Mathematical Journal of Okayama University

Volume 2, *Issue* 1 2008 *Article* 1

OCTOBER 1952

Sur Une Suite Convergente de Distributions de Masses et Leurs Potentiels Correspondants

Nobuyuki Ninomiya*

*

SUR UNE SUITE CONVERGENTE DE DISTRIBUTIONS DE MASSES ET LEURS POTENTIELS CORRESPONDANTS

Nobuyuki NINOMIYA

On désignera par $U^{\mu}(M)$ le potentiel engendré au point M dû à la distribution μ de masse, en considérant des potentiels newtoniens dans l'espace ordinaire Ω pour fixer les idées. Une suite $\{\mu_n\}$ de distributions de masses positives est dite convergente vers une distribution μ si, pour toute fonction f positive et continue telle qu'il existe un compact contenant l'ensemble $\{M;\ M\in\Omega,\ f(M)>0\}$, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int f(M)d\mu_n(M)=\int f(M)d\mu(M).$$

Cela revient au même de dire que, pour tout ensemble e borélien et borné, régulier relativement à μ, on a

$$\lim_{n\to\infty}\ \mu_n(e)\ =\ \mu(e).$$

Récemment, M. J. Deny[1] a démontré le théorème suivant; si une suite $\{\mu_n\}$ de distributions quelconques converge vers une distribution μ, on peut en extraire une suite partielle $\{\mu_{n_k}\}$ dont les potentiels correspondants $U^{\mu_{n_k}}$ convergent vers le potentiel U^{μ} sauf sur un ensemble de mesure nulle au sens de Lebesgue. Dans ce théorème, on ne sait pas si l'on peut, en général, remplacer mesure nulle par capacité nulle. Cependant on a le;

Théorème. *Si une suite $\{\mu_n\}$ de distributions positives, portées par un compact F, de masse totale uniformèment bornée, converge vers une distribution μ, et s'il existe[2] une distribution λ telle que l'on ait*

$$\mathrm{p.g.l}_{n\to\infty}\ \mu_n(e)\leq\lambda(e)$$

1) J. Deny; Sur la convergence des suites de potentiels. C. R. Acad. Sci. de Paris. t. 218 (1944), pp. 497-499.

2) Pour que l'hypothèse du théorème soit verifiée, il suffit, par exemple, que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty}\ \mu_n(e)=\mu(e)$$

pour tout ensemble e, bien qu'il ne soit pas régulier relativement à μ.

pour tout ensemble ouvert e, on peut en extraire une suite partielle $\{\mu_{n_k}\}$ *dont les potentiels correspondants* $U^{\mu_{n_k}}$ *convergent vers le potentiel* U^{μ} *sauf sur un ensemble de capacité extérieure nulle, et de plus, la convergence est uniforme à l'exception d'un ensemble ouvert dont la capacité peut être prise arbitrairement petite.*

La démonstration du théorème repose sur la proposition et les lemmes suivants. Désignons par $\mathfrak{D}_E$ la famille de distributions positives μ, portées par un ensemble E, telles que μ ne charge aucune masse sur l'ensemble $\{M;\ M \in \Omega,\ U^{\mu}(M) = +\infty\}$. Alors, on a

Proposition. *Pour toute distribution* $\mu \in \mathfrak{D}_F$, *il existe une suite* $\{\mu_n\}$ *de restrictions de* μ *telle que* $\mu_n(e) \uparrow \mu(e)$ *pour tout ensemble e et chaque potentiel* U^{μ_n} *soit continu dans* Ω.

En effet, puisque $U^{\mu}(M)$ est mesurable et fini presque partout pour μ, étant donné tout nombre positif δ, on peut trouver un ensemble ouvert G tel que $\mu(G) < \delta$ et $U^{\mu}(M)$ soit continu, considéré comme fonction sur $F - G$. Lorsque l'on désigne par ν la restriction de μ à $F - G$, il est bien clair que $U^{\nu}(M)$ est continu dans Ω. Soit $\delta_n \downarrow 0$ et pour chaque δ_n, G_n un tel ensemble ouvert qui est décroissant avec n, alors une suite $\{\mu_n\}$ de restrictions de μ à $F - G_n$ est évidemment compatible avec les conditions.

