Mathematical Journal of Okayama University

Volume 11, *Issue* 1 1962 *Article* 4

MARCH 1962

Uber die Ableitungen der schlichten Funktionen (I)

Ken'iti Koseki*

*Universität Zu Okayama

ÜBER DIE ABLEITUNGEN DER SCHLICHTEN FUNKTIONEN (I)

KEN'ITI KOSEKI

Es sei

$$\varphi=f(z)=z+a_2z^2+\cdots\quad+a_nz^n+\cdots \tag{1}$$

eine innerhalb des Einheitskreises $|z|<1$ reguläre und schlichte Funktion. In dieser Arbeit will ich die Koeffizienten der Funktion $\frac{f''(z)}{f'(z)}$ behandeln.

Aus (1) bekommen wir ohne weiteres

$$\left.\begin{aligned} f'(z)&=1+2a_2z+\cdots\quad+na_nz^{n-1}+\cdots\quad=1+A\\ f''(z)&=2a_2+3\cdot 2a_3z+\cdots\quad+n(n-1)a_nz^{n-2}+\cdots\end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Daraus folgt

$$\frac{f''(z)}{f'(z)}=\{2a_2+3\cdot 2a_3z+\cdots\quad+n(n-1)a_nz^{n-2}+\cdots\}\ \{1-A+A^2-\cdots$$
$$+(-1)^nA^n+\cdots\}. \tag{3}$$

Anderseits können wir aus $A=\sum_{i=2}^{\infty}ia_iz^{i-1}$ leicht berechnen

$$\begin{aligned} A^2&=(2a_2z+\cdots\quad+ia_iz^{i-1}+\cdots\quad+na_nz^{n-1}+\cdots\quad)^2\\ &=(2\cdot 2a_2a_2)z^2+(2\cdot 3a_2a_3+3\cdot 2a_3a_2)z^3+\cdots+\{2ia_2a_i+3(i-1)a_3a_{i-1}\\ &\quad+\cdots+i2a_ia_2\}z^i+\cdots=\sum_{i=2}^{\infty}\Big\{2ia_2a_i+3(i-1)a_3a_{i-1}+\cdots+i2a_ia_2\Big\}z^i\\ &=\sum_{i=2}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{j_1=2\\(j_1+j_2=i+2)}}^{i}\sum_{j_2=2}^{i}j_1j_2a_{j_1}a_{j_2}\Big)z^i. \end{aligned} \tag{4}$$

Wir nehmen nun an, dass es im allgemeinen

$$A^p=\sum_{i=p}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{j_p=2\\(j_1+j_2+\cdots}}^{i-p+2}\sum_{j_{p-1}=2}^{i-p+2}\cdots\sum_{\substack{j_1=2\\+j_p=i+p)}}^{i-p+2}j_1j_2\cdots\quad j_pa_{j_1}a_{j_2}\cdots\ a_{j_p}\Big)z^i \tag{5}$$

besteht. Daraus folgt

$$A^{p+1}=A^p\cdot A=\sum_{i=p}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{j_p=2\\(j_1+j_2+\cdots}}^{i-p+2}\sum_{j_{p-1}=2}^{i-p+2}\cdots\sum_{\substack{j_1=2\\+j_p=i+p)}}^{i-p+2}j_1j_2\cdots\quad j_pa_{j_1}a_{j_2}\cdots\ a_{j_p}\Big)z^i\cdot$$

$$\sum_{i=2}^{\infty}ia_iz^{i-1}=\sum_{i=p+1}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{j_{p+1}=2\\(j_1+j_2+\cdots}}^{i-p+1}\sum_{j_p=2}^{i-p+1}\cdots\sum_{\substack{j_1=2\\+j_{p+1}=i+p+1)}}^{i-p+1}j_1j_2\cdots\quad j_{p+1}a_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_{p+1}}\Big)z^i.$$

Folglich gilt die Formel (5) für alle $p \geqq 2$.

