岡山大学算数・数学教育学会誌
『パピルス』第９号（2002年）57頁～68頁

複素数の概念の図形的な導入について（I）
―従来の定義と新しい導入―

小林文美子
岡山大学大学院教育学研究科

複素数は、二次方程式の解を考えるときに実数の概念を拡張することで導入されてきた。しかし二乗すると負になる数の存在感が感じられる導入がなされてきたとは言い難い。本論文では、複素数に存在感を与える導入についての提案を行う。

1　研究の動機と背景

複素数の導入は、二次方程式の解を考えるときに、実数の概念の拡張として扱われてきた。これまでの高等学校の教科書では、複素数を次のように定義してきた。

定義 1 [1]　平方すると、-1 になる数を１つ考え、これを i で表し、虚数単位という。すなわち、$i^2=-1$ とする。i と２つの実数 a,b を用いて $a+bi$ の形に表される数を複素数という。

このように、教科書では、$i^2=-1$ となる数について、最初から１つあるものとして定義され、複素数の存在性についての説明が避けられていた。

$$i^2=-1$$

となる数 i とは、どんな数だろう、どんな意味があるのだろうと考えさせることが教育においては重要なことであるにも関わらず、指導上の難しさからあえて触れられない教育が行われてきた。複素数の指導は、形式的演算に習熟させることであると誤解している教師も数多いと思われる。

しかし、複素数について「本当にそんなものがあるのか」という疑問を大切にした教育を行うことは、いろいろな角度から、物事を考えられるような生徒を育てるために、必要なことではないかと考える。われわれは、複素数の導入の授業を通じて数学的見方・考え方を身につけさせる授業を行いたい。

この論文では、これまでなされてきた複素数の定義を比較検討し、複素数に「存在感を与える」導入の仕方を提案することを目的とする。

[1][9, pp.8] 実数の拡張として、複素数を定義している。

2　複素数の定義について

これまで用いられてきた複素数の定義は、およそ３つの型に分類できる。以下にそれらの型について検討する。

2.1　実数の順序対を用いた定義

2.1.1　定義

定義 2 [2]　二つの実数 a,b に対して順序も考えた実数の対 (a,b) を複素数と呼ぶ。

a,b,c,d が実数のとき、二つの複素数 $z=(a,b), w=(c,d)$ に対して、相等・演算を次のように定義する。

相等　$(a,b)=(c,d)$ であるとは、
$a=c, b=d$ が同時に成り立つ時に限る。

加法　z と w の和を $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ とする。

乗法　z と w の積を $(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$ とする。

以下、この定義を、(a,b) 型と呼ぶことにする。

[性質]

$$\mathbf{C}=\left\{(a,b):a,b\in\mathbf{R}\right\}$$

[2][1, pp.1-2] からの引用

とする[3]。

$z, w, v \in \mathbf{C}$ に対して、$z = (a, b), w = (c, d), v = (e, f), (a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R})$ とすると、

1. 加法・乗法について、

   交換法則　$z + w = w + z$

   $zw = wz$

   結合法則　$(z + w) + v = z + (w + v)$

   分配法則　$z(w+v) = zw+zv$ が成り立つ。

2. 減法と除法は、それぞれ加法と乗法の逆演算として次のように導かれる。

   減法　$z + v = w$ となる複素数 v を z と w の差という。$v = w - z$ と書く。$v = (c, d) - (a, b) = (c - a, d - b)$ となる。

   除法　$z \neq (0, 0)$ とする。$zv = w$ となる複素数 v を、z と w の商という。$v = \frac{w}{z}$ と書く。

   この v は必ずあってただ一つに限る。

   $v = (x, y), (x, y \in \mathbf{R})$ とおくと、

   $zv = (a, b)(x, y)$

   $= (ax - by, ay + bx)$

   $= (c, d)$

   $z \neq (0, 0)$ より、$a^2 + b^2 \neq 0$ だから、

   $ax - by = c, ay + bx = d$ を同時にみたす x, y は、

   $x = \dfrac{ac + bd}{a^2 + b^2}, y = \dfrac{ad - bc}{a^2 + b^2}$ と 1 つに決まる。

   したがって、$v = \left(\dfrac{ac + bd}{a^2 + b^2}, \dfrac{ad - bc}{a^2 + b^2}\right)$

2.1.2 (a, b) 型の特徴

1. 順序対 (a, b) は、座標平面上の点と 1 対 1 に対応させることができる。すなわち座標平面上の点と複素数が 1 対 1 の対応となるので、$\mathbf{C}$ を 2 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^2$ と同一視することができる。