Corollaire. *Toute distribution* $\mu \in \mathfrak{D}_F$ *ne peut charger aucune masse sur un ensemble de capacité nulle.*

En effet, soit $\{\mu_n\}$ une suite de restrictions de μ comme plus haut. Alors, puisque tout U^{μ_n} est continu dans Ω, chaque μ_n ne peut charger aucune masse sur un ensemble de capacité nulle. Donc μ l'est aussi.

Lemme 1. *Si une suite* $\{\mu_n\}$ *de distributions positives, portées par un compact F, de masse totale uniformèment bornée, converge vers une distribution* μ, *étant donné toute distribution* $\nu \in \mathfrak{D}_F$, *on peut en extraire une suite partielle* $\{\mu_{n_k}\}$ *dont les potentiels correspondants* $U^{\mu_{n_k}}$ *converge vers le potentiel* U^{μ} *sauf sur un ensemble de mesure nulle pour* ν.

Remarquons d'abord que, si un potentiel U^{ν}(M) est continu sur F, une famille quelconque de potentiels de restrictions de ν est également continue sur F. En effet, à tout nombre positif ε correspond un nombre fixe δ, tel que le potentiel de la restriction de ν à une sphère de rayon δ et centrée en un point quelconque de F soit $< \varepsilon$ au centre de la sphère, et en outre, d désignant le diamètre de F, il existe un nombre fixe δ' tel que $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right| \leqq \dfrac{\varepsilon}{\nu(F)}$ pour $\dfrac{\delta}{2} \leqq x, y \leqq d$

et $|x-y| < \delta'$. Alors, pour une restriction arbitraire ν^* de ν, il est facilement connu que $|U^{\nu^*}(M) - U^{\nu^*}(M')| < 3\varepsilon$ si $M, M' \in F$ et $dis\,(M, M') < min\left(\frac{\delta}{2}, \delta'\right)$. En utilisant ce fait, si U^{ν}(M) est continu sur F, on peut extraire[1] une suite partielle convenable $\{\mu_{n_k}\}$ qui donne satisfaction. Si U^{ν}(M) n'est pas continu sur F, soit $\{\nu_i\}$ une suite de restrictions de ν comme il a été dit en proposition. Alors pour chaque ν_i, on peut extraire une suite partielle $\{\mu^i_{n_k}\}$ dont les potentiels correspondants $U^{\mu^i_{n_k}}$ convergent vers le potentiel U^{μ} sauf sur un ensemble de mesure nulle pour ν_i. Par conséquent, en faisant $\{\mu^{i+1}_{n_k}\}$ une suite partielle de $\{\mu^i_{n_k}\}$ pour tout nombre i et en prenant la suite diagonale de $\{\mu^i_{n_k}\}$ $(i, k = 1, 2, \cdots\cdots)$, on peut trouver une suite partielle convenable $\{\mu_{n_k}\} = \{\mu^k_{n_k}\}$ $(k = 1, 2, \cdots\cdots)$ qui donne satisfaction.

Lemme 2. *Soit $\{\mu_n\}$ une suite de distributions positives, portées par un compact F, satisfaisante à l'hypothèse du théorème, et μ la distribution limite. Encore, G étant un ensemble ouvert, soit $\{\nu_n\}$ une suite de distributions positives, portées par $F' = F - G$, qui converge vers une distribution ν. Si les restrictions λ' et μ' de λ et de μ à F' appartiennent à $\mathfrak{D}_{F'}$ et chaque $U^{\nu_n}(M)$ est continu et $\leqq 1$ dans Ω, alors on a*

$$\underset{n\to\infty}{\text{p.p.l}} \int U^{\nu_n} d\mu_n = \int U^{\nu} d\mu.$$

