

Mathematical Journal of Okayama University

Volume 6, Issue 1

1956

Article 4

OCTOBER 1956

Zusammenhang zwischen Derivationsmodul und 2-Kohomologiegruppe II

Mikao Moriya*

*Okayama University

Copyright ©1956 by the authors. *Mathematical Journal of Okayama University* is produced by
The Berkeley Electronic Press (bepress). <http://escholarship.lib.okayama-u.ac.jp/mjou>

ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DERIVATIONSMODUL UND 2-KOHOMOLOGIE- GRUPPE II

MIKAO MORIYA

Einleitung. In der vorliegenden Note bezeichnet k durchweg einen diskret bewerteten perfekten (kommutativen) Körper und K eine endlich-separable Erweiterung über k . Die Hauptordnung von k bzw. K sei mit $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{O}$ bezeichnet. Ferner sei $\bar{K}$ eine endlich-separable Erweiterung über K ($\bar{K}$ kann eventuell mit K übereinstimmen) und $\bar{\mathfrak{O}}$ die Hauptordnung von $\bar{K}$. Dann bezeichnen wir mit $\bar{\mathfrak{P}}$ das nicht-triviale Primideal aus $\bar{\mathfrak{O}}$ und mit $\bar{R}_m$ den Restklassenring von $\bar{\mathfrak{O}}$ nach $\bar{\mathfrak{P}}^m$; dabei wollen wir auch $m = \infty$ zulassen, indem wir unter $\bar{R}_\infty$ die Hauptordnung $\bar{\mathfrak{O}}$ selbst verstehen.

Eine eindeutige Abbildung f des Produktraumes $\mathfrak{O} \times \mathfrak{O}$ in $\bar{\mathfrak{O}}$ heißt ein *normaler 2-Kozyklus* von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- i) Für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{O}$ gilt

$$f(X, Y) \equiv f(Y, X) \pmod{\bar{\mathfrak{P}}^m}.$$

- ii) Für beliebige Elemente $X_i, Y_i (i = 1, 2)$ aus $\mathfrak{O}$ gilt

$$f(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) \equiv \sum_{i,j=1}^2 f(X_i, Y_j) \pmod{\bar{\mathfrak{P}}^m}.$$

- iii) Für beliebige Elemente X, Y, Z aus $\mathfrak{O}$ gilt

$$Xf(Y, Z) + f(X, YZ) \equiv f(XY, Z) + Zf(X, Y) \pmod{\bar{\mathfrak{P}}^m}.$$

- iv) Für ein beliebiges Element x bzw. X aus $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{O}$ gilt stets

$$f(x, X) \equiv 0 \pmod{\bar{\mathfrak{P}}^m}.$$

Dabei soll für $\pmod{\bar{\mathfrak{P}}^\infty}$ das Kongruenzzeichen durch das Gleichheitszeichen ersetzt werden.

Eine eindeutige Abbildung g von $\mathfrak{O}$ in $\bar{\mathfrak{O}}$ heißt eine *normale 1-Kokette* von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$, wenn g die folgenden Eigenschaften besitzt:

i) Für ein beliebiges Element x aus $\mathfrak{o}$ gilt stets

$$g(x) \equiv 0 \quad \text{mod } \bar{\mathfrak{P}}^m.$$

ii) Für ein beliebiges Element x bzw. X aus $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{O}$ gilt

$$g(xX) \equiv xg(X) \quad \text{mod } \bar{\mathfrak{P}}^m.$$

iii) Für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{O}$ gilt

$$g(X+Y) \equiv g(X) + g(Y) \quad \text{mod } \bar{\mathfrak{P}}^m.$$

Hierbei soll man für mod $\bar{\mathfrak{P}}^m$ wieder das Kongruenzzeichen durch das Gleichheitszeichen ersetzen.

Definiert man nun den 2-Korand δg von g durch die Gleichung

$$\delta g(X, Y) = Yg(X) + Xg(Y) - g(XY) \quad (X, Y \text{ aus } \mathfrak{O}),$$

so ist δg ersichtlich ein normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$. Wenn insbesondere für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{O}$ stets $\delta g(X, Y) \equiv 0 \text{ mod } \bar{\mathfrak{P}}^m$ gilt, so heißt g eine *Derivation* von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$.

Ein normaler 2-Kozyklus f' von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$ heißt *kohomolog* zu einem normalen 2-Kozyklus f von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$, wenn es eine normale 1-Kokette g von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$ gibt, so daß

$$f' \equiv f + \delta g \quad \text{mod } \bar{\mathfrak{P}}^m$$

gilt¹⁾, in Zeichen: $f \sim f' (\bar{\mathfrak{P}}^m)$.

Insbesondere bedeutet $f \sim 0 (\bar{\mathfrak{P}}^m)$, daß es eine normale 1-Kokette g von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$ mit $f \equiv \delta g \text{ mod } \bar{\mathfrak{P}}^m$ gibt.

Bekanntlich bildet die Gesamtheit Z_m^2 aller normalen 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$ einen $\bar{\mathfrak{O}}$ -Modul und die Gesamtheit B_m^2 aller zur Null kohomologen, normalen 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$ einen $\bar{\mathfrak{O}}$ -Untermodul von Z_m^2 ; der Faktormodul $Z_m^2/B_m^2 = H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$ ist offenbar ein $\bar{\mathfrak{O}}$ -Modul und die *normale 2-Kohomologiegruppe* von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$ genannt. Dabei heißt jedes Element aus $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$ eine *normale 2-Kohomologiekategorie* von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$.

Es ist klar, daß die Gesamtheit $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$ aller Derivationen von

1) Dies bedeutet, daß für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{O}$ stets die Kongruenz $f(X, Y) = f(X, Y) + \delta g(X, Y) \text{ mod } \bar{\mathfrak{P}}^m$ gilt.

$\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$ einen $\bar{\mathfrak{D}}$ -Modul bildet; $H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$ heißt der *Derivationsmodul* von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$.

Unter der $\bar{\mathfrak{D}}$ -Länge eines $\bar{\mathfrak{D}}$ -Moduls $\bar{M}$ versteht man die Länge einer endlichen Kompositionsreihe von $\bar{M}$ (wenn überhaupt eine solche endliche Kompositionsreihe existiert), die aus lauter $\bar{\mathfrak{D}}$ -Untermoduln von $\bar{M}$ besteht. Die $\bar{\mathfrak{D}}$ -Länge von $\bar{M}$ ist bekanntlich eine Invariante von $\bar{M}$.

Wenn insbesondere $\bar{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}$ und das nicht-triviale Primideal aus $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet ist, so gilt, wie ich schon in einer früheren Note¹⁾ bewiesen habe, für jede hinreichend große natürliche Zahl m stets folgende $\mathfrak{D}$ -Isomorphierelation:

$$(*) \quad H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m) \cong H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m),$$

außerdem besteht noch die Gleichung

$$\begin{aligned} L(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)) &= L(H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)) \\ &= \mathfrak{P}\text{-Exponenten}^2) \ d(K/k) \text{ der Differenten von } K/k. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $L(M)$ die $\mathfrak{D}$ -Länge eines $\mathfrak{D}$ -Moduls M und R_m den Restklassenring von $\mathfrak{D}$ nach $\mathfrak{P}^m$.

Das Ziel der vorliegenden Note ist zu beweisen, daß die obige Isomorphierelation (*) für jede nicht-negative ganze rationale Zahl m stets gültig ist.