2. 加法・減法については、直感的にとらえることができる。

   しかし、乗法の定義は、直感的にとらえることが難しい。

3. 高等学校で扱っているベクトルとの関係では、ベクトルの加法・減法と一致する。しかし、乗法と除法については、ベクトルの演算と関係づけることが難しい。

[3] $\mathbf{R}$ は、実数全体の集合

2.2 行列を用いた定義

2.2.1 定義

定義 3 [4]　二つの実数 a, b に対して、次のような形の 2 行 2 列の行列を複素数と呼ぶ。

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

以下、この定義を、行列型と呼ぶことにする。

相等・演算は、行列の相等・行列の演算で定義する。

[性質]

$$\mathbf{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

とする。

1. $A, B \in \mathbf{C}$ に対して、

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$(a, b, c, d \in \mathbf{R})$ とすると、

$$A + B = \begin{pmatrix} a + c & -(b + d) \\ b + d & a + c \end{pmatrix}$$

となり、加法について閉じている。

$$AB = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix}$$

となり、乗法について閉じている。また、

$$BA = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

[4] [2, pp25-28] からの引用

$$= \begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix} = AB$$

となり、乗法に関して可換である。
$A, B, C \in \mathbf{C}$ に対して、

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix}$$

$(a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R})$ とすると、
加法・乗法について、
交換法則　　$A+B = B+A$
　　$AB = BA$
結合法則　　$(A+B)+C = A+(B+C)$
分配法則　　$A(B+C) = AB+AC$ が成り立つ。

2. 減法と除法は、それぞれ加法と乗法の逆演算として次のように導かれる。
減法　　$A+C = B$ となる複素数 C を A と B の差という。$C = B-A$ と書く。

$$C = \begin{pmatrix} c-a & -(d-b) \\ d-b & c-a \end{pmatrix}$$

となる。
除法　　$AC = B$ となる複素数 C を A と B の商という。$C = \dfrac{B}{A}$ と書く。ただし、A は零行列でないとする。この C は必ずあってただ一つに限る。

$$C = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} : (x, y \in \mathbf{R}) \text{ とおくと}$$

$$AC = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ax-by & -(ay+bx) \\ ay+bx & ax-by \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

A は零行列でないから、$a^2+b^2 \neq 0$ より、
$ax-by = c, ay+bx = d$ を同時に満たす x, y は、

$$x = \frac{ac+bd}{a^2+b^2}, y = \frac{ad-bc}{a^2+b^2}$$ と 1 つに決まる。

したがって、

$$C = \begin{pmatrix} \dfrac{ac+bd}{a^2+b^2} & -\dfrac{ad-bc}{a^2+b^2} \\ \dfrac{ad-bc}{a^2+b^2} & \dfrac{ac+bd}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} \setminus \{0\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{R} : a^2+b^2 \neq 0 \right\}$$

は常に逆行列をもつ。

2.2.2　行列型の特徴

1. $\mathbf{C}$ は、2 行 2 列の行列全体の集合 $M(2, \mathbf{R})$ の可換な部分環である。

2. 行列で定義された複素数 A に対して、
写像 $f : \mathbf{R}^2 \longmapsto \mathbf{R}^2$ を
$f : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \longmapsto A\mathbf{x}$ と定義する。
$f : \mathbf{x} \longmapsto A\mathbf{x}$ は、$\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^2$ への一次変換と同一視できる[5]。

3. 行列で定義された複素数 A, B に対して、
写像 $f_1 : \mathbf{x} \longmapsto A\mathbf{x}$ と
写像 $f_2 : \mathbf{x} \longmapsto B\mathbf{x}$ を定義する。

$$\begin{aligned} (f_1+f_2)(\mathbf{x}) &= f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}) \\ &= A\mathbf{x} + B\mathbf{x} \\ &= (A+B)\mathbf{x} \end{aligned}$$

すなわち、一次変換の和と複素数の和は同一視できる。

$$\begin{aligned} \text{また、} (f_1 \circ f_2)(\mathbf{x}) &= f_1(f_2(\mathbf{x})) \\ &= f_1(B(\mathbf{x})) \\ &= A(B(\mathbf{x})) \\ &= (AB)\mathbf{x} \end{aligned}$$

[5] [3, pp.7-9] には、複素数を行列で表現されることが述べられている。

すなわち、一次変換の積と複素数の積は同一視できる[6]。

4. 以上のことからわかるように、行列および一次変換について理解していないと、行列型を理解することは難しい。

2.3 虚数単位を用いた定義

2.3.1 定義

定義 4 [7] 平方すると、-1 となる数を 1 つ考え、これを i で表し、虚数単位という。すなわち、$i^2 = -1$ とする。i と 2 つの実数 a、b を用いて $a+bi$ の形に表される数を複素数という。

a, b, c, d が実数のとき、二つの複素数 $z = a + bi, w = c + di$ に対して、相等・演算を次のように定義する。

相等　$a+bi = c+di$ であるとは、$a = c$ かつ $b = d$ のときである。

特に $a + bi = 0$　であるとは、$a = 0$ かつ $b = 0$ のときである。

演算は、複素数を単なる i の文字式と考えて行う。

以下、この定義を、$a + bi$ 型と呼ぶことにする。

[性質]　$\mathbf{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbf{R}, i$ は虚数単位$\}$ とする。

1. 演算を i の文字式として考えたので、明らかに加法・乗法について、交換法則・結合法則・分配法則が成り立つ。

2. 減法と除法は、文字式 i の形式的な計算で行う。

2.3.2 $a + bi$ 型の特徴

1. この定義は、これまでの高等学校で広く取り上げられてきた複素数の導入における定義である。これは、二次方程式の解を求める際の実数の概念の拡張としての扱いであるが、二乗すると負になる数についての存在性については言及していない。二乗したら負になる数を最初からあるものとして定義している。