Soit $\{\nu_{n_k}\}$ une suite partielle de $\{\nu_n\}$ dont les potentiels correspondants $U^{\nu_{n_k}}$ convergent vers U^{ν} sauf sur un ensemble de mesure nulle pour λ' et pour μ'. Etant donné un nombre positif ε, on peut trouver un ensemble ouvert O tel que $\lambda'(O) < \varepsilon$ et la convergence de $U^{\nu_{n_k}}$ vers U^{ν} soit uniforme sur $F' - O$. Encore, on peut trouver un compact E, régulier relativement à μ, tel que $E \subset G$ et $\lambda(G - E) < \varepsilon$. Alors, les suites de restrictions de μ_n à E et à $F - E$ convergent vers celles de μ respectivement. Pour un i fixe et tout k assez grand, on a l'égalité

$$\int_{F-E} U^{\nu} d\mu_{n_k} - \int_{F-E} U^{\nu} d\mu = \int_{F'-O} (U^{\nu} - U^{\nu_{n_i}}) d\mu_{n_k}$$

1) C'est démontré de la même manière que le cas où ν est égale à la distribution de mesure. (Voir "J. Deny; loc, cit.").

$$+\left\{\int_{O\cdot F'}(U^{\nu}-U^{\nu_{n_k}})d\mu_{n_k}+\int_{G-E}(U^{\nu}-U^{\nu_{n_l}})d\mu_{n_k}\right\}$$
$$+\left(\int_{F-E}U^{\nu_{n_l}}d\mu_{n_k}-\int_{F-E}U^{\nu_{n_l}}d\mu\right)+\int_{F-E}(U^{\nu_{n_l}}-U^{\nu})d\mu$$

où le premier terme est $\leqq \varepsilon\cdot M(M=\sup\mu_n(E))$, le second est $\leqq 4\varepsilon$ en tenant compte de $\underset{n\to\infty}{\text{p.g.l}}\ \mu_n(OF')\leqq\lambda'(OF')=\lambda'(O)<\varepsilon$ et $\underset{n\to\infty}{\text{p.g.l}}\ \mu_n(G-E)\leqq\lambda(G-E)<\varepsilon$, le troisième est $<\varepsilon$, et le quatrième est $<\varepsilon$, car $U^{\nu_{n_l}}$ est $\leqq 1$ et converge vers U^{ν} sur $F-E$ presque partout pour μ. Donc on a

$$\int_{F-E}U^{\nu}d\mu_{n_k}-\int_{F-E}U^{\nu}d\mu<(M+6)\varepsilon.$$

Encore, pour tout k assez grand, on a

$$\int U^{\nu_{n_k}}d\mu-\int U^{\nu}d\mu=\left[\int_{F'-O}(U^{\nu_{n_k}}-U^{\nu})d\mu_{n_k}+\left(\int_E U^{\nu_{n_k}}d\mu_{n_k}-\int_E U^{\nu}d\mu\right)\right]$$
$$+\left[\left(\int_{G-E}U^{\nu_{n_k}}d\mu_{n_k}-\int_{G-E}U^{\nu}d\mu_{n_k}\right)+\left(\int_{O\cdot F'}U^{\nu_{n_k}}d\mu_{n_k}-\int_{O\cdot F'}U^{\nu}d\mu_{n_k}\right)\right]$$
$$+\left(\int_{F-E}U^{\nu}d\mu_{n_k}-\int_{F-E}U^{\nu}d\mu\right)$$

où le premier terme est $<\varepsilon\cdot M$, car la convergence de $U^{\nu_{n_k}}$ vers U^{ν} est uniforme sur $F'-O$ et E, et le second est $<4\varepsilon$ en tenant compte de $\underset{n\to\infty}{\text{p.g.l}}\ \mu_n(OF')<\varepsilon$ et $\underset{n\to\infty}{\text{p.g.l}}\ \mu_n(G-E)<\varepsilon$. Donc on a

$$\int U^{\nu_{n_k}}d\mu_{n_k}-\int U^{\nu}d\mu<(2M+1)\varepsilon.$$

ε étant arbitraire, on a

$$\underset{n\to\infty}{\text{p.p.l}}\int U^{\nu_n}d\mu_n\leqq\int U^{\nu}d\mu.$$

D'autre part, on a sans doute

$$\underset{n\to\infty}{\text{p.p.l}}\int U^{\nu_n}d\mu_n\geqq\int U^{\nu}d\mu,$$

d'où le résultat.