§1. Länge eines Derivationsmoduls und einer normalen 2-Kohomologiegruppe. In diesem Paragraphen wollen wir für eine nicht-negative, ganze rationale Zahl m die $\mathfrak{D}$ -Längen von $H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{D}/\mathfrak{P}^m)$ und $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{D}/\mathfrak{P}^m)$ bestimmen, wo $\mathfrak{P}$ das nicht-triviale Primideal aus $\mathfrak{D}$ bezeichnet. Zu diesem Zweck ziehen wir eine K enthaltende, über k endlich-separable galoissche Erweiterung $\bar{K}$ heran. Nun sei $\bar{\mathfrak{D}}$ die Hauptordnung von $\bar{K}$ und $\bar{\mathfrak{P}}$ das nicht-triviale Primideal aus $\bar{\mathfrak{D}}$. Ferner sei e die Verzweigungsordnung von $\bar{K}$ über K . Dann bezeichnen wir für eine durch e teilbare, nicht-negative ganze rationale Zahl m den Restklassenring $\bar{\mathfrak{D}}/\bar{\mathfrak{P}}^m$ durch $\bar{R}_m$, und wir ziehen zunächst die Deriva-

1) M. Moriya, Zusammenhang zwischen Derivationsmodul und 2-Kohomologiegruppe I, Journ. Math. Soc., Japan, Vol. 7, Supplement (1955), S. 444–452, Satz 3. Diese Note zitiere ich mit M III.

2) D. h. die Differenten von K/k ist gleich $\mathfrak{P}^{d(K/k)}$.

tionsmoduln $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$ und $H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$ in Betracht. Da $\bar{K}$ über k separabel-galoissch ist, so ist $\bar{\mathfrak{O}}$ über $\mathfrak{o}$ *normal*; d. h. es existiert eine Folge von den Hauptordnungen $\mathfrak{O}_i (i = 1, 2, \dots, s)$

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{O}_0 \subset \mathfrak{O}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{O}_s = \bar{\mathfrak{O}}$$

von der Art, daß jedes $\mathfrak{O}_i (0 \leq i \leq s)$ die Hauptordnung eines Zwischenkörpers von $\bar{K}/k$ ist und $\mathfrak{O}_{i+1}$ aus $\mathfrak{O}_i (0 \leq i \leq s-1)$ durch Ringadjunktion eines einzigen Elementes besteht¹⁾. Ebenso ist $\bar{\mathfrak{O}}$ über $\mathfrak{O}$ *normal*, weil $\bar{K}$ auch über K separabel-galoissch ist.

Es sei $\bar{D}$ eine beliebige Derivation aus $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$. Dann induziert $\bar{D}$ offenbar eine Derivation D von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$; d. h. D ist die Einschränkung von $\bar{D}$ auf $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$. Ordnet man nun einer beliebigen Derivation $\bar{D}$ aus $H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$ die Einschränkung D von $\bar{D}$ auf $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ zu, so ergibt diese Zuordnung einen $\bar{\mathfrak{O}}$ -Homomorphismus ϕ von $H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$ in $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$. Dabei besteht der Kern von ϕ offenbar aus allen Derivationen von $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}$ über $\bar{R}_m$, also stimmt mit dem Derivationsmodul $H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}; \bar{R}_m)$ überein.

Bezeichnet man nun mit $G^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$ das Bild von $H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$ durch ϕ , so gilt folgende $\mathfrak{O}$ -Isomorphierelation:

$$H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)/H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}; \bar{R}_m) \cong G^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m).$$

Dabei besteht $G^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$ ersichtlich aus allen denjenigen Derivationen aus $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$, die in $H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$ ihre Fortsetzungen besitzen. Aus der letzten Isomorphierelation folgt ohne weiteres:

$$\bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)) = \bar{L}(G^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)) + \bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}; \bar{R}_m)),$$

weil die hier auftretenden $\bar{\mathfrak{O}}$ -Längen alle endlich sind²⁾. Da $G^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$ ein $\bar{\mathfrak{O}}$ -Untermodul von $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$ ist, so ist

$$(1.1) \quad E = \bar{L}(H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)) - \bar{L}(G^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m))$$

eine nicht-negative, ganze rationale Zahl; ferner gilt offenbar:

$$(1.2) \quad \bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)) = \bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}; \bar{R}_m)) + \bar{L}(H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)) - E.$$

1) M. Moriya, Theorie der Derivationen und Körperdifferenzen, Math. Journ., Okayama Univ., Vol. 2 (1953), S. 128—129, Hilfssatz 4. Diese Arbeit ist mit M I zitiert.

2) M I, S. 123—124, Satz 3.

Nun wollen wir uns den 2-Kohomologiegruppen zuwenden. Berücksichtigt man zunächst, daß $\bar{\mathfrak{D}}$ über $\mathfrak{D}$ normal ist, so gilt folgende $\bar{\mathfrak{D}}$ -Isomorphierelation:

$$(1.3) \quad H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)/H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{o}, \mathfrak{D}; \bar{R}_m) \cong H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)^{1)}.$$

Dabei bedeutet $H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{o}, \mathfrak{D}; \bar{R}_m)$ diejenige $\bar{\mathfrak{D}}$ -Untergruppe von $H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$, die aus allen und nur allen, in $\mathfrak{D}$ zerfallenden normalen 2-Kohomologieklassen von $\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$ besteht²⁾. Ferner ist noch bewiesen worden, daß jede 2-Kohomologieklass aus $H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{o}, \mathfrak{D}; \bar{R}_m)$ mindestens einen normalen 2-Kozyklus von $\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}$ über $\bar{R}_m$ enthält³⁾. Da ersichtlich jeder normale 2-Kozyklus $\bar{F}$ von $\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}$ über $\bar{R}_m$ in $\mathfrak{D}$ zerfällt, so ordnen wir der $\bar{F}$ enthaltenden 2-Kohomologieklass aus $H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m)$ die $\bar{F}$ enthaltende 2-Kohomologieklass aus $H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{o}, \mathfrak{D}; \bar{R}_m)$ zu. Dadurch ergibt sich ein $\bar{\mathfrak{D}}$ -Homomorphismus ψ von $H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m)$ auf $H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{o}, \mathfrak{D}; \bar{R}_m)$. Wenn man also den Kern von ψ durch $G^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m)$ bezeichnet, so gilt die folgende $\bar{\mathfrak{D}}$ -Isomorphie:

$$(1.4) \quad H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m)/G^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m) \cong H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{o}, \mathfrak{D}; \bar{R}_m).$$

Nun sei $\bar{F}$ ein (normaler) 2-Kozyklus aus irgendeiner 2-Kohomologieklass aus $G^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m)$. Dann existiert nach Definition eine normale 1-Kokette $\bar{g}$ von $\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$ von der Art, daß

$$(1.5) \quad \bar{F} \equiv \delta \bar{g} \quad \text{mod } \bar{\mathfrak{P}}^m$$

gilt. Da $\bar{F}$ ein normaler 2-Kozyklus von $\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}$ über $\bar{R}_m$ ist, so besteht für die Einschränkung g von $\bar{g}$ auf $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ die Kongruenz:

$$\delta g(X, Y) \equiv \bar{F}(X, Y) \equiv 0 \quad \text{mod } \bar{\mathfrak{P}}^m,$$

wo X, Y beliebige Elemente aus $\mathfrak{D}$ bezeichnen; d. h. g ist eine *Derivation von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$* . Gehört insbesondere in der Kongruenz (1.5) $\bar{F}$ zur Nullklasse aus $G^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m)$, so existiert eine normale 1-Kokette $\bar{G}$ von $\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}$ über $\bar{R}_m$ mit $\bar{F} \equiv \delta \bar{G} \text{ mod } \bar{\mathfrak{P}}^m$. Weil offenbar

1) M. Moriya, Theorie der 2-Kohomologiegruppen in diskret bewerteten perfekten Körpern, Math. Journ., Okayama Univ., Vol. 5 (1955), S. 69; diese Arbeit ist mit M II zitiert.

2) M II, S. 50.