2. 二乗したら負になる数を 1 つ考え、$i^2 = -1$ とした瞬間に $(-i)^2 = -1$ となり、二乗すると負になる数が 2 つあることになる。1 つあると考えるところに曖昧さがある。

3. i の文字式としての扱いになっているために、「$a + bi = 0$ であるとは、$a = 0$ かつ $b = 0$ のときである。」と定義せざるを得ない。

   1.2.3. の点から、数の概念を深める上でふさわしい定義とはいえない。

4. 四則演算について、$i^2 = -1$ とするほかは、i の文字式と考えて行うので、形式的に計算を行うことができる。除法についても次のように形式的に行うことができる。

   除法

$$\begin{aligned}(c+di) \div (a+bi) &= \frac{c+di}{a+bi} \\ &= \frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} \\ &= \frac{ac-bci+adi-bdi^2}{a^2-b^2i^2} \\ &= \frac{ac-bci+adi+bd}{a^2+b^2} \\ &= \frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{a^2+b^2} \\ &= \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2}i\end{aligned}$$

   このように、四則演算について形式的計算ができるので、生徒にとっては扱いやすく、形式的計算に習熟することによって、達成感を味わうことができるという利点がある。

2.4 3 つの型の定義の比較

以上述べた 3 つの型の定義について比較検討する。まとめると、次の表 1 のようになる。

$a, b \in \mathbf{R}$ とする。

[6] [2, pp.18-21] には m 次元から n 次元への一次写像 f と (m, n) 行列 A とが 1 対 1 に対応することが述べられている。

[7] [9, pp.8] からの引用

表 1: 複素数の定義

定義 の型	定義方法
(a,b) 型	$\mathbf{C}=\mathbf{R}^2$ 平面　順序対
行列型	$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \subset M(2,\mathbf{R})$
$a+bi$ 型	$\mathbf{C}=\{a+bi\}$　$i^2=-1$

このうち、(a,b) 型は、複素数と $\mathbf{R}^2$ 平面の座標上の点とを 1 対 1 対応させることができる。複素数平面を定義する際に妥当性がある。加法・減法について、高等学校で扱っているベクトルの演算の扱いができるので、ベクトルをすでに学んでいる生徒には受け入れやすいと考えられる。しかし、乗法・除法については図形的な扱いが難しいので、生徒にとっては理解しにくい可能性がある。

行列型は、先に述べたように複素数を $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^2$ の一次変換の概念と対応させることができる。しかし、行列の演算の定義を学んだ生徒にとってはこの定義は自然であるが、そうでない生徒にとっては難しい。

また、一次変換の概念は重要であるが、平成元年改訂の学習指導要領以降の高等学校の数学では取り扱っていない。

$a+bi$ 型は、二乗すると負になる数についての存在について言及されていないので、生徒が中学校までは、二乗したら正になる数の存在しか学んでいないこととの整合性がない[8]。また、二乗すると負になる数についていくつあるのかはっきりと述べられていない[9]。虚数単位 i の存在と i が一つだけであるのかどうかが曖昧にされている。高等学校において広く教科書で取り上げられている定義であるが、複素数がどんな数であるかの概念を深めさせるにはふさわしくない。しかし、$i^2=-1$ とするほかは、i の文字式と考えて四則演算を行うので、形式的計算に習熟させる定義としてはふさわしいと思われる。

[8] [7, pp.31] には、二乗したら負になる平方根は存在しないことが述べられている。

[9] [9, pp.8] 虚数単位 i についての説明が述べられている。

表 2: 定義の比較

定義 の型	意義	課題
(a,b) 型	座標と複素数の 1 対 1 対応	定義が わかりにくい
行列型	可換環 一次変換	行列について の知識がいる
$a+bi$ 型	計算に習熟できる	複素数の 存在感に欠ける

3　複素数の新しい導入について

前節までの検討を踏まえ、これら 3 つの型の定義の良さを取り入れ、複素数を図形的に取り扱い、複素数に存在感を与える新しい導入を提案する。

(a,b) 型の良さは、複素数を $\mathbf{R}^2$ の表現とみることにより、複素数と座標平面上の点を 1 対 1 に対応させることができることである。平成元年改訂の学習指導要領による教科書では、複素数平面を次のように定義していた[10]。

定義 5 [11]　座標平面上には (a,b) を座標にもつ点 P がただ一つある。この点 $P(a,b)$ を複素数 $a+bi$ に対応させて考えると、すべての複素数がこの平面上の点で表される。このようにして、複素数 $z=a+bi$ を座標平面上の点 $P(a,b)$ で表す場合、この平面を複素数平面といい、x 軸を実軸、y 軸を虚軸という。また、複素数 $z=a+bi$ を表す点 P を、単に点 z と呼び、$P(z)$ または、$P(a+bi)$ と書く。

ここでは、座標平面上の点と複素数が 1 対 1 に対応するということだけが定義されていて、複素数を座標平面上の点と対応させる良さや意味については述べられていない。数学的見方・考え方を育てるために重要な部分が欠けていると思われる。そこで、(a,b) 型の良さを取り入れるとともに、複素数を座標