Wir wollen nun die Koeffizient von z^n der Taylorschen Entwickelung von

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = 2a_2 + C_1 z + \cdots \qquad + C_n z^n + \cdots \tag{6}$$

berechnen. Wir setzen

$$\left.\begin{array}{l}
-\{2\cdot 1\cdot(n+1)a_2 a_{n+1} + 3\cdot 2\cdot n a_3 a_n + \cdots \quad + (n+1)n 2 a_{n+1} a_2\} = \\
-\sum\limits_{\substack{j_1=1 \\ (j_1+j_2=n+2)}}^{n} \sum\limits_{j_2=2}^{n+1} (j_1+1) j_1 j_2 a_{j_1+1} a_{j_2}. \\
2\cdot 1\cdot a_2 \sum\limits_{\substack{j_2=2 \\ (j_1+j_2=n+2)}}^{n} \sum\limits_{j_1=2}^{n} j_1 j_2 a_{j_1} a_{j_2} + 3\cdot 2 a_3 \sum\limits_{\substack{j_2=2 \\ (j_1+j_2=n+1)}}^{n-1} \sum\limits_{j_1=2}^{n-1} j_1 j_2 a_{j_1} a_{j_2} + 4\cdot 3 a_4 \sum\limits_{\substack{j_2=2 \\ (j_1+j_2=n)}}^{n-2} \sum\limits_{j_1=2}^{n-2} j_1 j_2 a_{j_1} a_{j_2} \\
+ \cdots \quad + n(n-1) a_n \sum\limits_{\substack{j_2=2 \\ (j_1+j_2=4)}}^{2} \sum\limits_{j_1=2}^{2} j_1 j_2 a_{j_1} a_{j_2} = \sum\limits_{\substack{j_3=1 \\ (j_1+j_2+j_3=n+3)}}^{n-1} \sum\limits_{j_2=2}^{n} \sum\limits_{j_1=2}^{n} (j_3+1) j_3 j_1 j_2 a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3+1}. \\
-\{2\cdot 1\cdot a_2 \sum\limits_{\substack{j_3=2 \\ (j_1+j_2+j_3=n+3)}}^{n-1} \sum\limits_{j_2=2}^{n-1} \sum\limits_{j_1=2}^{n-1} j_1 j_2 j_3 a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3} + 3\cdot 2\cdot a_3 \sum\limits_{\substack{j_3=2 \\ (j_1+j_2+j_3=n+2)}}^{n-2} \sum\limits_{j_2=2}^{n-2} \sum\limits_{j_1=1}^{n-2} j_1 j_2 j_3 a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3} \\
+ \cdots \quad + (n-1)(n-2) a_{n-1} \sum\limits_{\substack{j_3=2 \\ (j_1+j_2+j_3=6)}}^{2} \sum\limits_{j_2=2}^{2} \sum\limits_{j_1=2}^{2} j_1 j_2 j_3 a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3} = -\sum\limits_{\substack{j_4=1 \\ (j_1+j_2+j_3+j_4=n+4)}}^{n-2} \sum\limits_{j_3=2}^{n-1} \sum\limits_{j_2=2}^{n-1} \sum\limits_{j_1=2}^{n-1} \\
(j_4+1) j_4 j_1 j_2 j_3 a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3} a_{j_4+1}. \\
\vdots \\
(-1)^n \Big\{ 2a_2 \sum\limits_{j_n=2}^{2} \sum\limits_{j_{n-1}=2}^{2} \cdots \sum\limits_{j_1=2}^{2} j_1 j_2 \cdots \quad j_n a_{j_1} a_{j_2} \cdots a_{j_n} \Big\} = (-1)^n \\
\sum\limits_{j_{n+1}=1}^{1} \sum\limits_{j_n=2}^{2} \cdots \sum\limits_{j_1=2}^{2} j_1 j_2 \cdots j_n (j_{n+1}+1) j_{n+1} \, a_{j_1} a_{j_2} \cdots \; a_{j_{n+1}+1}.
\end{array}\right\} \tag{7}$$