3) M II, S. 50—51, Hilfssatz 2.

$$\delta(\bar{g} - \bar{G}) \equiv 0 \quad \text{mod } \bar{\mathfrak{P}}^m$$

gilt, so ist $\bar{D} = \bar{g} - \bar{G}$ eine Derivation von $\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$. Berücksichtigt man dabei, daß für ein beliebiges Element X aus $\mathfrak{D}$ stets

$$\bar{G}(X) \equiv 0 \quad \text{mod } \bar{\mathfrak{P}}^m$$

gilt, so ist

$$\bar{D}(X) = \bar{g}(X) - \bar{G}(X) \equiv \bar{g}(X) \equiv g(X) \quad \text{mod } \bar{\mathfrak{P}}^m;$$

d. h. g (die Einschränkung von $\bar{g}$ auf $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$) ist als Derivation stets auf $\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{o}$ fortsetzbar (die Derivation $\bar{D}$ ist sicher eine Fortsetzung von g auf $\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{o}$), also gehört g zu $G^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$.

Umgekehrt gehöre in (1.5) die Einschränkung g von $\bar{g}$ auf $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ zu $G^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$. Dann besitzt g eine Fortsetzung $\bar{D}$ aus $H^1(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$, und die Einschränkung von $\bar{g} - \bar{D}$ auf $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ ist offenbar die Nullderivation von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$. Weil wegen $\delta\bar{D} \equiv 0 \text{ mod } \bar{\mathfrak{P}}^m$ die Kongruenz $\delta(\bar{g} - \bar{D}) \equiv \delta\bar{g} \text{ mod } \bar{\mathfrak{P}}^m$ besteht, so gilt für ein beliebiges Element X aus $\mathfrak{D}$ bzw. $\bar{X}$ aus $\bar{\mathfrak{D}}$

$$\delta(\bar{g} - \bar{D})(X, \bar{X}) \equiv \delta\bar{g}(X, \bar{X}) \equiv F(X, \bar{X}) \equiv 0 \quad \text{mod } \bar{\mathfrak{P}}^m;$$

ferner folgt aus der letzten Kongruenz:

$$\begin{aligned} \delta(\bar{g} - \bar{D})(X, \bar{X}) &\equiv \bar{X}(\bar{g} - \bar{D})(X) + X(\bar{g} - \bar{D})(\bar{X}) - (\bar{g} - \bar{D})(X\bar{X}) \\ &\equiv X(\bar{g} - \bar{D})(\bar{X}) - (\bar{g} - \bar{D})(X\bar{X}) \equiv 0 \quad \text{mod } \bar{\mathfrak{P}}^m. \end{aligned}$$

Dies bedeutet aber, daß $\bar{G} = \bar{g} - \bar{D}$ eine normale 1-Kokette von $\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}$ über $\bar{\mathfrak{P}}_m$ ist, und es ist

$$\delta\bar{G} \equiv \delta\bar{g} \equiv \bar{F} \quad \text{mod } \bar{\mathfrak{P}}^m;$$

d. h. $\bar{F}$ gehört zur Nullklasse aus $G^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m)$.

Nun sei $\bar{C}$ eine beliebige 2-Kohomologieklassse aus $G^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m)$ und $\bar{F}$ ein beliebiger 2-Kozyklus aus $\bar{C}$. Ferner sei $\bar{g}$ eine normale 1-Kokette von $\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$ mit $\bar{F} \equiv \delta\bar{g} \text{ mod } \bar{\mathfrak{P}}^m$, und g die Einschränkung von $\bar{g}$ auf $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$. Ordnet man dann $\bar{C}$ die Derivation g aus $H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$ zu, so ergibt diese Zuordnung nach dem oben Gezeigten einen $\bar{\mathfrak{D}}$ -Isomorphismus χ von $G^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m)$ in $H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)/G^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$.

Nun sei D eine beliebige Derivation aus $H(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$. Dann wollen wir zeigen, daß es eine normale 1-Kokette $\bar{g}$ von $\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

- i) $\delta\bar{g}$ ist ein normaler 2-Kozyklus von $\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}$ über $\bar{R}_m$.
- ii) Die Einschränkung von $\bar{g}$ auf $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ ist D .

Zum Beweis dieser Tatsache legen wir eine Minimalbasis $\bar{W}_1 = 1, \bar{W}_2, \dots, \bar{W}_n$ von $\bar{\mathfrak{D}}$ über $\mathfrak{D}$ fest. Dann ist ein beliebiges Element $\bar{X}$ aus $\bar{\mathfrak{D}}$ von der Form

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i \bar{W}_i,$$

wo die X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) Elemente aus $\mathfrak{D}$ bezeichnen. Wir setzen zunächst

$$\bar{g}_1(\bar{X}) = D(X_1).$$

Da die Elemente X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) durch $\bar{X}$ und die $\bar{W}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) eindeutig bestimmt sind, so ist $\bar{g}_1(\bar{X})$ nach Definition durch $\bar{X}$ eindeutig bestimmt. Ferner können wir leicht bestätigen, daß $\bar{g}_1$ eine normale 1-Kokette von $\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$ ist. Nun setzen wir

$$\bar{g}_2(X_i \bar{W}_i) = \delta\bar{g}_1(X_i, \bar{W}_i)$$

und

$$\bar{g}_2(\sum_{i=1}^n X_i \bar{W}_i) = \sum_{i=1}^n \bar{g}_2(X_i \bar{W}_i).$$

Nach Definition gilt für ein Element X aus $\mathfrak{D}$:

$$\bar{g}_2(X) = \bar{g}_2(X \bar{W}_1) = \delta\bar{g}_1(X, \bar{W}_1) = \delta\bar{g}_1(X, 1) \equiv 0 \quad \text{mod } \bar{\mathfrak{P}}^m;$$

dies zeigt, daß $\bar{g}_2$ eine 1-Kokette von $\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}$ über $\bar{R}_m$ ist. Berücksichtigt man ferner die Kongruenzen

$$X\delta\bar{g}_1(X_i, \bar{W}_i) + \delta\bar{g}_1(X, X_i \bar{W}_i) \equiv \delta\bar{g}_1(XX_i, \bar{W}_i) + \bar{W}_i \delta\bar{g}_1(X, X_i) \quad \text{mod } \bar{\mathfrak{P}}^m$$

und

$$\delta\bar{g}_1(X, X_i) \equiv \delta D(X, X_i) \equiv 0 \quad \text{mod } \bar{\mathfrak{P}}^m,$$

so bestätigt man leicht, daß

$$\delta\bar{g}_1(X, X_i \bar{W}_i) \equiv -\delta\bar{g}_2(X, X_i \bar{W}_i) \quad \text{mod } \bar{\mathfrak{P}}^m$$

gilt. Wenn man also

$$\bar{g} = \bar{g}_1 + \bar{g}_2$$

setzt, so besteht die Kongruenz :

$$\begin{aligned} \partial \bar{g}(X, \sum_{i=1}^n X_i \bar{W}_i) &= \partial \bar{g}_1(X, \sum_{i=1}^n X_i \bar{W}_i) + \partial \bar{g}_2(X, \sum_{i=1}^n X_i \bar{W}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (\partial \bar{g}_1(X, X_i \bar{W}_i) + \partial \bar{g}_2(X, X_i \bar{W}_i)) \\ &\equiv 0 \quad \text{mod } \mathfrak{P}^m; \end{aligned}$$

d. h. $\partial \bar{g}$ ist ein normaler 2-Kozyklus von $\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}$ über $\bar{R}_m$. Ferner ist $\bar{g}$ eine normale 1-Kokette von $\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}$ über $\bar{R}_m$, weil für jedes Element x aus $\mathfrak{D}$ stets $\bar{g}(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^m}$ gilt. Da offenbar für ein beliebiges Element X aus $\mathfrak{D}$

$$\bar{g}(X) = \bar{g}_1(X) + \bar{g}_2(X) \equiv \bar{g}_1(X) \equiv D(X) \quad \text{mod } \mathfrak{P}^m$$

besteht, so ist die normale 1-Kokette $\bar{g}$ von $\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}$ über $\bar{R}_m$ eine Fortsetzung von D auf $\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}$. Bezeichnet also $\bar{C}$ die $\partial \bar{g}$ enthaltende, normale 2-Kohomologieklassse von $\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}$ über $\bar{R}_m$, so ist nach Definition

$$\bar{C} \in G^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m);$$

durch Anwendung des Isomorphismus χ auf $\bar{C}$ erhält man :

$$\chi(\bar{C}) = D + G^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m).$$

Somit ist gezeigt, daß χ ein $\bar{\mathfrak{D}}$ -Isomorphismus von $G^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m)$ auf $H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m)/G^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m)$ ist, und daß nach (1.1)

$$\bar{L}(G^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m)) = E$$

gilt.