[10] 複素数平面は、平成元年改訂の学習指導要領で取り上げられた言葉であり、従来は、複素平面と呼ばれていた。昭和 35 年改訂の学習指導要領による教科書では、複素平面と呼ばれていた。[6, pp.12] には、complex plane と呼んでいる。[4, pp.8] には、平面上の各点が複素数を表すものと考えた座標平面を複素平面 (complex plane) または、ガウス平面 (Gaussian plane) と呼んでいる。

[11] [9, pp.96] からの引用

平面上の点と対応させる意味について考えさせる授業を目指したい。

複素数平面は、平成１５年度実施予定の高等学校学習指導要領から削除されることになっているが、複素数がどんな数であるかを図形的に表現し、複素数に存在感を与えるすぐれた表現である。複素数の導入にあたり、複素数平面を取り入れることが必要であると思われる。

(a,b) 型の良さは、複素数の加法・減法が座標平面上の点の平行移動で説明できることである。すなわち、高等学校で学ぶベクトルの加法・減法と同じ演算である。

行列型の良さは、複素数を一次変換とみることができることである。一次変換の合成を考えることにより、複素数の乗法・除法は座標平面上の点の拡大・縮小移動と回転移動で定義することができる。

$a+bi$ 型の良さは、i の文字式とみることにより、複素数の四則演算を形式的に行うことができることである。しかし、虚数単位 i の存在性について述べられていないので、数の概念を深めさせることになっていない。

複素数の新しい導入のために、定義２の (a,b) 型、定義３の行列型、定義４の $a+bi$ 型の３つの型の定義を自由に取り入れて使うことにする。

複素数の導入を次のような原則で行う。

（１）二乗したら負になる数の存在について、生徒自らが構成する。

（２）実数からの数の拡張を行い、数の概念を深めるものとする。

（３）図形的な定義を取り入れ、数学的な美しさを味えるものとする。

3.1 複素数の導入について

本論文では、複素数の導入にあたり、以下のような授業展開を提案する。

（１） 二次方程式の解の存在を数直線を用いることにより、図形的に扱う。

（２）$\mathbf{C}$ を $\mathbf{R}$ の拡大とみて、複素数に存在感を与える定義を図形的に行う。

（３）複素数平面を定義する。

（４）複素数の加法・減法について、実数の加法・減法を数直線上で行うことができることから座標平面上に拡張して、図形的に定義する。

（５）複素数の乗法・除法について、座標平面上の点の拡大・縮小と回転移動で図形的に定義する。

（６）複素数の四則演算について、(a,b) 型の図形的な定義と、$a+bi$ 型の形式的計算の良さを取り入れる。

3.1.1 二次方程式の解の存在

平方根についてこれまでの中学校の教科書では、次のように定義していた。

定義 6 [12] ある数 x を二乗すると、（実数 a に対して）a になるとき、すなわち、

$$x^2 = a$$

であるとき、x を a の平方根という。

続けて、教科書では「どんな数を二乗しても負の数にはならない。したがって、負の数には平方根はない。」と述べている。 最初から a が負の数になる場合を除いて定義しているが、a が正の数の場合、0 である場合、負の数の場合についてそれぞれ考えてみることが数学的には重要である。

二乗したら正になる数、0 になる数、負になる数についての存在性について、自然な形で導入を行う。

問題 1 次の二次方程式を解きなさい。
$(x+\bigcirc)^2 = \triangle$ の形を使って求めなさい。

(1) $x^2 - 6x = 16$
(2) $x^2 - 6x = 7$
(3) $x^2 - 6x = 0$
(4) $x^2 - 6x = -5$
(5) $x^2 - 6x = -7$
(6) $x^2 - 6x = -9$
(7) $x^2 - 6x = -13$

また、問題１の二次方程式について、似ているところ違っているところはどこですか。

[12] [7, pp.31] には、正の数に、平方根が２つあり、0 の平方根は 0 だけであると述べられている。

予想される解答 1

(1) $x^2-6x+9=16+9$
$(x-3)^2=25$
$x-3=\pm5$
答え $x=-2$ または $x=8$

(2) $x^2-6x+9=7+9$
$(x-3)^2=16$
$x-3=\pm4$
答え $x=-1$ または $x=7$

(3) $x^2-6x+9=0+9$
$(x-3)^2=9$
$x-3=\pm3$
答え $x=0$ または $x=6$

(4) $x^2-6x+9=-5+9$
$(x-3)^2=4$
$x-3=\pm2$
答え $x=1$ または $x=5$

(5) $x^2-6x+9=-7+9$
$(x-3)^2=2$
$x-3=\pm\sqrt{2}$
答え $x=3-\sqrt{2}$ または $x=3+\sqrt{2}$