Nach (3) und (7) ist es die Koeffizient

$$C_n = (n+2)(n+1)a_{n+2} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \Big(\sum_{\substack{j_{k+1}=1 \\ (j_1+j_2+\cdots \quad + j_{k+1}=n+k+1)}}^{n-k+1} \sum_{j_k=2}^{n-k+2} \cdots \sum_{j_1=2}^{n-k+2} j_1 j_2 \cdots$$

$$j_k j_{k+1} (j_{k+1}+1) a_{j_1} a_{j_2} \cdots \quad a_{j_k} a_{j_{k+1}+1} \Big). \tag{8}$$

Wenn wir $\rho = e^{i\theta}$ und $\frac{1}{\rho} f(\rho z) = g(z)$ setzen, so ist die Koeffizient von z^n von $g(z)$ gleich der $\rho^{n+1} C_n$. Daher können wir das Maximum der reellen Teile von C_n statt das Maximum von $|C_n|$ behandeln.

Nun bilden[1)] die Koeffizienten $(d_2, d_3, \cdots, d_{n+2})$ von allen normierten, regulären und schlichten Funktionen $h(z) = z + d_2 z^2 + \cdots + d_n z^n + \cdots$ eine Menge S in dem $2(n+1)$ dimensionalen Euklidischen Raum, die mit der

1). A. C. Schaeffer and D. C. Spencer. Coefficient Regions For Schlicht Functions. S. 12.

$2(n+1)$ dimensionalen Kugel homöomorph ist. Da die C_n in der Formel (8) ein Polynom von $a_2, a_3, \cdots a_{n+2}$ ist, so nimmt der $\Re C_n$ seines Maximum an der Begrenzung von S an.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass die Funktion $f(z)$ in der Formel (1) das Maximum zu $\Re C_n$ gibt. Das Bildgebiet von der Kreisscheibe $|z|<1$ durch die Funktion $\varphi=f(z)$ bezeichnen wir mit D. Es ist aber wohlbekannt[2)], dass $D=$ die volle-φ-Ebene $-$ einige analytischen Kurven ist.

Folglich gibt[3)] es für die $\varphi=f(z)$ eine Schar von den schlichten Funktionen $\varphi=g_n(z, t) = e^t\{z+g_1(t)z^2+\cdots+g_{n-1}(t)z^n+\cdots\}$ in $0\leqq t<\infty$, welche der folgenden Löwnerschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial g_n(z, t)}{\partial t}=\frac{\partial g_n(z, t)}{\partial z}z\frac{1+\kappa(t)z}{1-\kappa(t)z} \tag{9}$$

mit der Anfangsbedingung

$$g_n(z, 0)=f(z) \tag{10}$$

genügt, wo $\kappa(t)$ eine stuckweise stetige Funktion in $0\leqq t<\infty$ darstellt und $|\kappa(t)|=1$ ist.

Es gilt aber für $n\geqq 3$ nach meiner Formel[4)]

$$\begin{aligned}
g_n(t)=e^{nt}\Bigg[&\Bigg\{\int_s^t 2\kappa^n(s_1)e^{-ns_1}ds_1+\sum_{i=2}^{n}\Bigg(\sum_{p_1=i}^{n}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1}p_{i-1}\\
&\int_s^t 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots\\
&\int_s^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i ds_{i-1}\cdots ds_1\Bigg)\Bigg\}+\sum_{\mu=1}^{n-2}(\mu+1)g_\mu(s)e^{-\mu s}\\
&\Bigg\{\int_s^t 2\kappa^{n-\mu}(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}ds_1+\sum_{i=\mu+2}^{n}\Bigg(\sum_{p_1=i}^{n}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{i-(\mu+1)}=\mu+2}^{p_{i-(\mu+2)}-1}p_{i-(\mu+1)}\\
&\int_s^t 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots\\
&\int_s^{s_{i-(\mu+1)}}2\kappa^{p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s_{i-\mu})e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1))s_{i-\mu}}ds_{i-\mu}\cdots ds_2 ds_1\Bigg)\Bigg\}\\
&+ng_{n-1}(s)e^{-(n-1)s}\int_s^t 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1+g_n(s)e^{-ns}\Bigg].
\end{aligned} \tag{11}$$

Wir setzen nun

---

2). A. C. Schaeffer and D. C. Spencer. a. a. O. S. 144.

