

Mathematical Journal of Okayama University

Volume 10, Issue 2

1960

Article 1

MARCH 1961

Über die p-wertigen Funktionen

Ken'iti Koseki*

*Okayama University

Copyright ©1960 by the authors. *Mathematical Journal of Okayama University* is produced by
The Berkeley Electronic Press (bepress). <http://escholarship.lib.okayama-u.ac.jp/mjou>

ÜBER DIE p -WERTIGEN FUNKTIONEN

KEN'ITI KOSEKI

Es sei

$$w = f(z) = z^p + a_1 z^{p+1} + \dots, \quad p \geq 1$$

eine innerhalb des Einheitskreises $|z| < 1$ reguläre und p -wertige Funktion. Wir nennen von jetzt an die innerhalb des Einheitskreises reguläre und p -wertige Funktion von der obigen Form die normierte p -wertige Funktion.

In der vorliegenden Arbeit will ich die kleinste obere Grenze der absoluten Beträge der Koeffizienten von z^{p+1} von allen normierten p -wertigen Funktionen in $|z| < 1$ untersuchen.

§ 1. Löwnersche Differenzialgleichungen für die p -wertigen Funktionen.

Wir konstruieren ein Schlitzgebiet, dessen Schlitz von einem willkürlich gewählten Punkt α der Peripherie des Einheitskreises $|z| < 1$ in der z -Ebene zu einem willkürlichen Punkt β von $|z| < 1$ führt. Wir bezeichnen dieses Schlitzgebiet bzw. diesen Schlitz mit G_t und l .

Es sei γ ein von α und β verschiedener willkürlicher Punkt auf l . Der Schlitz l wird dann durch den Punkt γ in die beiden Teile l_1 und l_2 zerlegt, einer von denen, etwa l_1 , den Punkt β und nicht den Punkt α enthält. Das Gebiet $|z| < 1$ mit dem Schlitz l_1 bezeichnen wir mit G_t .

Wir bilden nun einundeindeutig und konform den Kreis $|w| < 1$ auf das Gebiet G_t ab, und wir bezeichnen diese Abbildungsfunktion mit

$$z = h(w, t) = e^{-(t_1-t)}(w + g_1(t)w^2 + \dots + g_n(t)w^{n+1} + \dots).$$

Wenn der Punkt γ auf l durchschreitet, so erhalten wir eine Schar von den schlichten Funktionen

$$z = h(w, t) = e^{-(t_1-t)}(w + g_1(t)w^2 + \dots + g_n(t)w^{n+1} + \dots), \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (1)$$

Es gibt dann bekanntlich für die Schar der Funktionen $h(w, t)$ die folgende Löwnersche¹⁾ Differentialgleichung

$$\frac{\partial h(w, t)}{\partial t} = \frac{\partial h(w, t)}{\partial w} w \frac{1 + \kappa(t)w}{1 - \kappa(t)w} \quad (2)$$

mit der Bedingung

$$h(w, t_1) = w \quad (3)$$

1) K. Löwner. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I. Bd. 89. S. 103.

Wir konstruieren nun aus den beiden $h(w, t)$ und $w_1 = f(z)$ eine neue Funktion $w_1 = f(h(w, t)) = \varphi(w, t)$, so ist die Funktion $\varphi(w, t)$ offenbar regulär in $|w| < 1$. Es gilt überdies

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi(w, t)}{\partial t} &= \frac{\partial f(h(w, t))}{\partial h} \cdot \frac{\partial h(w, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi(w, t)}{\partial w} &= \frac{\partial f(h(w, t))}{\partial h} \cdot \frac{\partial h(w, t)}{\partial w} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Wir gewinnen aus den Formeln (2) und (4) die folgende Differentialgleichung

$$\frac{\partial \varphi(w, t)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi(w, t)}{\partial w} w \frac{1 + \kappa(t)w}{1 - \kappa(t)w}, \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (5)$$

Es besteht ausserdem

$$\varphi(w, t_1) = f(h(w, t_1)) = f(w) = w^p + a_1 w^{p+1} + \dots \quad (6)$$

Also, wenn eine beliebige normierte p -wertige Funktion $w_1 = f(w)$ in $|w| < 1$ gegeben ist, wird diese Funktion $w_1 = f(w)$ die Anfangsfunktion von der Löwnerschen Differentialgleichung (5).