(6) $x^2-6x+9=-9+9$
$(x-3)^2=0$
$x-3=0$
答え $x=3$

(7) $x^2-6x+9=-13+9$
$(x-3)^2=-4$

二乗したら負になる数についてどう考えたらいいだろうか。

二次方程式の左辺の x^2 の項の係数が 1, x の項の係数が -6 であるところが似ている。右辺の数字が違う。

3.1.2 二次方程式の解と数直線

実数について、これまでの高等学校の教科書では次のように定義している。

定義 7 [13] 有限または無限の小数で表される数を実数という。従って実数は、有理数と無理数からなるものである。

[13][8, pp.20] からの引用

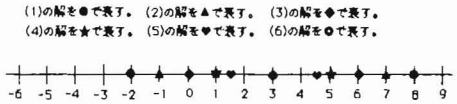
また、数直線については次のように説明している。

定義 8 [14] 直線上に基準の点 O をとり、単位の長さを決めると、直線上の点をそれを表す実数に対応させることができる。直線上の点と実数とを対応させて考えるとき、この直線を数直線、O を原点という。数直線上の点 A に対応する実数 a を点 A の座標といい、A の座標が a であることを $A(a)$ と表す。数直線上の任意の点の座標は実数であり、数直線上の各点にその座標を対応させれば、相異なる 2 点に対応する 2 つの実数は相異なる。

そこで、数直線上に二次方程式 $(x+\odot)^2=\triangle$ について、$\triangle$ が正になる場合の解は、数直線上に表すことができる。二次方程式の 2 つの解の数直線上の位置関係を観察する。また、$\triangle=0$ の場合の解との位置関係を観察する。

問題 2 問題 1 の答えを数直線上に表しなさい。
数直線を観察してみましょう。
どういうことがわかりますか。

予想される解答 2 (1), (2), (3), (4), (5) の二次方程式の解を数直線上に表すと、$x=3$ を中心として 2 つの解が対称に位置している。(6) の解は、$x=3$ の 1 つだけである。(7) の解はどこにあるのかわからない。



3.1.3 複素数の存在

数直線上に表せない数をどうしたらいいか考える。新しい数の世界を作るには、どうすればいいか考える。

問題 3 (7) の解は、どこにあったらいいですか。

予想される解答 3 (1), (2), (3), (4), (5) の二次方程式の 2 つの解はそれぞれ $x=3$ を中心として数直線上に対称に存在していた。(6) の解は、$x=3$ の 1 つだ

[14][8, pp.21] 数直線と実数の関係についての説明である。

けであった。(1) の 1 つの解 $x=-2$ と (6) の解 $x=3$ までの距離と、(1) のもう 1 つの解 $x=8$ と (6) の解 $x=3$ までの距離は等しい。同様に (2), (3), (4), (5) の 2 つの解と $x=3$ までの距離はそれぞれ等しい。以上の考察から (7) の解は 2 つあり、$x=3$ を中心として対称に位置するのではないだろうか。しかも数直線上でないところにあるとすればどこにあるのだろうか。

数直線の外側にあると考えられるのではないだろうか。

3.1.4 複素数平面

(1), (2), (3), (4), (5), (6) の解は、数直線上に表すことができた。(7) の二次方程式は実数の範囲では解くことができないが、(7) の二次方程式を解けるように新しい数の世界を考える。

問題 4 次の二次方程式の解を $(x+\odot)^2=\triangle$ の形を使って求めなさい。

(8) $x^2-6x=-18$

(9) $x^2-6x=-34$

(1) から (9) の二次方程式を平方完成の形で表した式について、似ているところ違っているところは、どこですか。

解をどこにしたらいいと思いますか。

予想される解答 4

(1) $(x-3)^2=25$

(2) $(x-3)^2=16$

(3) $(x-3)^2=9$

(4) $(x-3)^2=4$

(5) $(x-3)^2=2$

(6) $(x-3)^2=0$

(7) $(x-3)^2=-4$

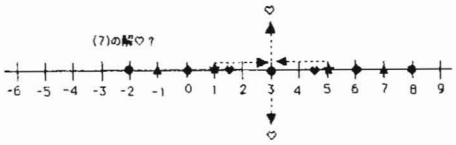
(8) $(x-3)^2=-9$

(9) $(x-3)^2=-25$

(4) と (7) の右辺の数の絶対値は 4 で同じ。でも符号が違う。

(3) と (8)、(1) と (9) の右辺も同様に絶対値が同じで符号が違う。

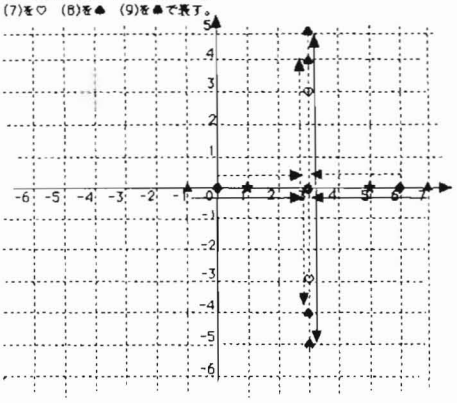
(7) の解は、(6) の解 $x=3$ を対称の中心として数直線の外側にあると考えたらどうだろうか。また、(4) の 1 つの解 $x=1$ と (6) の解 $x=3$ の距離、(4) のもう 1 つの解 $x=5$ と (6) の解 $x=3$ の距離と等しい距離にあると考えたらどうだろうか。