3). K. Koseki. ÜBER DIE KOEFFIZIENTEN DER SCHLICHTEN FUKNTIONEN. S. 179.

4). K. Koseki. a. a. O. S. 184.

$$
\left.
\begin{aligned}
&F(\varepsilon)=(n+1)(n+2)\tilde{g}_{n+1}(0)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\Bigl(\sum_{j_{k+1}=1}^{n-k+1}\sum_{j_k=2}^{n-k+2}\sum_{j_{k-1}=2}^{n-k+2}\cdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (j_1+j_2+\cdots+j_k+j_{k+1}=n+k+1) \\
&\sum_{j_1=2}^{n-k+2} j_1j_2\cdots\ j_kj_{k+1}(j_{k+1}+1)\tilde{g}_{j_1-1}(0)\ \ \tilde{g}_{j_2-1}(0)\cdots\ \ \tilde{g}_{j_k-1}(0)\tilde{g}_{j_{k+1}}(0). \\
&\qquad \tilde{g}_n(0)=\int_s^0 2\tilde{\kappa}^n(s_1)e^{-ns_1}ds_1+\sum_{i=2}^{n}\Bigl(\sum_{p_1=i}^{n}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{i-1}=3}^{p_{i-2}-1}p_{i-1} \\
&\int_s^0 2\tilde{\kappa}^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\tilde{\kappa}^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots \\
&\int_s^{s_{i-1}}2\tilde{\kappa}^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots\ ds_1\Bigr)+\sum_{\mu=1}^{n-2}(\mu+1)g_\mu(s)e^{-\mu s} \\
&\Bigl\{\int_s^0 2\tilde{\kappa}^{n-\mu}(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}ds_1+\sum_{i=\mu+2}^{n}\Bigl(\sum_{p_1=i}^{n}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{i-(\mu+1)}=\mu+2}^{p_{i-(\mu+2)}-1}p_{i-(\mu+1)} \\
&\int_s^0 2\tilde{\kappa}^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\tilde{\kappa}^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots \\
&\int_s^{s_{i-(\mu+1)}}2\tilde{\kappa}^{p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s_{i-\mu})e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1))s_{i-\mu}}ds_{i-\mu}\cdots\ ds_2ds_1\Bigr)\Bigr\} \\
&+ng_{n-1}(s)e^{-(n-1)s}\int_s^0 2\tilde{\kappa}(s_1)e^{-s_1}ds_1+g_n(s)e^{-ns},\quad \text{für } n\geqq 3, \\
&\qquad \tilde{g}_2(0)=\int_s^0 2\tilde{\kappa}_2(s_1)e^{-2s_1}ds_1+2\int_s^0 2\tilde{\kappa}(s_1)e^{-s_1}\int_s^{s_1}2\tilde{\kappa}(s_2)e^{-s_2}ds_2ds_1+2g_1(s)e^{-s} \\
&\int_s^0 2\tilde{\kappa}(s_1)e^{-s_1}ds_1+g_2(s)e^{-2s}, \\
&\qquad \tilde{g}_1(0)=\int_s^0 2\tilde{\kappa}(s_1)e^{-s_1}ds_1+g_1(s)e^{-s}, \\
&\qquad \kappa(t)=e^{i\varphi(t)}\ \text{und}\ \tilde{\kappa}(t)=e^{i(\varphi(t)+\varepsilon\eta(t))},
\end{aligned}
\right\}\quad (12)
$$

wo $\varphi(t)$ die bestimmte reelle Funktion und $\eta(t)$ eine beliebige reelle stetige Funktion darstellt und ε eine reelle Veränderliche ist.

