Mathematical Journal of Okayama University

Volume 2, *Issue* 1 2008 *Article* 5

OCTOBER 1952

Sur le Caractére Fonctionelle de la Solution du Probléme de Dirichlet

Nobuyuki Ninomiya*

*

SUR LE CARACTÈRE FONCTIONELLE DE LA SOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET

NOBUYUKI NINOMIYA

Plaçons-nous dans l'espace euclidien R^n à $n(\geqq 3)$ dimensions. Soit $\mathfrak{F}$ dans la suite l'ensemble de toutes les fonctions réelles continues données sur la frontière F d'un domaine D. Alors, comme bien connu, la solution $H_f^D(M)$ du problème généralisé de Dirichlet pour D et f de $\mathfrak{F}$ est linéaire et non-négative, quel que soit un M fixé de D, considérée comme fonctionelle de f donnée sur $\mathfrak{F}$. Inversement, étant donnée une fonction $A_M(f)$ dans D bien déterminée pour toute f de $\mathfrak{F}$ qui est linéaire et non-négative, quel que soit un M fixé de D, considérée comme fonctionelle de f donnée sur $\mathfrak{F}$, sous quelles conditions $A_M(f)$ représente-t-elle la solution $H_M^D(f)$ du problème généralisé de Dirichlet pour D et f? Quant à ce problème, on connaît les résultats récents obtenus par M. M. Keldych et M. M. Inoue.

Rappel du théorème de M. Keldych[1]: Soient D un domaine borné, F sa frontière, et $A_M(f)$ une fonctionelle bien déterminée pour un M de D et toute f de $\mathfrak{F}$ satisfaisante aux conditions suivantes.

(1) $A_M(f)$ est linéaire comme fonctionelle de f donnée sur $\mathfrak{F}$.

(2) $\min\limits_{Q \in F} f(Q) \leqq A_M(f) \leqq \max\limits_{Q \in F} f(Q)$ en tout M de D.

(3) Si le problème classique de Dirichlet est soluble pour D et f, $A_M(f)$ est égale à cette solution.

(4) $A_M(f)$ est harmonique dans D.

Alors, $A_M(f)$ est déterminée de la seule manière pour toute f de $\mathfrak{F}$.

Rappel du théorème de M. Inoue[2]: Soient D un domaine de frontière F bornée et $A_M(f)$ une fonctionelle bien déterminée pour un M de D et toute f de $\mathfrak{F}$ satisfaisante aux conditions suivantes.

(1) $A_M(f)$ est linéaire et non-négative comme fonctionelle de f donnée sur $\mathfrak{F}$.

---

1) M. Keldych, Sur le problème de Dirichlet, C. R. Acad. Sci. URSS, **32**, 1941, pp. 308-309.

2) M. Inoue, Sur la détermination fonctionelle de la solution du problème de Dirichlet, Memoirs Fac. Sci. Kyushu Univ., 5, 1950, pp. 69-74.

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 2 [2008], Iss. 1, Art. 5

(2) $A_M([\nu_Q]_n) \leqq \nu_M(Q)$ en tout point-frontière Q et pour tout n assez grand.

(3) $A_M(\nu_M) \geqq u(M)$ pour toute fonction u harmonique dans D dont la p.g.l. en tout point-frontière Q est au plus égale à $\nu_M(Q)$.

Où $\nu_M(Q) = \dfrac{1}{MQ}$ et $[\nu_Q]_n = min\,[\nu_Q, n]$. Alors, $A_M(f)$ coïncide nécessairement avec $H_M^D(f)$ pour toute f de $\mathfrak{F}$.

Dans cette note, on énoncera quelques remarques pour leurs théorèmes. Soient désormais D un ensemble ouvert dont la frontière F est un compact de capacité positive, ε_M la masse unité placée en un point M, λ une distribution sphérique[1], et α[2] la distribution positive donnée par $\sum_{i=1}^{\infty} a_i\lambda_i$, où $\{\lambda_i\}$ $(i=1, 2, \cdots\cdots)$ est la séquence de toute distribution sphérique de rayon nombre rationnel et centrée en point rationnel et $\{a_i\}$ $(i=1, 2, \cdots\cdots)$ est une séquence de nombres positifs telle que $U^\alpha(Q)$[3] soit continu en tout Q de R^n. Alors, on a;

Théorème 1. *Soit $A_M(f)$ une fonctionelle bien déterminée pour un M de D et toute f de $\mathfrak{F}$ satisfaisante aux conditions suivantes.*

(a) *$A_M(f)$ est linéaire et non-négative comme fonctionelle de f donnée sur $\mathfrak{F}$.*

(b) *Pour toute f_λ de $\mathfrak{F}$ donnée par un potentiel de toute λ sphérique, $A_M(f_\lambda)$ est majorée par $U^\lambda(M)$.*

(c) *Pour toute f de $\mathfrak{F}$ donnée par un potentiel continu d'une distribution positive portée par CD, $A_M(f)$ est égale à la valeur de ce potentiel en M.*

Alors, $A_M(f)$ coïncide nécessairement avec $H_M^D(f)$ pour toute f de $\mathfrak{F}$.