Démonstration du théorème. Plaçons-nous sur une boule fermée S assez grande contenant F. Posons

$$G_N = \{M;\ M \in \Omega,\ U^{\lambda}(M) > N\} + \{M;\ M \in \Omega,\ U^{\mu}(M) > N\}.$$

A tout nombre positif ε correspond un nombre N assez grand tel que la capacité $C(G_N)$ de l'ensemble ouvert G_N soit $< \varepsilon$. Désignons par λ' et par μ' les restrictions de λ et de μ à $F' = S - G_N$, alors λ' et μ' appartiennent à $\mathfrak{D}_{F'}$. Pour un nombre positif δ assez petit, U_n^{μ} désignant le potentiel de μ par rapport au noyau $\left[\frac{1}{r}\right]_n$ qui est la fonction égale à $min\left(\frac{1}{r},\ n\right)$, posons

$$e_n = \{M;\ M \in F',\ U^{\mu_n}(M) - U_n^{\mu}(M) > \delta\}.$$

Soit ν_n une distribution positive de masse totale $\frac{1}{2}C(e_n)$, portée par e_n, dont le potentiel U^{ν_n} est continu et $\leqq 1$ dans Ω. Alors, puisque la suite $\{\nu_n\}$ est de masse totale uniformément bornée, on peut supposer qu'elle est convergente. ν désignant la distribution limite, on a selon le lemme 2,

$$\int U^{\nu} d\mu = \underset{n \to \infty}{\text{p.p.l}} \int U^{\nu_n} d\mu_n.$$

Encore, en considérant le cas où toute μ_n coïncide avec μ au lemme 2, on a

$$\int U^{\nu} d\mu = \underset{n \to \infty}{\text{p.p.l}} \int U^{\nu_n} d\mu,$$

ce qui est $\geqq \underset{n \to \infty}{\text{p.p.l}} \int U_n^{\nu_n} d\mu \geqq \underset{n \to \infty}{\text{p.p.l}} \int U_i^{\nu_n} d\mu = \int U_i^{\nu} d\mu$, pour tout i fixe. Comme $i \to \infty$, on a

$$\int U^{\nu} d\mu = \underset{n \to \infty}{\text{p.p.l}} \int U_n^{\nu_n} d\mu.$$

Donc on a $\underset{n \to \infty}{\text{p.p.l}}\ C(e_n) = 0$ moyennant la relation

$$\frac{1}{2} C(e_n) \leqq \frac{1}{\delta}\left[\int U^{\nu_n} d\mu_n - \int U_n^{\nu_n} d\mu\right]$$

Par conséquent, à partir de $\{e_n\}$ on peut en extraire une suite $\{e_{n_k}\}$ telle que $\sum_{k=1}^{\infty} C(e_{n_k}) < +\infty$. Similairement, si l'on pose

$$e'_n = \{M;\ M \in F',\ U_n^{\mu_n}(M) - U^{\mu}(M) < -\delta\},$$

on peut en extraire une suite $\{e'_{n_k}\}$ telle que $\sum_{k=1}^{\infty} C(e'_{n_k}) < +\infty$. En tenant compte que $U^{\mu_{n_k}}(M) - U^{\mu}_{n_k}(M) < \delta$ dans l'extérieur de S pour tout k assez grand, on a pour tout tel k

$$e_{n_k} + G_N = \{M;\ M \in \Omega,\ U^{\mu_{n_k}}(M) - U^{\mu}_{n_k}(M) > \delta\} + G_N,$$

ce qui est ouvert, car $U^{\mu}_{n_k}$ est continu dans Ω. Similairement, $e'_{n_k} + G$ est ouvert aussi. Donc, soient $E_\nu = \bigcup_{k \geqq \nu} (e_{n_k} + e'_{n_k})$ et $E = \bigcap_{\nu \geqq 1} E_\nu$, alors $E_\nu + G$ est ouvert pour tout ν assez grand. Encore, soient