Unter der Voraussetzung, daß $H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m)$ bzw. $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m)$ eine endliche $\bar{\mathfrak{D}}$ -Länge besitzt, erhält man ohne weiteres :

$$\bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}, \mathfrak{D}; \bar{R}_m)) = \bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m)) - E$$

und

$$\begin{aligned} \bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m)) &= \bar{L}(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m)) + \bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}, \mathfrak{D}; \bar{R}_m)) \\ &= \bar{L}(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m)) + \bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m)) - E; \end{aligned}$$

d. h. es gilt nach (1.2):

$$(1.6) \quad \begin{aligned} & \bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)) - \bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)) \\ &= \bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)) - \bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)) + \bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m)) \\ & \quad - \bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m)). \end{aligned}$$

Nun wollen wir zeigen, daß $\bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)) = \bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m))$ ist. Dazu betrachten wir $H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}_{s-1}; \bar{R}_m)$ und $H^1(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}_{s-1}; \bar{R}_m)$. Dann gelten folgende Isomorphierelationen:

$$H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}_{s-1}; \bar{R}_m) \cong \bar{\mathfrak{D}}/(\bar{\mathfrak{P}}^m, \mathfrak{D}(\bar{K}/K_{s-1}))^1)$$

und

$$H^1(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}_{s-1}; \bar{R}_m) \cong \bar{\mathfrak{D}}/(\bar{\mathfrak{P}}^m, \mathfrak{D}(\bar{K}/K_{s-1}))^2),$$

wo K_{s-1} den Quotientenkörper von $\mathfrak{D}_{s-1}$ und $\mathfrak{D}(\bar{K}/K_{s-1})$ die Differente von $\bar{K}/K_{s-1}$ bedeutet. Hieraus folgt sofort:

$$\bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}_{s-1}; \bar{R}_m)) = \bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}_{s-1}; \bar{R}_m)).$$

Ebenso beweist man, daß

$$\bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{D}}_1/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)) = \bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{D}}_1/\mathfrak{o}; \bar{R}_m))$$

gilt. Nun nehmen wir an, daß

$$\bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}_1; \bar{R}_m)) = \bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}_1; \bar{R}_m))$$

ist. Dann folgt aus (1.6);

$$\begin{aligned} & \bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)) - \bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)) \\ &= \bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{D}}_1/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)) - \bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{D}}_1/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)) + \bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}_1; \bar{R}_m)) \\ & \quad - \bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}_1; \bar{R}_m)) = 0; \end{aligned}$$

also ist $\bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)) = \bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m))$.

Da $\bar{\mathfrak{D}}$ über $\mathfrak{D}$ auch normal ist, so gilt ebenfalls:

$$\bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m)) = \bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{D}}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m)).$$

1) M II, S. 59, Satz 3.

2) M I, S. 117, Satz 1.

Weil $\bar{L}(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m))$ und $\bar{L}(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{D}; \bar{R}_m))$ endlich sind, so ist es auch $\bar{L}(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m))$ nach (1.3). Daher folgt aus (1.6):

$$\bar{L}(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)) = \bar{L}(H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)).$$

Setzt man nun $m_0 e = m$ und $R_{m_0} = \mathfrak{D}/\mathfrak{P}^{m_0}$, so sind $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$ und $H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$ bzw. die Multiplikatorenbereicherweiterungen von $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_{m_0})$ und $H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_{m_0})$ zu $\bar{\mathfrak{D}}$,¹⁾ wo $\mathfrak{P}$ das nicht-triviale Primideal aus $\mathfrak{D}$ bezeichnet. Wenn man daher mit $L(M)$ die $\mathfrak{D}$ -Länge eines $\mathfrak{D}$ -Moduls M bezeichnet, so gilt:

$$\begin{aligned} L(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_{m_0})) &= \bar{L}(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{R}_{m_0}))/e \\ &= \bar{L}(H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m))/e = L(H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_{m_0})). \end{aligned}$$

Somit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Satz 1. R_m sei der Restklassenring von $\mathfrak{D}$ nach $\mathfrak{P}^m$, wo $\mathfrak{P}$ das nicht-triviale Primideal aus $\mathfrak{D}$ und m eine nicht-negative, ganze rationale Zahl bezeichnet. Dann gilt

$$L(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)) = L(H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)),$$

wo $L(M)$ die $\mathfrak{D}$ -Länge eines $\mathfrak{D}$ -Moduls M bezeichnet.

Satz 2. Es bezeichne $L(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m))$ die $\mathfrak{D}$ -Länge von $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$. Ferner seien m, n nicht-negative, ganze rationale Zahlen. Ist dann $m \leq n$, so gilt:

$$L(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)) \leq L(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_n)) \leq L(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty)).$$

Beweis. Nach Satz 1 gelten

$$L(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)) = L(H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m))$$

und

$$L(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_n)) = L(H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_n)).$$

Da stets $L(H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)) \leq L(H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_n))$ ist²⁾, so schließt man:

1) M II, S. 54—55, Hilfssatz 4 und M I, S. 127—128, Satz 4.

2) M I, S. 114, Hilfssatz 1

$$L(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)) \leq L(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_n)).$$

Weil aber für eine hinreichend große natürliche Zahl n_1 mit $n_1 > n$ $L(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_{n_1})) = L(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty))$ gilt¹⁾, so muß

$$L(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_n)) \leq L(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty))$$

sein.

§2. Struktur der normalen 2-Kohomologiegruppen. In diesem Paragraphen setzen wir $R_m = \mathfrak{D}/\mathfrak{P}^m$ ($0 \leq m \leq \infty$), wo $\mathfrak{P}$ das nicht-triviale Primideal aus $\mathfrak{D}$ bedeutet. Ein normaler 2-Kozyklus f von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über R_m heißt von der $\mathfrak{D}$ -Länge e in $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$, wenn aus einer Kohomologierelation $Af \sim 0$ ($\mathfrak{P}^m$) ($A \in \mathfrak{D}$) stets $A \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^e}$ folgt und umgekehrt. Es seien $f_1, f_2, \dots, f_n$ normale 2-Kozyklen von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über R_m , deren $\mathfrak{D}$ -Längen in $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$ bzw. natürliche Zahlen $e_1, e_2, \dots, e_n$ sind. Dann heißen $f_1, f_2, \dots, f_n$ $\mathfrak{D}$ -unabhängig in $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$, wenn aus einer Kohomologierelation

$$\sum_{i=1}^n A_i f_i \sim 0 \quad (\mathfrak{P}^m) \quad (A_i \in \mathfrak{D}; i = 1, 2, \dots, n)$$

stets $A_i f_i \sim 0$ ($\mathfrak{P}^m$) ($i = 1, 2, \dots, n$) folgen, was mit den Kongruenzen $A_i \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^{e_i}}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) gleichbedeutend ist. Ein System von den normalen 2-Kozyklen f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über R_m , welche in $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$ $\mathfrak{D}$ -unabhängig sind, heißt eine *Kozyklenbasis* von $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$, wenn für jeden normalen 2-Kozyklus f von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über R_m stets eine Kohomologierelation

$$f \sim \sum_{i=1}^n A_i f_i \quad (\mathfrak{P}^m)$$

gilt, wo die A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) Elemente aus $\mathfrak{D}$ bezeichnen.