Aus (12) folgt es ohne weiteres

$$
\begin{aligned}
&\frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon}=(n+2)(n+1)\frac{d\tilde{g}_{n+1}(0)}{d\varepsilon}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\Bigl[\sum_{j_{k+1}=1}^{n-k+1}\sum_{j_k=2}^{n-k+2}\sum_{j_{k-1}=2}^{n-k+2}\cdots\sum_{j_1=2}^{n-k+2}j_1j_2\cdots \\
&j_kj_{k+1}(j_{k+1}+1)\Bigl\{\frac{d\tilde{g}_{j_1-1}(0)}{d\varepsilon}\cdot\tilde{g}_{j_2-1}(0)\cdots\cdot\tilde{g}_{j_k-1}(0)\cdot\tilde{g}_{j_{k+1}}(0)+\tilde{g}_{j_1-1}(0)\cdot\frac{d\tilde{g}_{j_2-1}(0)}{d\varepsilon}\cdot \\
&\tilde{g}_{j_3-1}(0)\cdots\ \ \cdot\tilde{g}_{j_k-1}(0)\cdot\tilde{g}_{j_k+1}(0)+\cdots+\tilde{g}_{j_1-1}(0)\cdots\ \ \cdot\tilde{g}_{j_{k-1}}(0)\cdot\frac{d\tilde{g}_{j_{k+1}}(0)}{d\varepsilon}\Bigr]. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Der reelle Teil von $\dfrac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon}$ muss am Punkte $\varepsilon=0$ den Wert 0 annehmen.

Es ist aber nach meiner Arbeit[5)]

5). K. Koseki. a. a. O. S. 185.

$$\frac{d\tilde{g}_n(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}} = i\Big[\int_s^0 2\kappa^n(s_1)\cdot n\eta(s_1)e^{-ns_1}ds_1 + \sum_{t=2}^{n}\Big\{\sum_{p_1=t}^{n} p_1 \sum_{p_2=t-1}^{p_1-1} p_2 \cdots \sum_{p_{t-1}=2}^{p_{t-2}-1} p_{t-1}$$

$$\Big(\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)(n-p_1+1)\eta(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots$$

$$\int_s^{s_{t-1}} 2\kappa^{p_{t-1}-1}(s_t)e^{-(p_{t-1}-1)s_t}ds_t\cdots\ ds_1 + \int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}$$

$$\int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)(p_1-p_2)\eta(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots\ \int_s^{s_{t-1}} 2\kappa^{p_{t-1}-1}(s_t)e^{-(p_{t-1}-1)s_t}ds_t\cdots$$

$$ds_1+\cdots\quad + \int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots$$

$$\int_s^{s_{t-1}} 2\kappa^{p_{t-1}-1}(s_t)(p_{t-1}-1)\eta(s_t)e^{-(p_{t-1}-1)s_t}ds_t\cdots\quad ds_1\Big)\Big\} + \sum_{\mu=1}^{n-2}(\mu+1)g_\mu(s)e^{-\mu s}$$

$$\int_s^0 2\kappa^{n-\mu}(s_1)(n-\mu)\eta(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}ds_1 + \sum_{\mu=1}^{n-2}(\mu+1)g_\mu(s)e^{-\mu s}\sum_{t=\mu+2}^{n}\Big\{\sum_{p_1=t}^{n} p_1 \sum_{p_2=t-1}^{p_1-1} p_2\cdots$$

$$\sum_{p_{t-(\mu+1)}=\mu+2}^{p_{t-(\mu+2)}-1} p_{t-(\mu+1)}\Big(\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)(n-p_1+1)\eta(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}$$

$$\int_s^{s_2}\cdots\ \int_s^{s_{t-(\mu+1)}} 2\kappa^{p_{t-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s_{t-\mu})e^{-(p_{t-(\mu+1)}-(\mu+1))s_{t-\mu}}ds_{t-\mu}\cdots\quad ds_2ds_1 +$$

$$\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)(p_1-p_2)\eta(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots$$

$$\int_s^{s_{t-(\mu+1)}} 2\kappa^{p_{t-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s_{t-\mu})e^{-(p_{t-(\mu+1)}-(\mu+1))s_{t-\mu}}ds_{t-\mu}\cdots\quad ds_2ds_1+\cdots$$