En effet, d'après la condition (a) posée à $A_M(f)$, on peut trouver une seule distribution ν_M positive portée par F, au moyen de laquelle $A_M(f)$ s'écrit sous la forme

1) Une distribution positive de masse totale unité avec la densité constante portée par une surface sphérique.

2) Cette α a étée construite par M. H. Cartan, et la distribution obtenue par le balayage (intérieur ou extérieur) de celle-ci sur un ensemble quelconque est caractéristique. (H. Cartan, Théorie générale du balayage en potentiel newtonien, Ann. Univ. Grenoble, Sec. Sci. Math. Phys., **22**, 1946, voir n° 21 et n° 22).

3) Soit $U^\mu(Q) = \int \Phi(QP)d\mu(P)$ le potentiel d'une distribution μ de masse. La fonction fondamentale est $\Phi(r) = \dfrac{1}{r^{n-2}}\ (n \geqq 3)$.

$$A_M(f) = \int_F f(Q)d\nu_M(Q).$$

Pour prouver le théorème, il suffit donc de montrer que ν_M est d'accord avec la distribution μ_M obtenue par le balayage de la masse unité ε_M sur la frontière F de D. En vertu de la condition (c) posée à $A_M(f)$, si un potentiel $U^\mu(Q)$ d'une distribution μ positive portée par CD est continu en tout Q de R^n, on a

$$\int_F U^\mu(Q)\,d\nu_M(Q) = U^\mu(M), \quad \text{c'est-à-dire,}$$
$$\int U^{\nu_M}(Q)\,d\mu(Q) = \int U^{\varepsilon_M}(Q)\,d\mu(Q),$$

ce qui entraîne la coïncidence d'entre les deux potentiels $U^{\nu_M}(Q)$ et $U^{\varepsilon_M}(Q)$ en tout Q de CD sauf sur un ensemble de capacité nulle. Car, étant donné un ensemble borné et borélien quelconque de capacité positive, on peut toujours trouver une distribution positive portée par celui-ci dont le potentiel est continu en tout point de R^n. Naturellement, les deux coïncident en tout point extérieur de D. D'autre part, en vertu de la condition (b) posée à $A_M(f)$, on a pour toute λ sphérique

$$\int_F U^\lambda(Q)\,d\nu_M(Q) \leqq U^\lambda(M), \quad \text{c'est-à-dire,}$$
$$\int U^{\nu_M}(Q)\,d\lambda(Q) \leqq \int U^{\varepsilon_M}(Q)\,d\lambda(Q),$$

ce qui entraîne en tout Q de R^n l'inégalité

$$U^{\nu_M}(Q) \leqq U^{\varepsilon_M}(Q).$$

Donc, on a $\nu_M = \mu_M$.

Remarque. Le théorème montre que dans le théorème de M. Keldych l'harmonicité de $A_M(f)$ est inutile sous la condition (b).

Théorème 2. *Soit $A_M(f)$ une fonctionelle bien déterminée pour un M de D et toute f de $\mathfrak{F}$ satisfaisante aux conditions suivantes.*

(a) *$A_M(f)$ est linéaire et non-négative comme fonctionelle de f donnée sur $\mathfrak{F}$.*

(b) *Pour toute f_λ de $\mathfrak{F}$ donnée par un potentiel de toute λ sphérique, $A_M(f_\lambda)$ est majorée par $U^\lambda(M)$.*

(c) *Pour une f_0 de $\mathfrak{F}$ donnée par le potentiel $U^\alpha(Q)$, $A_M(f_0)$ est* *égale à la solution du problème généralisé de Dirichlet pour f_0 et D (c'est-à-dire, le potentiel $U^{\alpha'}(M)$ de la distribution α' obtenue par le balayage de α sur CD).*

Alors, $A_M(f)$ coïncide nécessairement avec $H_M^D(f)$ pour toute f de $\mathfrak{F}$.