Zunächst betrachten wir den Fall, wo $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty)$ der Nullmodul ist. Nach Satz 2 gilt dann für eine beliebige, nicht-negative ganze rationale Zahl m :

$$L(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)) \leq L(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty)) = 0,$$

1) M II, S. 70–71, Satz 5.

also ist $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$ der Nullmodul. Hieraus schließt man nach Satz 1, daß $H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$ auch der Nullmodul ist. Mithin ist bewiesen:

Hilfssatz 1. *Für eine nicht-negative, ganze rationale Zahl m sind $H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$ und $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$ als der Nullmodul voneinander isomorph, wenn $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty)$ der Nullmodul ist.*

Nun nehmen wir an, daß $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty)$ kein Nullmodul ist. Dann besitzt $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty)$ eine endliche Kozyklenbasis $f_1, f_2, \dots, f_n$. Wenn die $\mathfrak{D}$ -Länge von f_i ($1 \leq i \leq n$) mit e_i bezeichnet wird, so ist

$$L(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty)) = \sum_{i=1}^n e_i = \mathfrak{P}\text{-Exponenten } d(K/k) \text{ der Differenten von } K/k^{1)}.$$

Ferner existiert eine natürliche Zahl N von der Art, daß für jede natürliche Zahl m mit $m \geq N$ $f_1, f_2, \dots, f_n$ in $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$ stets $\mathfrak{D}$ -unabhängig bzw. von der $\mathfrak{D}$ -Länge $e_1, e_2, \dots, e_n$ sind. Bezeichnet man nun mit $C_m(f_i)$ ($1 \leq i \leq n$) die f_i enthaltende, normale 2-Kohomologiekategorie aus $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$, so erzeugen die $C_m(f_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) einen $\mathfrak{D}$ -Untermodul $H_1^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$ von $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$. Dabei nennt man den $\mathfrak{D}$ -Modul $H_1^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$ einfach den durch $f_1, f_2, \dots, f_n$ erzeugten Untermodul von $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$. Es sei C_m eine beliebige 2-Kohomologiekategorie aus $H_1^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$ und f ein normaler 2-Kozyklus aus C_m . Dann ist f von der Form

$$f \sim \sum_{i=1}^n A_i f_i \quad (\mathfrak{P}^m),$$

wo die A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) Elemente aus $\mathfrak{D}$ bezeichnen. Ordnet man also C_m die $\sum_{i=1}^n A_i f_i$ enthaltende, 2-Kohomologiekategorie aus $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty)$ zu, so ergibt diese Zuordnung offenbar einen $\mathfrak{D}$ -Isomorphismus von $H_1^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$ auf $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty)$, weil nach Voraussetzung dann und nur dann $\sum_{i=1}^n A_i f_i \sim 0$ ($\mathfrak{P}^m$) ist, wenn $\sum_{i=1}^n A_i f_i \sim 0$ ($\mathfrak{P}^\infty$) ist. Es gilt daher:

$$L(H_1^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)) = L(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty)).$$

Da $L(H_1^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)) \leq L(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m))$ und nach Satz 2 $L(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)) \leq L(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty))$ ist, so muß sicher

$$L(H_1^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)) = L(H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m))$$

sein; hieraus folgt sofort:

1) M II, S. 70–71, Satz 5.

$$H_1^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m) = H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m).$$

Somit ist beweisen:

Hilfssatz 2. *Es sei $f_1, f_2, \dots, f_n$ eine Kozyklenbasis von $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty)$; ferner sei die $\mathfrak{D}$ -Länge von f_i ($1 \leq i \leq n$) in $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty)$ gleich e_i . Sind dann $f_1, f_2, \dots, f_n$ $\mathfrak{D}$ -unabhängig bzw. von der $\mathfrak{D}$ -Länge $e_1, e_2, \dots, e_n$ in $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$, so stimmt $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$ mit dem durch $f_1, f_2, \dots, f_n$ erzeugten $\mathfrak{D}$ -Modul überein, und es gilt sogar die $\mathfrak{D}$ -Isomorphierelation:*

$$H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m) \cong H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty).$$

Ferner bilden $f_1, f_2, \dots, f_n$ auch eine Kozyklenbasis von $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$.

Nun legen wir eine beliebige Kozyklenbasis $f_1, f_2, \dots, f_n$ von $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty)$ fest; die $\mathfrak{D}$ -Länge von f_i ($1 \leq i \leq n$) sei mit e_i bezeichnet. Ferner sei a die kleinste natürliche Zahl von der Art, daß für jede natürliche Zahl m mit $m \geq a$ $f_1, f_2, \dots, f_n$ $\mathfrak{D}$ -unabhängig bzw. von der $\mathfrak{D}$ -Länge $e_1, e_2, \dots, e_n$ in $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$ sind aber nicht mehr so in $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_{a-1})$. Daß eine solche Zahl existiert, sieht man sofort ein, weil für ein $e_j = e$ mit $e = \text{Max}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ und für $e > \nu > 0$ $\pi^e f_j \sim 0$ ($\mathfrak{P}^{e-\nu}$) gilt, wo π ein Primelement von $\mathfrak{P}$ aus $\mathfrak{D}$ bedeutet; d. h. in $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_{e-\nu})$ sind $f_1, f_2, \dots, f_n$ nicht mehr $\mathfrak{D}$ -unabhängig bzw. von der $\mathfrak{D}$ -Länge $e_1, e_2, \dots, e_n$. Es muß also

$$e \leq a$$

sein.

Nun existiert nach Annahme eine Kohomologierelation

$$\sum_{i=1}^n A_i f_i \sim 0 \quad (\mathfrak{P}^{a-1}) \quad (A_i \in \mathfrak{D}; i = 1, 2, \dots, n)$$

mit mindestens einem durch $\mathfrak{P}^{a-1}$ unteilbaren Element A_i . Dabei kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß nur $A_1, A_2, \dots, A_s$ von Null verschieden sind. Es existiert also eine normale 1-Kokette h von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über R_{a-1} , für die

$$(2.1) \quad \sum_{i=1}^s A_i f_i \equiv \delta h \quad \text{mod } \mathfrak{P}^{a-1}$$

gilt. Setzt man nun $A_i = \pi^{e_i-b_i} B_i$ mit $\mathfrak{P} \nmid B_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$), so muß es ein b_i mit $b_i > 0$ geben. Hierbei kann man ohne Einschränkung der

Allgemeinheit annehmen, daß $b_1 = \text{Max}(b_1, b_2, \dots, b_s)$ ist. Aus der Kongruenz (2.1) erhält man ohne weiteres:

$$(2.2) \quad \sum_{i=1}^s \pi^{b_1} A_i f_i \equiv \partial(\pi^{b_1} h) \quad \text{mod } \mathfrak{P}^a,$$

wo $\pi^{b_1} h$ sicher eine normale 1-Kokette von $\mathfrak{D}/\mathfrak{v}$ über R_a wird. Da $\pi^{b_1} A_i \equiv 0 \text{ mod } \mathfrak{P}^{e_i}$ ($i = 1, 2, \dots, s$) sind, so gibt es eine normale 1-Kokette g von $\mathfrak{D}/\mathfrak{v}$ über R_∞ derart, daß

$$(2.3) \quad \sum_{i=1}^s \pi^{b_1} A_i f_i = \partial g.$$

(Man beachte, daß für jedes i ($1 \leq i \leq s$) $\pi^{b_1} A_i f_i \sim 0$ ($\mathfrak{P}^\infty$) ist.) Weil aber $\pi^{b_1} A_1$ genau durch $\mathfrak{P}^{e_1}$ teilbar ist, so existiert ein Element X_0 aus $\mathfrak{D}$ mit $g(X_0) \not\equiv 0 \text{ mod } \mathfrak{P}^{(1)}$. Ferner folgt aus (2.2) und (2.3) die Kongruenz:

$$\partial(\pi^{b_1} h - g) \equiv 0 \quad \text{mod } \mathfrak{P}^a;$$

d. h. die normale 1-Kokette $\pi^{b_1} h - g$ von $\mathfrak{D}/\mathfrak{v}$ über R_a ist eine Derivation aus $H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{v}; R_a)$.