$$+\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots$$

$$\int_s^{s_{t-(\mu+1)}} 2\kappa^{p_{t-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s_{t-\mu})(p_{t-(\mu+1)}-(\mu+1))\eta(s_{t-\mu})e^{-(p_{t-(\mu+1)}-(\mu+1))s_{t-\mu}}ds_{t-\mu}\cdots$$

$$ds_2ds_1\Big)\Big\} + ng_{n-1}(s)e^{-(n-1)s}\int_s^0 2\kappa(s_1)\eta(s_1)e^{-s_1}ds_1\Big],\quad \text{für}\quad n\geqq 3, \tag{14}$$

$$\frac{d\tilde{g}_2(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}} = i\Big[\int_s^0 2\kappa^2(s_1)\cdot 2\eta(s_1)e^{-2s_1}ds_1 + 2\int_s^0 2\kappa(s_1)\eta(s_1)e^{-s_1}\int_s^{s_1} 2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2ds_1$$

$$+2\int_s^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}\int_s^{s_1} 2\kappa(s_2)\eta(s_2)e^{-s_2}ds_2ds_1 + 2g_1(s)e^{-s}\int_s^0 2\kappa(s_1)\eta(s_1)e^{-s_1}ds_1, \tag{15}$$

$$\frac{d\tilde{g}_1(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}} = i\int_s^0 2\kappa(s_1)\eta(s_1)e^{-s_1}ds_1. \tag{16}$$

Wenn die s unendlich wächst, so ergibt sich aus (14)

$$\frac{d\tilde{g}_n(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}} = i\Big[\int_\infty^0 2\kappa^n(s_1)n\eta(s_1)e^{-ns_1}ds_1 + \sum_{t=2}^{n}\Big\{\sum_{p_1=t}^{n} p_1 \sum_{p_2=t-1}^{p_1-1} p_2 \cdots \sum_{p_{t-1}=2}^{p_{t-2}-1} p_{t-1}$$

$$\Big(\int_\infty^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)(n-p_1+1)\eta(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_\infty^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_\infty^{s_2}\cdots$$

$$\int_{\infty}^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i \cdots \quad ds_1 + \int_{\infty}^{0} 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}$$

$$\int_{\infty}^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)(p_1-p_2)\eta(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_{\infty}^{s_2}\cdots \quad \int_{\infty}^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i \cdots ds_1 + \cdots$$

$$+\int_{\infty}^{0} 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_{\infty}^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_{\infty}^{s_2}\cdots$$

$$\int_{\infty}^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)(p_{i-1}-1)\eta(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i \cdots ds_1\Big)\Big\}\Big]. \tag{17}$$

Ebenso ergeben sich aus (15) und (16)

$$\frac{d\tilde{g}_2(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}} = i\Big[\int_{\infty}^{0} 2\kappa^2(s_1)\cdot 2\eta(s_1)e^{-2s_1}ds_1 + 2\int_{\infty}^{0} 2\kappa(s_1)\eta(s_1)e^{-s_1}\int_{\infty}^{s_1} 2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2ds_1$$

$$+2\int_{\infty}^{0} 2\kappa(s_1)e^{-s_1}\int_{\infty}^{s_1} 2\kappa(s_2)\eta(s_2)e^{-s_2}ds_2ds_1\Big]. \tag{18}$$

$$\frac{d\tilde{g}_1(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}} = i\int_{\infty}^{0} 2\kappa(s_1)\eta(s_1)e^{-s_1}ds_1. \tag{19}$$

Da der reelle Teil von $\dfrac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}}$ gleich der 0 für alle stetigen Funktionen $\eta(s)$ ist, so können wir nach dem Lebesgueschen Satz die Funktion $\eta(s)$ durch eine neue Funktion $\eta_1(s)$ ersetzen, so dass

$$\eta_1(s) = \eta(s) \quad \text{in } 0 \leqq s < a$$
$$\eta_1(s) = 0 \qquad \text{in } a < s < \infty$$

ist.

