことが苦手な生徒に も、問題解決の糸口をつかむのに大変有効 であると考える。本研究では、シンプルに 予測の材料としてグラフ電卓の効用を考察 していく。

4. 4次方程式について

4次方程式の解法は Ferrari (1522-1565)の 発見とされており、その一般的解法は高木 貞治(5)等に詳しい。高等学校ではそのう ち因数定理等の利用による因数分解の解法 においてごく一部を扱っているにすぎない が本研究ではグラフ電卓の助けを借りなが ら、代数学的側面だけではなく解析的なア プローチを試みた。

5. 学習課題とその意味

課題内容は次の通りである。

4 次方程式 x⁴-2ax²+4=0 の異なる 実数解の個数を調べよ。(a は定数)

計算過程はすべて黒のボールペンで記

入すること。訂正や、あとからわかった ことは赤のボールペンで記入すること。

対象生徒は3年生数学選択者9名であり 今回の授業を行うまでに、授業の中で10 時間程度グラフ電卓を使用している。

授業は2時間連続で行い、時間に迫われずに、じっくりと思考できる環境を与えた。

ヒントとして次のようなものを必要に応 じ生徒に与えた。

- ・ a に具体的な数値を代入して考えてみよう。
- ・4次方程式のグラフから考えてみよう。
- ・微分して増減表を作ってみよう。
- いくつかのパターンから気づくことはないか。

解法については大きく分けて次の2つが 考えられる。

①解析的解法

4次関数を微分して極小値の符号を調べ る方法

②代数的解法

 $x^2=t$ と置き換えて t に関する 2 次方程式と考え、解の分類をする方法

今回は数学Ⅱの授業で微分法を学習した あとであり、①の解析的解法が多くなるも のと予想された。

6. 生徒の学習活動

代数的解法として次のものが見られた。

- ・aに具体的な数値を代入して4次方程式 を因数分解で解く。
- ・x²を文字に置き換えることにより2次 方程式から結論を導く。
- ・二重根号をはずす活動を行う。

解析的解法として次のものが見られた。

・グラフ電卓により実数解の個数を調べ、 正解の予測をする。

・増減表より正解を導く。

7. 個々の具体的な学習活動

生徒の学習活動は次の3つに,大まかに 分類される。

① 正解到達タイプ

グラフ電卓から予想をたて、またはグラフ電卓を極力使用せず、最小限の助言を受けながら正解にたどり着いた生徒が3名いた。この3名の中の一人の生徒の答案の要約を例にあげることにする。

a=2 を代入すると x4-4x2+4=0 り因数分解すると $(x^2-2)^2=0$ となる ので メ=±√2 よって異なる実数解の個 数は2個である。しかし他の例において は因数分解が成功せず, グラフ電卓から 4 次 関 数 $y=x^4-2ax^2+4$ のグラフを何 本か描いていきx軸との交点を調べてい くうちに正解である a>2,a=2,a<2 の 3つの場合分けによる解を予測した。そ して、4次関数を微分することにより、 $a \leq 0$ のとき極小値(最小値)が4で あるから解なし。 4>0 のとき $v'=4x^3-4ax=4x(x^2-a)$ であるから、 x=±√a のとき極小値 -a²+4 をと り、極小値が負であれば異なる実数解は 4個で、0であれば2個、正であれば0 個と分類される。以上のことから次の結 論が導かれる。 解は, a < 2のときなし, a = 2のとき

解は, a < 2 のときなし, a = 2 のとき 2つ, a > 2 のとき 4 つである。

なお x^{2n} (nは0以上の整数)で作られた多項式のグラフは一般に y 軸に対称になるのではないかと予測している。たとえば 6 次関数 $y=x^6-4x^2+4$ は 対称になる。

また、a=3 のときの解として出てくる 2 次方程式 $x^2=3\pm\sqrt{5}$ の解は、二重根号をはずすことにより

$$\pm \frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}$$
 となる。

この生徒は最初のうちは代数的解法で, a=2のとき, a=3のとき4次方程式を 解くことに成功し,偶然の産物として二重 根号をはずすことに成功した。

その後グラフ電卓で予測することにより グラフと x 軸との交点の個数が解答あることがわかりグラフの形状が2種類あるこ とから、この生徒の考えは今度はグラフの 形状を詳しく調べる方法、即ち解析的解よ に発展している。そして、正解を追求でいる中で、この生徒が気になっても自分なて フの対称性(偶関数)についても自分な有 意義な学習活動であったといえる。

② 正解予測止まりタイプ

グラフ電卓から正解の予測はたったので あるが、その後の発展につながらなかった 生徒が3名いた。予測して論証まで行うの が数学のあるべき姿であるが多くの材料の 中から正解を予測するだけでも、問題の意 味を把握し、問題解決の第一歩を踏み出し たのであり、「開いた」数学的活動だった といえる。最初はa = 2のとき、a = 3の ときと漠然と場合分けしていた生徒がaに 2. 1とか1. 99とか代入してグラフ電 卓で調べて、 a = 2 が分岐点になることを 予測していく活動はまさにグラフ電卓は予 測をたてる活動に向いているということが 解る。なおこの3名の生徒は指導助言によ り授業中に増減表を用いた正解を理解し得 たようである。