Nun sei $a > e = \text{Max}(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Dann ist $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{v}; R_\infty)$ $\mathfrak{D}$ -isomorph zu $H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{v}; R_a)^{2)}$; da jede 2-Kohomologiekategorie aus $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{v}; R_\infty)$ durch π^e annulliert ist, so ist es auch jede Derivation aus $H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{v}; R_a)$. Hieraus folgt die Kongruenz:

$$\pi^{e+b_1} h - \pi^e g \equiv 0 \quad \text{mod } \mathfrak{P}^a.$$

Die letzte Kongruenz ergibt aber einen Widerspruch

$$\pi^e g(X_0) \equiv \pi^{b_1+e} h(X_0) \quad \text{mod } \mathfrak{P}^{e+1},$$

weil $\pi^e g(X_0) \not\equiv 0 \text{ mod } \mathfrak{P}^{e+1}$ ist; also muß

$$a \leq e$$

sein. Da nach dem oben Bewiesenen $a \geq e$ ist, so gilt

$$a = e.$$

Hilfssatz 3. Es sei $f_1, f_2, \dots, f_n$ eine Kozyklenbasis von

1) M III, S. 448—449, Zusatz.

2) M III, S. 451, Satz 2.

$H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty)$ und e_i ($1 \leq i \leq n$) die $\mathfrak{D}$ -Länge von f_i in $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty)$. Dann ist $e = \text{Max}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ die kleinste natürliche Zahl von der Art, daß für jede natürliche Zahl m mit $m \geq e$ $f_1, f_2, \dots, f_n$ $\mathfrak{D}$ -unabhängig bzw. von der $\mathfrak{D}$ -Länge $e_1, e_2, \dots, e_n$ in $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$ sind aber für $m < e$ nicht mehr so in $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$.

Mit Hilfe von Hilfssatz 2 und Hilfssatz 3 beweist man folgenden

Zusatz zu Hilfssatz 3. Es sei $f_1, f_2, \dots, f_n$ eine Kozyklenbasis von $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty)$ und e_i ($1 \leq i \leq n$) sei die $\mathfrak{D}$ -Länge von f_i in $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty)$. Setzt man dann $e = \text{Max}(e_1, e_2, \dots, e_n)$, so ist für jede natürliche Zahl m mit $m \geq e$ die normale 2-Kohomologiegruppe $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$ $\mathfrak{D}$ -isomorph zu $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty)$, und $f_1, f_2, \dots, f_n$ bilden eine Kozyklenbasis von $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$; ferner besitzen $f_1, f_2, \dots, f_n$ bzw. die $\mathfrak{D}$ -Länge $e_1, e_2, \dots, e_n$ in $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$.

Es sei $f_1, f_2, \dots, f_n$ wieder eine Kozyklenbasis von $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty)$. Dann kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit (nötigenfalls durch geeignete Numerierung) annehmen, daß die $\mathfrak{D}$ -Längen e_i von den f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) in $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty)$ auf folgende Weise angeordnet sind:

$$e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_n = e = \text{Max}(e_1, e_2, \dots, e_n).$$

Für eine nicht-negative, ganze rationale Zahl ν mit $e > \nu$ sei

$$e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_p < e - \nu \leq e_{p+1} \leq \dots \leq e_n.$$

Dabei kann auch $p + 1 = 1$ oder $p + 1 = n$ sein. Dann wollen wir zeigen, daß in $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_{e-\nu})$ $f_1, f_2, \dots, f_p$ bzw. die $\mathfrak{D}$ -Länge $e_1, e_2, \dots, e_p$ besitzen, aber die $\mathfrak{D}$ -Längen von $f_{p+1}, f_{p+2}, \dots, f_n$ gleich $e - \nu$ sind, und daß $f_1, f_2, \dots, f_n$ in $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_{e-\nu})$ $\mathfrak{D}$ -unabhängig sind. Da diese Tatsache nach Zusatz zu Hilfssatz 3 für $\nu = 0$ sicher richtig ist, so wollen wir annehmen, daß die obige Tatsache für ν ($e - 1 > \nu$) richtig ist. Dann soll man beweisen, daß in $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_{e-\nu-1})$ $f_1, f_2, \dots, f_p$ bzw. die $\mathfrak{D}$ -Länge $e_1, e_2, \dots, e_p$ und $f_{p+1}, f_{p+2}, \dots, f_n$ bzw. die $\mathfrak{D}$ -Länge $e - \nu - 1$ besitzen, und daß $f_1, f_2, \dots, f_n$ in $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_{e-\nu-1})$ $\mathfrak{D}$ -unabhängig sind.

Nun sei

$$(2.4) \quad \sum_{i=1}^p X_i f_i + \sum_{j=p+1}^n X_j f_j \sim 0 \quad (\mathfrak{P}^{e-\nu-1}),$$

wo die X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) Elemente aus $\mathfrak{D}$ bezeichnen. Hier kann

man

$$X_i = \pi^{e_i - u_i} X'_i, \quad X'_i \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}} \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

und

$$X_j = \pi^{e - \nu - 1 - u_j} X'_j, \quad X'_j \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}} \quad (j = p+1, p+2, \dots, n)$$

setzen. Wenn dabei $X_i = 0$ oder $X_j = 0$ ist, so setze man $u_i = -\infty$ oder $u_j = -\infty$, indem man unter π^∞ das Nullelement versteht¹⁾. Nach (2.4) existiert eine normale 1-Kokette g von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $R_{e-\nu-1}$ derart, daß die Kongruenz

$$\sum_{i=1}^p \pi^{e_i - u_i} X'_i f_i + \sum_{j=p+1}^n \pi^{e - \nu - 1 - u_j} X'_j f_j \equiv \partial g \pmod{\mathfrak{P}^{e - \nu - 1}}$$

gilt. Hieraus folgt ohne weiteres:

$$(2.5) \quad \sum_{i=1}^p \pi^{e_i - u_i + 1} X'_i f_i + \sum_{j=p+1}^n \pi^{e - \nu - u_j} X'_j f_j \equiv \partial(\pi g) \pmod{\mathfrak{P}^{e - \nu}};$$

da πg sicher eine normale 1-Kokette von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $R_{e-\nu}$ ist, so schließt man aus (2.5) nach Induktionsannahme:

$$e_i - u_i + 1 \geq e_i \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad \text{und} \quad e - \nu - u_j \geq e - \nu \\ (j = p+1, p+2, \dots, n).$$

Dies zeigt aber, daß $u_i \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, p$) und $u_j \leq 0$ ($j = p+1, p+2, \dots, n$) sind; d. h. es ist $\text{Max}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \text{Max}(u_1, u_2, \dots, u_p) \leq 1$. Ferner folgt aus (2.5):

$$(2.6) \quad \sum_{i=1}^p \pi^{e_i - u_i + 1} X'_i f_i \equiv \partial(\pi g) \pmod{\mathfrak{P}^{e - \nu}}.$$

Da $\pi^{e_i} f_i \sim 0$ ($\mathfrak{P}^\infty$) ($i = 1, 2, \dots, n$) sind, so existieren normale 1-Koketten g_i ($i = 1, 2, \dots, n$) von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_∞ so, daß

$$\pi^{e_i} f_i = \partial g_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

sind. Dabei bilden $\pi^{e_i - e_l} g_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) eine $\mathfrak{O}$ -Basis von $H_1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_e)$ und die $\mathfrak{O}$ -Länge von $\pi^{e_i - e_l} g_i$ ($1 \leq i \leq n$) in $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_e)$ ist gleich e_i ²⁾.