問題 5 (7) の二次方程式の解を、座標平面上の点 $(3,-2), (3,2)$ と思うことにしたら、(8), (9) の二次方程式の解はどういう書き方をしたらいいと思いますか。

予想される解答 5 (8) の解は、(6) の解 $x=3$ を対称の中心として (3) の解と $x=3$ との距離と等しいところにあると考えられるので、座標平面上の点 $(3,-3), (3,3)$ と書いたらいいのではないだろうか。

(9) の解は、$x=3$ を対称の中心として (1) の解と $x=3$ との距離と等しいところにあると考えられるので、座標平面上の点 $(3,-5), (3,5)$ と書いたらいいのではないだろうか。



問題 6 (1), (2), (3), (4), (5), (6) の二次方程式の解を座標平面上の点と思うことにしたら、どういう書き方をしたらいいと思いますか。

予想される解答 6 (1) の解は、$x=-2$ または $x=8$ であるから座標平面上の点として考えたら、$(-2,0)$ と $(8,0)$ である。

(2) の解は、$(-1,0)$ と $(7,0)$ である。

(3) の解は、$(0,0)$ と $(6,0)$ である。

(4) の解は、$(1,0)$ と $(5,0)$ である。

(5) の解は、$(3-\sqrt{2},0)$ と $(3+\sqrt{2},0)$ である。
(6) の解は、$(3,0)$ である。

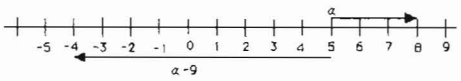
まとめ 1 二次方程式の解を、(a,b) 型の定義により、（複素数）平面上の点とみて表す。

3.1.5 複素数の加法・減法

実数の加法・減法は、数直線上における点の平行移動であるので、複素数の加法・減法を実数の加法・減法の拡張と考える。複素数の加法・減法を座標平面上での点の平行移動と考える。

問題 7 $\alpha=5$ とする。$\alpha+3$ は数直線上では、どんな意味がありますか。
また、$\alpha-9$ は数直線上では、どんな意味がありますか。

予想される解答 7 $\alpha+3=5+3=8$ であり、α を数直線上の右の方向に 3 移動することになる。
$\alpha-9=5-9=-4$ であり、α を数直線上の左の方向に 9 移動することになる。



問題 8 $\beta=(1,-4)$ とする。
$\beta+(2,3)$ は、どう考えたらいいですか。
また、$\beta-(2,3)$ は、どう考えたらいいですか。

予想される解答 8 $\beta+(2,3)$ の x 座標は、β の x 座標を x 軸の正の方向に 2 移動して $1+2=3$ とする。
$\beta+(2,3)$ の y 座標は、β の y 座標を y 軸の正の方向に 3 移動して $=-4+3=-1$ とする。
つまり、$\beta+(2,3)=(1,-4)+(2,3)=(1+2,-4+3)=(3,-1)$ と考えたらどうだろうか。
同様にして、$\beta-(2,3)=(1,-4)-(2,3)=(1-2,-4-3)=(-1,-7)$ と考えたらどうだろうか。

まとめ 2 (複素数の加法・減法) $\alpha=(a,b),\beta=(c,d)$ $(a,b,c,d\in\boldsymbol{R})$ とする。
(a,b) 型の定義により、
$\alpha+\beta=(a+c,b+d)$
$\alpha-\beta=(a-c,b-d)$

3.1.6 複素数の乗法・除法

複素数の乗法について以下のような順序で考える。

複素数の実数倍 実数の実数倍は、数直線における点と原点からの距離の拡大・縮小であるので、複素数の実数倍を実数の実数倍の拡張とみて、複素数の実数倍を、座標平面上の点と原点からの距離の拡大・縮小で考える。

複素数の純虚数倍 座標軸上の点 $(1,0)$ を点 $(0,1)$ に移動する一次変換を以下のように考える。
一次変換と複素数は対応させることができるので、複素数 A を

$$A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

とする。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると、

$$A\mathbf{x}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

より、

$$f\ :\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので、$a=0,b=1$ となり、

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

ところで、この行列 A について、移動した点と原点とを結んだ半直線と x 軸の正の方向とのなす角を θ としたときの一次変換とみると、

$$A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

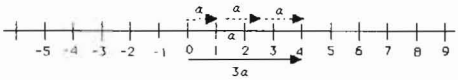
である。
$\cos\theta=0,\sin\theta=1$ となるので、$\theta=90°$ である。

したがって、複素数の $(0,1)$ 倍は原点の周りの点の 90° の回転移動である。
複素数の純虚数倍は、座標平面上の点の原点の周りの 90° の回転移動である。

複素数の複素数倍 分配法則を用いることにより、複素数の複素数倍を、座標平面上の点の拡大・縮小と原点の周りの回転移動で考える。

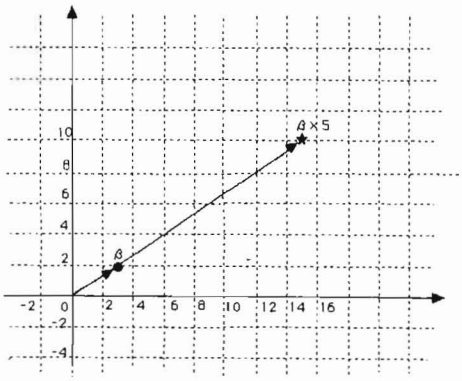
問題 9 $\alpha = \sqrt{2}$ とする。$\alpha \times 3$ は数直線上では、どんな意味がありますか。