③ 予想できなかったランダムタイプ

a にランダムに数字を代入していったが 問題との関連性がわからず 2 時間,代入と グラフ描きに終始した生徒が3名いた。この生徒たちは正解には至らなかったが学習活動を通じて方程式の解と、4次関数とx軸との交点の関係、つまり代数的解法と解析的解法の融合への入り口をかいま見たという点で効果があったものと思われる。また事後指導により増減表が作成できるようになった。

8. その他の学習活動

オープンアプローチの指導の特徴として 「問題が問題を生む」等といった、学習活動の発展性があげられるが、今回の課題で は次の2つのことがあげられる。

① 二重根号をはずすこと

過去の授業では全く扱っていなかった二 重根号を問題を解くためとはいえ自発的に 解決しようとした生徒が2名みられた。

② グラフの y 軸に関する対称性

3名の生徒がこの形の4次関数は、すべてy軸について対称であることから何故そうなるかということを考えはじめ、偶関数についての理解が進んだ。。

9. 授業後の, 生徒の感想の概略

- ① 今回の課題を考えて気が付いたこと
 - ・ひとつの問題でたくさんの計算式を使った。
 - ・ひとつの問題でグラフを描いたり計算をしたりいろいろな操作をしなければな らないのでたいへんだ。
 - ・電卓を使えるだけではだめ。(考えないと)
 - ・数学は奥が深い。
 - ・xの偶数乗と定数で作られた式は左右 対称 (y軸で対称)になる。
 - 二重根号ははずすことができる。
 - ・難しい。

- ・実数解の個数は方程式によって定まっている。
- ② グラフ電卓を使用して良かったこと
 - ・グラフを描かなくてすむ。
 - グラフがすぐに出てくる。
 - ・グラフ上の点を瞬時に計算できる。
 - ・計量でコンパクトで持ちやすい。
 - ・使い方がわかれば便利。
 - ・はじめに電卓を使っていくつかグラフ を描いているうちに場合分けが必要にな ることがすぐわかった。
 - グラフの形態が一瞬にしてわかった。
 - ・このような機械があることを知ったこ と。
- ③ グラフ電卓を使用してみて良くなかったこと。
 - ・使い方を覚えていないと不便だ。
 - ・活用方法がいまいちわからない。
 - ・グラフがすぐに書けてしまうので考え る前に答がでてしまう。
 - ・最大限使う方法がわからなかった。
- ④ グラフ電卓を操作する上で困ったこと
 - ・わけもわからずにボタンを押すとエラーがおこり回避が難しくなる。
 - ・操作に慣れれば問題なし。
 - ・何分か放っておくと画面表示が節電機能によりすぐ消えてしまうので、いちいち電源 ON しないとダメ。
 - ・ZOOM すると一部分が、あまりにも拡 大表示になるので重要なところが見えな くなる。
- ⑤ 今回の授業全般についての感想
 - ・機械に弱いのでとてもつらかった。
 - ・前に勉強したことを全部忘れていると いうことが自分自身でよくわかった。
 - ・この形式の授業はやりたくないとは言

わないが難しいので好きではない。

- ・グラフ電卓に頼りすぎると実はなぜそ うなるかということが実はわかっていな いままになっているのだなと思った。
- ・ひとつの課題にこんなに時間をかけたのは久々だった。
- ・問題のどの部分がわかっていないかが、よくわかった。

10まとめ

本校のような実業高校では通常の授業で はまず触れることのない入試レベルの問題 にグラフ電卓を使用して挑戦したが、生徒 全員が「難しい」と言いつつも2時間ずっ と問題解決のための学習活動を続けた。こ のような数学の問題を考え続けるという 「数学的活動」は極めて大切なことである。 このようなことは、数学の学習時間が普通 科高校の三分の一程度である実業高校で は、考えられなかったことである。このよ うな意味でグラフ電卓の活用は非常に有効 であるといえる。また今回の, グラフ電卓 を用いた研究では、「予測をたてる」こと に関して非常に効果があり、このことは、 生徒たちの思考の過程で問題解決のために 大いに有効であったと言える。今後, グラ フ電卓の導入等、テクノロジーの導入によ り, 数学に興味を覚える生徒が一人でも増 えることを願うものである。

最後に今回は少人数の授業の中での活用 について研究したが、今後は一斉授業の中 にグラフ電卓を取り入れることを試みた い。

参考文献

- (1) 能田伸彦:「オープンアプローチに よる指導の研究」(東洋館出版社, 1983)
- (3) 瀬沼花子:「算数・数学教育における電卓・グラフ電卓を利用する教材の開発」(国立教育研究所 科学教育研究センター,1994)
- (4) 末廣 聡:「微分の導入にグラフ電車を用いる-接線のイメージ調査と曲線を調べる活動-」(岡山大学算数・数学教育学会誌 パピルス 第3号,1996)
- (5) 高木貞治:「代数学講義」(岩波書店, 1938)

(平成10年4月28日受理)