Nun nehmen wir an, daß $\text{Max}(u_1, u_2, \dots, u_n) = 1$ und für ein geeignetes l ($1 \leq l \leq p$) $u_l = 1$ ist. Dann folgt aus (2.6):

-
- 1) Man definiere $-(-\infty) = \infty$ und $a + \infty = \infty$ für eine ganze rationale Zahl a .
2) M III, S. 451, Satz 2.

$$\partial(X'_i g_i + \sum_{i \neq t}^p X'_i \pi^{-u_i+1} g_i - \pi g) \equiv 0 \quad \text{mod } \mathfrak{P}^{e-\nu};$$

d. h. $X'_i g_i + \sum_{i \neq t}^p X'_i \pi^{-u_i+1} g_i - \pi g$ ist eine Derivation von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $R_{e-\nu}$, also ist $\pi^\nu X'_i g_i + \sum_{i \neq t}^p X'_i \pi^{\nu+1-u_i} g_i - \pi^{\nu+1} g$ eine Derivation aus $H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_e)$. Da die $\pi^{e-e_i} g_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) eine $\mathfrak{D}$ -Basis von $H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_e)$ bilden, so gilt die Kongruenz:

$$\begin{aligned} \pi^\nu X'_i g_i + \sum_{i \neq t}^p X'_i \pi^{\nu+1-u_i} g_i - \pi^{\nu+1} g \\ \equiv \sum_{i=1}^n Y_i \pi^{e-e_i} g_i \quad \text{mod } \mathfrak{P}^e, \end{aligned}$$

wo die Y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) Elemente aus $\mathfrak{D}$ bezeichnen. Hieraus schließt man:

$$\begin{aligned} (2.7) \quad h &= (\pi^\nu X'_i - Y_i \pi^{e-e_i}) g_i + \sum_{i \neq t}^p (X'_i \pi^{\nu+1-u_i} - Y_i \pi^{e-e_i}) g_i \\ &\quad - \sum_{j=p+1}^n Y_j \pi^{e-e_j} g_j \equiv \pi^{\nu+1} g \quad \text{mod } \mathfrak{P}^e. \end{aligned}$$

Dabei ist $e - e_i > e - (e - \nu) = \nu$, also ist

$$\pi^\nu X'_i - Y_i \pi^{e-e_i} \not\equiv 0 \quad \text{mod } \mathfrak{P}^{\nu+1}.$$

Daher existiert ein Element X_0 aus $\mathfrak{D}$ mit $h(X_0) \not\equiv 0 \text{ mod } \mathfrak{P}^{\nu+1}$. Wegen $e > \nu$ muß nach (2.7)

$$h(X_0) \equiv \pi^{\nu+1} g(X_0) \equiv 0 \quad \text{mod } \mathfrak{P}^{\nu+1}$$

sein, was aber ein Widerspruch ist. Daher ist $\text{Max}(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$; dies besagt aber, daß in (2.4)

$$x_i \equiv 0 \quad \text{mod } \mathfrak{P}^{e_i} \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

und

$$x_j \equiv 0 \quad \text{mod } \mathfrak{P}^{e-\nu-1} \quad (j = p+1, p+2, \dots, n)$$

sind, w. z. b. w.

Wenn man also die f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) als 2-Kozyklen von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $R_{e-\nu}$ betrachtet, so erzeugen die f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) einen $\mathfrak{D}$ -Untermodul $H_1^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_{e-\nu})$ von $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_{e-\nu})$, und die $\mathfrak{D}$ -Länge von $H_1^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_{e-\nu})$

1) M III, S. 448–449, Zusatz.

ist gleich $\sum_{i=1}^p e_i + (n - p)(e - \nu)$. Somit ist bewiesen :

Satz 3. Es sei $f_1, f_2, \dots, f_n$ eine Kozyklenbasis von $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty)$ und e_i ($1 \leq i \leq n$) die $\mathfrak{D}$ -Länge von f_i in $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty)$. Setzt man dann für eine natürliche Zahl m mit $m \leq \text{Max}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ $l_i = \text{Min}(e_i, m)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), so besitzen $f_1, f_2, \dots, f_n$ bzw. die $\mathfrak{D}$ -Länge $l_1, l_2, \dots, l_n$ in $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$. Ferner erzeugen die f_i ($i = 1, 2, \dots, n$), betrachtet als 2-Kozyklen von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über R_m , einen $\mathfrak{D}$ -Untermodul von $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$ mit der $\mathfrak{D}$ -Länge $\sum_{i=1}^n l_i$.

§ 3. Struktur der Derivationsmoduln. Es sei $f_1, f_2, \dots, f_n$ eine Kozyklenbasis von $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty)$ und e_i ($1 \leq i \leq n$) die $\mathfrak{D}$ -Länge von f_i in $H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_\infty)$. Ferner sei $\pi \in \mathfrak{D}$ ein Primelement des nicht-trivialen Primideales $\mathfrak{P}$ aus $\mathfrak{D}$. Dann existiert für jedes i ($1 \leq i \leq n$) eine normale 1-Kokette g_i von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über R_∞ mit $\pi^e f_i = \partial g_i$. Wie in § 2 bemerkt ist, bilden

$$\pi^{e-e_1} g_1, \pi^{e-e_2} g_2, \dots, \pi^{e-e_n} g_n$$

eine $\mathfrak{D}$ -Basis von $H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_e)$. Im folgenden nehmen wir stets an, daß $e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_n$ sind.

Satz 4. Es sei ν eine nicht-negative, ganze rationale Zahl mit $\nu < e$, und $e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_p < e - \nu \leq e_{p+1} \leq \dots \leq e_n$. Dann bilden $\pi^{e-\nu-e_1} g_1, \pi^{e-\nu-e_2} g_2, \dots, \pi^{e-\nu-e_p} g_p$ und $g_{p+1}, g_{p+2}, \dots, g_n$ zusammen eine $\mathfrak{D}$ -Basis von $H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_{e-\nu})$. Dabei besitzen $\pi^{e-\nu-e_1} g_1, \pi^{e-\nu-e_2} g_2, \dots, \pi^{e-\nu-e_p} g_p$ bzw. die $\mathfrak{D}$ -Länge $e_1, e_2, \dots, e_p$ und $g_{p+1}, g_{p+2}, \dots, g_n$ die gleichen $\mathfrak{D}$ -Längen $e - \nu$ in $H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_{e-\nu})$.

Beweis. Für jede natürliche Zahl j mit $p+1 \leq j \leq n$ gilt :

$$\partial g_j = \pi^e f_j \equiv 0 \quad \text{mod } \mathfrak{P}^{e-\nu};$$

also sind die g_j ($j = p+1, p+2, \dots, n$) Derivationen aus $H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_{e-\nu})$. Da zu jedem g_j ($p+1 \leq j \leq n$) ein Element Z_j aus $\mathfrak{D}$ mit $g_j(Z_j) \not\equiv 0 \text{ mod } \mathfrak{P}$ existiert¹⁾, so sind die $\mathfrak{D}$ -Längen von den g_j ($j = p+1, p+2, \dots, n$) in $H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_{e-\nu})$ gleich $e - \nu$.

Da offenbar der Satz für $\nu=0$ richtig ist²⁾, so nehmen wir an, daß der

1) M III, S. 448—449, Zusatz.

2) M III, S. 451, Satz 2.