Für die $\eta_1(s)$ nimmt die $\dfrac{d\tilde{g}_n(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}}$ die folgende Form an

$$\frac{d\tilde{g}_n(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}} = i\Big[\int_{a}^{0} 2\kappa^n(s_1)n\eta(s_1)e^{-ns_1}ds_1 + \sum_{i=2}^{n}\Big\{\sum_{p_1=i}^{n} p_1 \sum_{p_2=i-1}^{p_1-1} p_2 \cdots \sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1} p_{i-1}$$

$$\Big(\int_{a}^{0} 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)(n-p_1+1)\eta(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_{\infty}^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_{\infty}^{s_2}\cdots$$

$$\int_{\infty}^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i \cdots \quad ds_1 + \int_{a}^{0} 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}$$

$$\int_{a}^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)(p_1-p_2)\eta(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_{\infty}^{s_2}\cdots \quad \int_{\infty}^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i \cdots ds_1 + \cdots$$

$$+\int_{a}^{0} 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_{a}^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_{a}^{s_2}\cdots$$

$$\int_{a}^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)(p_{i-1}-1)\eta(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i \cdots ds_1\Big)\Big\}\Big].$$

Wir differenzieren nun die rechte Seite der obigen Formel, und wir erhalten

$$\frac{d}{da}\left(\frac{d\tilde{g}_n(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}}\right)=-i\Big[2\kappa^n(a)n\eta(a)e^{-na}+\sum_{i=2}^{n}\Big\{\sum_{p_1=i}^{n}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1}p_{i-1}$$
$$\Big(2\kappa^{n-p_1+1}(a)(n-p_1+1)\eta(a)e^{-(n-p_1+1)a}\int_\infty^a 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_\infty^{s_2}\cdots$$
$$\int_\infty^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots\ ds_2+2\kappa^{p_1-p_2}(a)(p_1-p_2)\eta(a)e^{-(p_1-p_2)a}$$
$$\int_\infty^a 2\kappa^{p_2-p_3}(s_3)e^{-(p_2-p_3)s_3}\int_\infty^{s_3}\cdots\quad\int_\infty^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots\ ds_3$$
$$\int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}ds_1+\cdots\quad+2\kappa^{p_{i-1}-1}(a)(p_{i-1}-1)\eta(a)e^{-(p_{i-1}-1)a}$$
$$\int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_a^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_a^{s_2}\cdots$$
$$\int_a^{s_{i-2}}2\kappa^{p_{i-2}-p_{i-1}}(s_{i-1})e^{-(p_{i-2}-p_{i-1})s_{i-1}}ds_{i-1}\cdots\quad ds_2ds_1\Big)\Big\}\Big]. \tag{20}$$

Ebenfalls bekommen wir aus (18) und (19)

$$\frac{d}{da}\left(\frac{d\tilde{g}_2(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}}\right)=-i\Big[2\kappa^2(a)2\eta(a)e^{-2a}+4\kappa(a)\eta(a)e^{-a}\int_\infty^a 2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2$$
$$+4\kappa(a)\eta(a)e^{-a}\int_a^0 2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2\Big]. \tag{21}$$

$$\frac{d}{da}\left(\frac{d\tilde{g}_1(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}}\right)=-i2\kappa(a)\eta(a)e^{-a}. \tag{22}$$

Da wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen können, dass $\eta(a)\neq 0$ ist, so bekommen wir den folgenden

Satz 1. *Es sei*

$$\begin{aligned}\varphi=f(z)&=z+a_2z^2+\cdots\quad+a_nz^n+\cdots\\&=z+g_1(0)z^2+\cdots\quad+g_{n-1}(0)z^n+\cdots\end{aligned}$$

die normierte, reguläre und schlichte, Funktion in $|z|<1$, *so dass der reelle Teil der Koeffizient von* z^n *der Taylorschen Entwickelung von* $\frac{f''(z)}{f'(z)}$ *das Maximum annimmt. Es gilt dann an allen Punkten s in* $0\leqq s<\infty$, *bis auf endlich viele Unstetigkeitspunkte von* $\kappa(s)$,

$$\Im(n+1)(n+2)\Big[2\kappa^{n+1}(s)(n+1)e^{-(n+1)s}+\sum_{i=2}^{n+1}\Big\{\sum_{p_1=i}^{n+1}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1}p_{i-1}$$
$$\Big(2\kappa^{n-p_1+2}(s)(n-p_1+2)e^{-(n-p_1+2)s}\int_\infty^s 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_\infty^{s_2}\cdots$$
$$\int_\infty^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots\quad ds_2+2\kappa^{p_1-p_2}(s)(p_1-p_2)e^{-(p_1-p_2)s}$$