En effect, d'après la condition (a) posée à $A_M(f)$, on peut trouver une seule distribution ν_M positive portée par F, au moyen de laquelle $A_M(f)$ s'écrit sous la forme

$$A_M(f) = \int_F f(Q)\,d\nu_M(Q).$$

Pour prouver le théorème, il suffit donc de montrer que ν_M est d'accord avec la distribution μ_M obtenue par le balayage de la masse unité ε_M sur la frontière F de D. Pour cela, il suffit[1] de montrer que l'on a pour toute distribution λ sphérique

$$\int_F U^\lambda(Q)\,d\nu_M(Q) = \int_F U^\lambda(Q)\,d\mu_M(Q).$$

Comme on l'a déjà dit, la condition (b) posée à $A_M(f)$ entraîne en tout Q de R^n l'inégalité

$$U^{\nu_M}(Q) \leqq U^{\varepsilon_M}(Q).$$

Par suite, on a en tout Q de D

$$U^{\nu_M}(Q) \leqq U^{\mu_M}(Q).$$

Car, $U^{\mu_M}(Q)$ est la plus grand minorante harmonique de $U^{\varepsilon_M}(Q)$ dans D. D'autre part, la même inégalité a lieu en tout Q de CD sauf sur un ensemble de points-frontières irréguliers pour le problème de Dirichlet. En définitive, on a en tout Q de R^n

$$U^{\nu_M}(Q) \leqq U^{\mu_M}(Q).$$

Par conséquent, on a pour toute λ sphérique

$$\int_F U^\lambda(Q)\,d\nu_M(Q) \leqq \int_F U^\lambda(Q)\,d\mu_M(Q)$$

et encore on a

1) H. Cartan, loc. cit., voir n° 3.

$$A_M(f_0) = \int_F U^\alpha(Q)\,d\nu_M(Q) \leqq \int_F U^\alpha(Q)\,d\mu_M(Q) = U^{\alpha'}(M).$$

Donc, on a

$$\int_F U^\alpha(Q)\,d\nu_M(Q) = \int_F U^\alpha(Q)\,d\mu_M(Q),$$

ce qui entraîne pour toute λ_i sphérique de rayon nombre rationnel et centrée en point rationnel

$$\int_F U^{\lambda_i}(Q)\,d\nu_M(Q) = \int_F U^{\lambda_i}(Q)\,d\mu_M(Q).$$

Alors, on a facilement pour toute λ sphérique

$$\int_F U^{\lambda}(Q)\,d\nu_M(Q) = \int_F U^{\lambda}(Q)\,d\mu_M(Q).$$

Donc, on a $\nu_M = \mu_M$.

Remarque. Le théorème montre que dans le théorème de M. Inoue la condition (2) équivaut à la condition (b) et la condition (3) peut être remplacée par la condition (c) plus facile à comprendre.

Remarque. Le théorème 2 différe du théorème 1 au sens essentiel. En effet, on sait[1] que la fonction continue donnée sur la frontiére d'un ensemble D ouvert quelconque par le potentiel $U^\alpha(Q)$ n'est soluble pour le problème classique de Dirichlet pour D que si D est régulier pour le problème de Dirichlet.

Voici une amélioration du théorème de M. Keldych.

Théorème 3. *Soit $A_M(f)$ une fonctionelle bien déterminée pour un M de D et toute f de $\mathfrak{F}$ satisfaisante aux conditions suivantes.*

(a) *$A_M(f)$ est linéaire et non-négative comme fonctionelle de f donnée sur $\mathfrak{F}$.*

(b) *$A_M(f) \leqq \max\limits_{Q \in F} f(Q)$ en tout M de D.*

(c) *Pour toute f de $\mathfrak{F}$ donnée par un potentiel continu d'une distribution positive portée par CD, $A_M(f)$ est égale à la valeur de ce potentiel en M.*

(d) *Pour une f_0 de $\mathfrak{F}$ donnée par le potentiel $U^\alpha(Q)$, $A_M(f_0)$ est une fonction harmonique ou sousharmonique dans D.*

---

1) H. Cartan, loc. cit., voir n° 22.

Alors, $A_M(f)$ coïncide nécessairement avec $H_M^D(f)$ pour toute f de $\mathfrak{F}$.