Satz für ν mit $e - 1 > \nu$ richtig ist. Es gelte nun eine Kongruenz:

$$\sum_{i=1}^p X_i \pi^{e-\nu-1-e_i} g_i + \sum_{j=p+1}^n X_j g_j \equiv 0 \quad \text{mod } \mathfrak{P}^{e-\nu-1},$$

wo die X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) Elemente aus $\mathfrak{O}$ bezeichnen. Dann erhält man durch Multiplikation mit π :

$$\sum_{i=1}^p X_i \pi^{e-\nu-e_i} g_i + \sum_{j=p+1}^n \pi X_j g_j \equiv 0 \quad \text{mod } \mathfrak{P}^{e-\nu};$$

aus Induktionsannahme schließt man ohne weiteres:

$$X_i \equiv 0 \quad \text{mod } \mathfrak{P}^{e_i} \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

und

$$X_j \equiv 0 \quad \text{mod } \mathfrak{P}^{e-\nu-1} \quad (j = p+1, p+2, \dots, n),$$

weil $\pi X_j \equiv 0 \text{ mod } \mathfrak{P}^{e-\nu}$ ($j = p+1, p+2, \dots, n$) sein müssen. Dies zeigt aber, daß in $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_{e-\nu-1})$ $\pi^{e-\nu-1-e_1} g_1, \pi^{e-\nu-1-e_2} g_2, \dots, \pi^{e-\nu-1-e_p} g_p$ bzw. die $\mathfrak{O}$ -Länge $e_1, e_2, \dots, e_p$ und $g_{p+1}, g_{p+2}, \dots, g_n$ die gleichen $\mathfrak{O}$ -Längen $e - \nu - 1$ besitzen, und daß $\pi^{e-\nu-1-e_1} g_1, \pi^{e-\nu-1-e_2} g_2, \dots, \pi^{e-\nu-1-e_p} g_p, g_{p+1}, \dots, g_n$ in $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_{e-\nu-1})$ $\mathfrak{O}$ -unabhängig sind.

Nun sei D eine Derivation aus $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_{e-\nu-1})$. Dann ist πD sicher eine Derivation aus $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_{e-\nu})$. Da nach Induktionsannahme die $\pi^{e-\nu-e_i} g_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$) und die g_j ($j = p+1, p+2, \dots, n$) zusammen eine $\mathfrak{O}$ -Basis von $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_{e-\nu})$ bilden, so existiert ein Elementsystem $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ mit

$$(3.1) \quad \pi D \equiv \sum_{i=1}^p Y_i \pi^{e-\nu-e_i} g_i + \sum_{j=p+1}^n Y_j g_j \quad \text{mod } \mathfrak{P}^{e-\nu}.$$

Wenn dabei eines von den Y_j ($j = p+1, p+2, \dots, n$) nicht durch $\mathfrak{P}$ teilbar ist, so existiert ein Element X_0 aus $\mathfrak{O}$ mit

$$\sum_{i=1}^p Y_i \pi^{e-\nu-e_i} g_i(X_0) + \sum_{j=p+1}^n Y_j g_j(X_0) \not\equiv 0 \quad \text{mod } \mathfrak{P}^{(1)};$$

dies ergibt einen Widerspruch, weil nach (3.1)

$$\sum_{i=1}^p Y_i \pi^{e-\nu-e_i} g_i(X_0) + \sum_{j=p+1}^n Y_j g_j(X_0) \equiv \pi D(X_0) \equiv 0 \quad \text{mod } \mathfrak{P}$$

sein müsste. Daher sind die Y_j ($j = p+1, p+2, \dots, n$) alle durch $\mathfrak{P}$ teilbar. Hieraus schließt man wegen (3.1):

1) M III, S. 448—449, Zusatz.

$$D \equiv \sum_{i=1}^p Y_i \pi^{e-v-1-e_i} g_i + \sum_{j=p+1}^n (\pi^{-1} Y_j) g_j \quad \text{mod } \mathfrak{P}^{v-v-1};$$

d. h. die $\pi^{e-v-1-e_i} g_i (i = 1, 2, \dots, p)$ und die $g_j (j = p+1, p+2, \dots, n)$ bilden zusammen eine $\mathfrak{O}$ -Basis von $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{p}; R_{e-v-1})$, w. z. b. w.

§ 4. Zusammenhang zwischen Derivationsmodul und 2-Kohomologiegruppe. $f_1, f_2, \dots, f_n$ sei eine Kozyklenbasis von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{p}; R_\infty)$ und $e_i (1 \leq i \leq n)$ die $\mathfrak{O}$ -Länge von f_i in $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{p}; R_\infty)$. Ferner sei $\pi (\in \mathfrak{O})$ ein Primelement des nicht-trivialen Primideals $\mathfrak{P}$ aus $\mathfrak{O}$. Dann existiert zu jeder natürlichen Zahl i mit $1 \leq i \leq n$ eine normale 1-Kokette g_i von $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}$ über R_∞ mit $\pi^{e_i} f_i = \delta g_i$. Ist nun m eine beliebige natürliche Zahl, so setze man $m_i = \text{Max}(m, e_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ und betrachte die $\pi^{m_i-e_i} g_i (i = 1, 2, \dots, n)$. Dann bilden die $\pi^{m_i-e_i} g_i (i = 1, 2, \dots, n)$ für $m \geq \text{Max}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ nach Satz 2 von M III und für $m < \text{Max}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ nach Satz 4 eine $\mathfrak{O}$ -Basis von $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{p}; R_m)$. Ferner ist die $\mathfrak{O}$ -Länge von $\pi^{m_i-e_i} g_i (1 \leq i \leq n)$ in $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{p}; R_m)$ gleich l_i , wo $l_i = \text{Min}(m, e_i)$ gesetzt ist. Betrachtet man nun $f_1, f_2, \dots, f_n$ als 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}$ über R_m , so bilden die $f_i (i = 1, 2, \dots, n)$ eine $\mathfrak{O}$ -Basis des durch $f_1, f_2, \dots, f_n$ erzeugten $\mathfrak{O}$ -Untermoduls $H_i^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{p}; R_m)$ von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{p}; R_m)$, und die $\mathfrak{O}$ -Länge von $f_i (1 \leq i \leq n)$ in $H_i^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{p}; R_m)$ ist gleich l_i (nach Zusatz zu Hilfssatz 3 und Satz 3).

Nun ordnen wir einem normalen 2-Kozyklus $\sum_{i=1}^n A_i f_i (A_i \in \mathfrak{O}; i = 1, 2, \dots, n)$ von $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}$ über R_m die Derivation $\sum_{i=1}^n A_i \pi^{m_i-e_i} g_i$ aus $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{p}; R_m)$ zu. Weil aus $\sum_{i=1}^n A_i f_i \sim 0 (\mathfrak{P}^m)$ die Kongruenzen $A_i \equiv 0 \text{ mod } \mathfrak{P}^{l_i} (i = 1, 2, \dots, n)$ folgen, so gilt

$$\sum_{i=1}^n A_i \pi^{m_i-e_i} g_i \equiv 0 \quad \text{mod } \mathfrak{P}^m.$$

Umgekehrt folgt aus $\sum_{i=1}^n A_i \pi^{m_i-e_i} g_i \equiv 0 \text{ mod } \mathfrak{P}^m$ offenbar :

$$\sum_{i=1}^n A_i f_i \sim 0 \quad (\mathfrak{P}^m).$$

Hieraus schließt man ohne weiteres, daß die obige Zuordnung einen $\mathfrak{O}$ -Isomorphismus von $H_i^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{p}; R_m)$ auf $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{p}; R_m)$ ergibt; also gilt folgende $\mathfrak{O}$ -Längenrelation :

$$L(H_i^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{p}; R_m)) = L(H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{p}; R_m)).$$

Da nach Satz 1 $L(H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{p}; R_m)) = L(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{p}; R_m))$ besteht, so muß $L(H_i^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{p}; R_m)) = L(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{p}; R_m))$ sein, woraus sofort die Gleichung

$$H_1^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m) = H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m)$$

folgt. Aus dem eben Bewiesenen und aus Hilfssatz 1 folgt:

Satz 5. *Für eine nicht-negative, ganze rationale Zahl m gilt stets folgende $\mathfrak{D}$ -Isomorphierelation:*

$$H^2(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m) \cong H^1(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; R_m).$$

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
OKAYAMA UNIVERSITY

(Received July 24, 1956)