予想される解答 9 $\alpha \times 3 = \sqrt{2} \times 3 = 3\sqrt{2}$ であり、数直線上では α と原点との距離を 3 倍に拡大したことになる。



問題 10 $\beta = (3,2)$ のとき、$\beta \times 5$ は、どう考えたらいいですか。

予想される解答 10 β の x 座標は 3 であるので、$\beta \times 5$ の x 座標は、原点との距離を 5 倍拡大して、$3 \times 5 = 15$ になる。
β の y 座標は 2 であるので、$\beta \times 5$ の y 座標は、原点との距離を 5 倍拡大して、$2 \times 5 = 10$ になる。
つまり、$\beta \times 5 = (3,2) \times 5 = (3 \times 5, 2 \times 5) = (15,10)$ と考えたらどうだろうか。



まとめ 3 (複素数の実数倍) $\alpha = (a,b), a,b,k \in \boldsymbol{R}$ とする。
(a,b) 型に定義により、
$\alpha \times k = (a \times k, b \times k)$

問題 11 $(0,1) \times 3$ はどう考えたらいいですか。

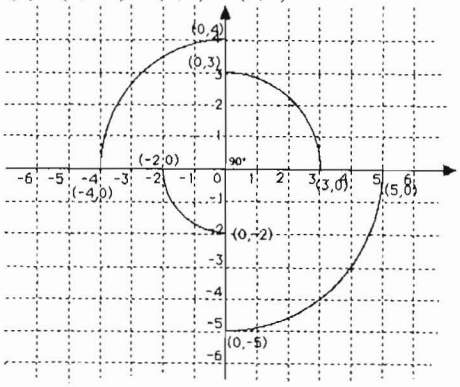
予想される解答 11 $(0,1) \times 3$ は、座標軸上の点 $(0,1)$ と原点からの距離を 3 倍すると考えると、$(0,1) \times 3 = (0,3)$ となると考えてよいのではないだろうか。

問題 12 $3 \times (0,1)$ はどう考えたらいいですか。

予想される解答 12 3 を原点の周りに 90° 回転移動すると点 $(0,3)$ になる。$(0,1)$ 倍を、座標平面上の点を原点の周りに 90° 回転移動した点に移すことと考えればうまくいくのではないだろうか。$3 \times (0,1) = (0,3)$ と考えてよいのではないだろうか。

問題 13 次の (1) から (4) はどう考えたらいいですか。
座標平面上で観察してみましょう。
(1) $(3,0) \times (0,1)$
(2) $(-2,0) \times (0,1)$
(3) $(0,4) \times (0,1)$
(4) $(0,-5) \times (0,1)$

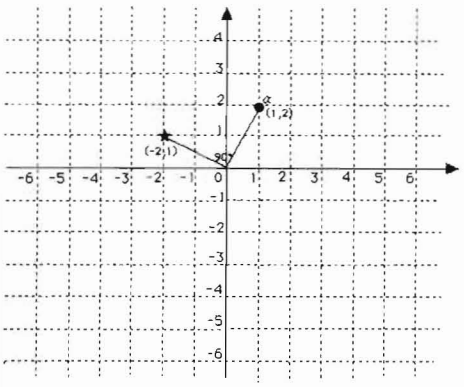
予想される解答 13 $(0,1)$ 倍を原点の周りの 90° 回転移動としてみたら、
(1) $(3,0) \times (0,1) = (0,3)$
(2) $(-2,0) \times (0,1) = (0,-2)$
(3) $(0,4) \times (0,1) = (-4,0)$
(4) $(0,-5) \times (0,1) = (5,0)$



問題 14 $\alpha = (1,2)$ のとき、$\alpha \times (0,1)$ は、どう考えたらいいですか。

予想される解答 14 $(0,1)$ 倍は、、座標平面上の点の 90° の回転移動と考えると、点 $(1,2)$ を原点の周り

に 90° 回転移動した点 $(-2,1)$ に移る。



まとめ 4 (複素数の純虚数倍) 複素数の $(0,1)$ 倍は、行列型の定義を用いることにより、座標平面上の点の原点の周りの 90° の回転移動となる。

問題 15 $\alpha=(2,3),\beta=(4,1)$ のとき、$\alpha\times\beta$ は、どう考えたらいいですか。

予想される解答 15 1.$\beta=(4,1)=(4,0)+(0,1)$ と考える。
2.α を $(4,1)$ 倍するということは、$(4,1)=(4,0)+(0,1)$ より、α の 4 倍と α の $(0,1)$ 倍を加えたものであると考える。
3.$\alpha\times 4=(2,3)\times 4$ は、点 $(2,3)$ を原点からの距離を 4 倍した点 $(8,12)$ に移す移動である。
4.$\alpha\times(0,1)$ は、点 $(2,3)$ の原点の周りの 90° 回転移動なので、点 $(-3,2)$ に移る。
5.$\alpha\times 4+\alpha\times(0,1)$ は、点 $(8,12)$ を x 軸の負の方向に 3、y 軸の正の方向に 2 平行に移動した点 $(5,14)$ になる。