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 11 [1962], Iss. 1, Art. 4

$$\int_\infty^s 2\kappa^{p_2-p_3}(s_3)e^{-(p_2-p_3)s_3}\int_\infty^{s_3}\cdots\int_\infty^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_3$$

$$\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}ds_1+\cdots+2\kappa^{p_{i-1}-1}(s)(p_{i-1}-1)e^{-(p_{i-1}-1)s}$$

$$\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+2}(s_1)e^{(n-p_1+2)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots$$

$$\int_s^{s_{i-2}}2\kappa^{p_{i-2}-p_{i-1}}(s_{i-1})e^{-(p_{i-2}-p_{i-1})s_{i-1}}ds_{i-1}\cdots ds_2ds_1\Big)\Big\}\Big]+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$$

$$\Big[\sum_{j_{k+1}=1}^{n-k+1}\sum_{j_k=2}^{n-k+2}\sum_{j_{k-1}=2}^{n-k+2}\cdots\sum_{j_1=2}^{n-k+2}j_1j_2\cdots j_kj_{k+1}(j_{k+1}+1)\,\Im\Big\{\beta_{j_1-1}g_{j_2-1}(0)\cdots$$

$$g_{j_k-1}(0)g_{j_{k+1}}(0)+g_{j_1-1}(0)\beta_{j_2-1}g_{j_3-1}(0)\cdots g_{j_k-1}(0)g_{j_{k+1}}(0)+\cdots+g_{j_1-1}(0)\cdots$$

$$g_{j_k-1}(0)\beta_{j_{k+1}}\Big\}\Big]=0. \tag{23}$$

für $n\geqq 2$, *wo*

$$\beta_j=2\kappa^j(s)je^{-js}+\sum_{i=2}^{j}\Big\{\sum_{p_1=i}^{j}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1}p_{i-1}$$

$$\Big(2\kappa^{j-p_1+1}(s)(j-p_1+1)e^{-(j-p_1+1)s}\int_\infty^s 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_\infty^{s_2}\cdots$$

$$\int_\infty^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_2+2\kappa^{p_1-p_2}(s)(p_1-p_2)e^{-(p_1-p_2)s}$$

$$\int_\infty^s 2\kappa^{p_2-p_3}(s_3)e^{-(p_2-p_3)s_3}\int_\infty^{s_3}\cdots\int_\infty^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_3$$

$$\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}ds_1+\cdots+2\kappa^{p_{i-1}-1}(s)(p_{i-1}-1)e^{-(p_{i-1}-1)s}$$

$$\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots$$

$$\int_s^{s_{i-2}}2\kappa^{p_{i-2}-p_{i-1}}(s_{i-1})e^{-(p_{i-2}-p_{i-1})s_{i-1}}ds_{i-1}\cdots ds_2ds_1\Big)\Big\},\quad (j\geqq 3)$$

$$\beta_2=2\kappa^2(s)2e^{-2s}+4\kappa(s)e^{-s}\int_\infty^s 2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2+4\kappa(s)e^{-s}\int_s^0 2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2,$$

$$\beta_1=2\kappa(s)e^{-s}$$

ist.

Für $n=1$ *gilt es an allen Punkten* s *in* $0\leqq s<\infty$, *bis auf endlich viele Unstetigkeitspunkte von* $\kappa(s)$,

$$3\Im\Big[4\kappa^2(s)e^{-2s}+4\kappa(s)e^{-s}\int_\infty^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\Big]-2\Im\Big\{4\kappa(s)e^{-s}$$

$$\int_\infty^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\Big\}=0. \tag{24}$$

UNIVERSITÄT ZU OKAYAMA.

(*Eingegangen am 29. Dezember, 1961*)