En effet, d'après la condition (a) posée à $A_M(f)$, on peut trouver une seule distribution ν_M positive portée par F, au moyen de laquelle $A_M(f)$ s'écrit sous la forme

$$A_M(f) = \int_F f(Q)\,d\nu_M(Q).$$

Alors, d'après la condition (b) posée à $\dot{A}_M(f)$, la masse totale de ν_M est toujours au plus égale à l'unité. Pour prouver le théorème, il suffit donc de montrer que ν_M est d'accord avec la distribution μ_M obtenue par le balayage de la masse unité ε_M sur la frontière F de D. Comme on l'a déjà dit, la condition (c) posée à $A_M(f)$ entraîne la coïncidence d'entre les deux potentiels $U^{\nu_M}(Q)$ et $U^{\mu_M}(Q)$ en tout Q de CD sauf sur un ensemble de capacité nulle. Par suite, on a, quelle que soit une distribution μ positive d'énergie finie,

$$\int_F U^{\mu'}(Q)\,d\nu_M(Q) = U^{\mu'}(M),$$

où μ' désigne la distribution obtenue par le balayage de μ sur CD. Car, μ' étant d'énergie finie aussi, elle ne peut charger aucune masse sur un ensemble de capacité nulle. Soit τ la distribution de mesure au sens de Lebesgue dans une petite sphère centrée en un point-frontière P régulier pour le problème de Dirichlet. Soulignons que le potentiel $U^\tau(Q)$ est continu en tout Q de R^n et admet un maximum absolu strict en le centre P de cette sphère. Alors, on a en tout M de D

$$\int_F U^{\tau'}(Q)\,d\nu_M(Q) = U^{\tau'}(M).$$

Comme $M \to P$, on a

$$\begin{aligned} U^\tau(P) &= \lim_{M\to P} U^{\tau'}(M) = \lim_{M\to P}\int_F U^{\tau'}(Q)\,d\nu_M(Q) \\ &\leqq \underline{\lim}_{M\to P}\int_F U^\tau(Q)\,d\nu_M(Q) \leqq \overline{\lim}_{M\to P}\int_F U^\tau(Q)\,d\nu_M(Q) \leqq U^\tau(P). \end{aligned}$$

Donc, on a

$$\lim_{M\to P}\int_F U^\tau(Q)\,d\nu_M(Q) = U^\tau(P).$$

En tenant compte de $\nu_M(F) \leqq 1$, cela montre que, si M tend vers un point-frontière P régulier quelconque, ν_M converge vaguement vers ε_P. Encore, en tenant compte de $\min_{Q \in F} U^{\tau'}(Q) \cdot \nu_M(F) \leqq U^{\tau'}(M)$, on sait évidemment que, si M tend vers l'infini, $\nu_M(F)$ tend vers nulle. Par suite, si P est un point-frontière régulier, on a

$$\lim_{M \to P} \int_F U^{\alpha}(Q)\, d\nu_M(Q) = U^{\alpha}(P)$$

et encore

$$\lim_{M \to P} \int_F U^{\alpha'}(Q)\, d\nu_M(Q) = U^{\alpha}(P).$$

La fonction $f^*(Q) = U^{\alpha}(Q) - U^{\alpha'}(Q)$ définie sur F est nécessairement nulle en tout Q régulier et positive en tout Q irrégulier[1]. Posons

$$V(M) = \int_F f^*(Q)\, d\nu_M(Q) = A_M(f_0) - U^{\alpha'}(M),$$

alors, elle est harmonique ou sousharmonique, non-négative et bornée supérieurement dans D. De plus, si M tend vers un point-frontiére P régulier, elle tend nécessairement vers nulle, et, si M tend vers l'infini, elle l'est aussi. Par conséquent, on a $V(M) \leqq 0$ dans D. Donc, on a $V(M) = 0$ dans D. Ainsi, on sait que ν_M ne charge aucune masse sur un ensemble de points-frontières irréguliers de D. Alors, la relation

$$\int_F U^{\lambda'}(Q)\, d\nu_M(Q) = U^{\lambda'}(M)$$

ayant lieu pour toute λ sphérique équivaut à

$$\int_F U^{\lambda}(Q) d\nu_M(Q) = U^{\lambda'}(M) = \int_F U^{\lambda}(Q) d\mu_M(Q).$$

Donc, on a $\nu_M = \mu_M$.

Remarque. On pourra montrer analoguement que, lorsque $n = 2$, les trois théorèmes rapportés plus haut sont établis aussi pour tout

1) H. Cartan, loc. cit., voir n° 22.

ensemble D ouvert et borné en considérant des potentiels logarithmiques du type $\int log \frac{1}{r} \, d\mu$.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
OKAYAMA UNIVERSITY

(*Received May 26, 1952*)