まとめ 5 (複素数の複素数倍) 複素数の複素数倍は、行列型の定義を用いることにより、座標平面上の点の拡大・縮小と原点の周りの 90° の回転移動となる。
$\alpha=(a,b),\beta=(c,d)$ $(a,b,c,d\in\boldsymbol{R})$ とすると、

$$\begin{aligned}\alpha\beta&=(a,b)(c,d)\\&=(a,b)\{(c,0)+(0,d)\}\\&=(a,b)(c,0)+(a,b)(0,d)\\&=(ac,bc)+(-bd,ad)\\&=(ac-bd,bc+ad)\end{aligned}$$

となる。

3.1.7 複素数の四則演算

問題 16 $\alpha=(1,-4),\beta=(2,3)$ とする。$\alpha+\beta$ はどうなりますか。
$\alpha-\beta$ はどうなりますか。
$\alpha=(1,-4)$ を $1-4i$, $\beta=(2,3)$ を $2+3i$ で表わすことにする。$\alpha+\beta$ を、i の文字式として計算するとどうなりますか。
また、$\alpha-\beta$ を、i の文字式として計算するとどうなりますか。

予想される解答 16 $\alpha+\beta=(1,-4)+(2,3)=(3,-1)$
$\alpha-\beta=(1,-4)-(2,3)=(-1,-7)$
i の文字式として計算すると、$\alpha+\beta=(1-4i)+(2+3i)=3-i$ となるので、(a,b) 型で表した $(3,-1)$ と同じ結果になる。
同様に、$\alpha-\beta=(1-4i)-(2+3i)=-1-7i$ となり、(a,b) 型で表した $(-1,-7)$ と同じ結果になる。

問題 17 $\alpha=(2,3)$ を $2+3i,\beta=(4,1)$ を $4+i$ で表わすことにする。
$\alpha\beta$ は、どうなりますか。
$\alpha\beta$ を、i の文字式として計算するとどうなりますか。ただし、$i^2=-1$ とする。

予想される解答 17 $\alpha\beta=(2,3)(4,1)=(5,14)$
i の文字式として計算すると、

$$\begin{aligned}\alpha\beta&=(2+3i)(4+i)\\&=8+2i+12i+3i^2\\&=8+2i+12i-3\\&=5+14i\end{aligned}$$

(a,b) 型で表した $(5,14)$ と同じ結果になる。

まとめ 6 (複素数の四則演算) (a,b) 型の図形的定義と、$a+bi$ 型の形式的計算を取り入れて行う。

4 まとめと今後の課題

本稿では、複素数の 3 つの型の定義について比較・検討を行い、(a,b) 型、行列型、$a+bi$ 型の良さを取り入れ、複素数に存在感を与える導入の仕方を考えた。このとき、虚数単位 i とはどんな数であるかを考えさせることを重点においた導入になるようにした。

この際、二乗すると負になる数の存在について生徒に考えさせることを通して、新しい数学を作り上げ数の概念を深める授業を目指した複素数の導入の提案とした。iについて生徒自らが構成し、数学を作り上げることで新しい世界を発見できるような授業を目指したい。数学的な美しさを感得し、多方面から物事をみることができる生徒を育てたいと考えている。

これからの数学教育のあり方として、教師が知識を一方的に与えるような授業でなく生徒自らが数学を発見できる喜びのある授業を提案していきたい。

5 謝辞

本研究の進め方及びまとめ方について、岡山大学教育学部曽布川拓也助教授に終始懇篤なご指導を賜った。また、査読者より有意義なご助言をいただいた。ここに、深甚なる謝意を表する。

参考文献

[1] 赤座 暢『複素解析学』、培風館、1978。

[2] 佐武一郎『線型代数学』、裳華房、1958。

[3] 田村二郎『解析関数』、裳華房、1962。

[4] 林 一道『初等　関数論』裳華房、1992。

[5] 禰永昌吉編著『数学教本 上』朝倉書店、1992。

[6] Lars V.Ahlfors『Complex Analysis』McGraw-Hill 、1953。

[7] 藤田 宏他『新編　新しい数学３』東京書籍、2000。

[8] 藤田 宏他『数学Ａ』東京書籍、1999。

[9] 渡辺信三他『新編 数学Ｂ』、数研出版、2000。

[10] 山口 清・渋谷謙一「複素数の教材ー幾何学的な視点からー」、全国数学教育学会誌　数学教育学研究　第７巻、pp.133-141、2001。

[11] 山崎直和「複素数のベクトル的な解釈に関する研究ー同数累加的な解釈及びその実践-」、全国数学教育学会　第１５回研究発表会口頭発表、2002。

[12] 小林文美子「複素数の概念の図形的な導入について（II）-授業実践-」（準備中）

（平成１４年４月２６日受理）