$h_{n_k} = \{M;\ M \in F',\ |\ U^{\mu_{n_k}}(M) - U^{\mu}(M)\ | > \delta\}$, $H_\nu = \bigcup_{k \geqq \nu} h_{n_k}$, et $H = \bigcap_{\nu \geqq 1} H_\nu$. Alors, puisque l'on a $h_{n_k} < e_{n_k} + e'_{n_k}$ pour tout k, $\bar{C}(e)$ désignant la capacité extérieure de l'ensemble e, on a

$$C(H) \leqq \bar{C}(\bigcup_{k \geqq \nu} h_{n_k}) \leqq \bar{C}(E_\nu) \leqq \bar{C}(E_\nu + G_N),$$

ce qui est encore $\leqq \sum_{k \geqq \nu} C(e_{n_k}) + \sum_{k \geqq \nu} C(e'_{n_k}) + C(G_N) < \varepsilon$ pour tout ν assez grand. Donc on a

$$\bar{C}(H) \leqq \bar{C}(\bigcup_{k \geqq \nu} h_{n_k}) < \varepsilon$$

pour tout ν assez grand. Ainsi, on a

$$U^{\mu}(M) - \delta \leqq \underset{k \to \infty}{\text{p.p.l}}\ U^{\mu_{n_k}}(M) \leqq \underset{k \to \infty}{\text{p.g.l}}\ U^{\mu_{n_k}}(M) \leqq U^{\mu}(M) + \delta$$

en tout point M de $F' - H$, et de plus

$$|\ U^{\mu_{n_k}}(M) - U^{\mu}(M)\ | < \delta$$

uniformèment sur F' à l'exception d'un ensemble ouvert O tel que $C(O) < \varepsilon$. Ensuite de cela, soient $\{\varepsilon_i\}$ et $\{N_i\}$ les suites de nombres positifs telles que $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < +\infty$ et $C(G_{N_i}) < \varepsilon_i$ pour tout nombre i. Alors, en recommencant pour chaque ε_i ce qui précède, on peut extraire une suite partielle $\{\mu^i_{n_k}\}$ de $\{\mu_n\}$ dont les potentiels $U^{\mu^i_{n_k}}$ sont comme plus haut. En faisant $\{\mu^{i+1}_k\}$ une suite partielle de $\{\mu^i_{n_k}\}$ pour tout nombre i, prenons la suite diagonale $\{\mu_{n_k}\} = \{\mu^k_{n_k}\}$ de $\{\mu^i_{n_k}\}$. Alors on a

$$U^{\mu}(M) - \delta \leqq \underset{k \to \infty}{\text{p.p.l}}\ U^{\mu_{n_k}}(M) \leqq \underset{k \to \infty}{\text{p.g.l}}\ U^{\mu_{n_k}}(M) \leqq U^{\mu}(M) + \delta$$

en tout point M de S sauf sur un ensemble de capacité extérieure nulle, et de plus

$$| U^{\mu_{n_k}}(M) - U^{\mu}(M) | < \delta$$

uniformèment sur S à l'exception d'un ensemble ouvert de capacité arbitrairement petite. Finalement, soit $\{\delta_i\}$ une suite de nombres positifs décroissante vers nulle. Alors, pour chaque δ_i, on peut extraire une suite partielle $\{\mu^i_{n_k}\}$ de $\{\mu_n\}$ dont les potentiels $U^{\mu^i_{n_k}}$ ont les propriétés ci-dessus. En faisant $\{\mu^{i+1}_{n_k}\}$ une suite partielle de $\{\mu^i_{n_k}\}$ pour tout nombre i et en prenant la suite diagonale de $\{\mu^i_{n_k}\}$, on peut trouver une suite partielle $\{\mu_{n_k}\} = \{\mu^k_{n_k}\}$ qui donne satisfaction.

C. Q. F. D.

Department of Mathematics,
Okayama University

(*Received November 13, 1951*)