Wir setzen

$$\begin{aligned} \varphi(w, t) = f(h(w, t)) &= e^{-p(\zeta_1 - t)}(w^p + p g_1(t) w^{p+1} + \dots) + a_1 e^{-(p+1)(\zeta_1 - t)} w^{p+1} + \dots \\ &= e^{-(\zeta_1 - t)p} (w^p + a_1(t) w^{p+1} + \dots + a_n(t) w^{p+n} + \dots). \end{aligned} \quad (7)$$

Da die Taylorsche Entwicklung von $\varphi(w, t)$ mit dem Glied w^p beginnt, so ist $\varphi(w, t)$ mindestens p -wertig. Andererseits, da $f(z)$ p -wertig und $h(w, t)$ schlicht ist, ist $\varphi(w, t)$ höchstens p -wertig. Folglich ist die Funktion $\varphi(w, t)$ genau p -wertig in $|w| < 1$.

Also bekommen wir den folgenden

Satz I. Wenn eine beliebige normierte p -wertige Funktion $w_1 = f(w)$ in $|w| < 1$ gegeben ist, wird diese Funktion $w_1 = f(w)$ die Anfangsfunktion von der Löwnerschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial \varphi(w, t)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi(w, t)}{\partial w} w \frac{1 + \kappa(t)w}{1 - \kappa(t)w}, \quad 0 \leq t \leq t_1$$

mit der Bedingung

$$\varphi(w, t_1) = f(w) = w^p + a_1 w^{p+1} + \dots$$

Die Funktion $\varphi(w, t)$ ist immer regulär und p -wertig in $|w| < 1$ für jedes t in $0 \leq t \leq t_1$.

Aus (7) folgt es unmittelbar

$$a_1'(t) = a_1(t) + 2\kappa(t)p, \quad (8)$$

somit ist

$$a_1(t)e^{-t} - a_1(0) = 2p \int_0^t \kappa(t)e^{-t} dt, \quad (9)$$

für jedes t in $0 \leq t \leq t_1$.

Wenn $\varphi(w, t_1) = f(w) = w^p$ ist, so folgt aus (9)

$$a_1(0) = 2p \int_{t_1}^0 \kappa(t)e^{-t} dt.$$

Da $|\kappa(t)| = 1$ ist, ist es $|a_1(0)| < 2p$.

Wir bezeichnen im folgenden die Familie aller p -wertigen Funktion $w_1 = g(z)$ in $|w| < 1$ mit (L) von der Art, dass es für $w_1 = g(z)$ die folgende Differentialgleichung

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi(w, t)}{\partial t} &= \frac{\partial \varphi(w, t)}{\partial w} w \frac{1 + \kappa(t)w}{1 - \kappa(t)w}, \quad 0 \leq t \leq t_0 \\ \varphi(w, t_0) &= w^p, \quad \varphi(w, 0) = g(w) \end{aligned} \right\}$$

besteht, wo $|\kappa(t)| = 1$ und die $\kappa(t)$ stückweise stetig ist.

Hierbei entsteht sich die folgende Frage. Können wir für eine willkürlich gegebene normierte p -wertige Funktion $w = f(z)$ in $|z| < 1$ die Folge der p -wertigen Funktionen $\{f_n(z)\}$ auswählen, derart dass jede $f_n(z)$ zu der Familie (L) gehört und $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$ ist?

§ 2. Die Folge der Riemannschen Flächen.

Es sei $\{G_n\}$ ($n=1, 2, \dots$) eine Folge der über der w -Ebene liegenden Riemannschen Flächen, und jede G_n sei einfach-zusammenhängend. Wir nehmen überdies an, dass die Folge $\{G_n\}$ den folgenden Bedingungen 1° und 2° genügt.

1°. G_n ist p -blättrig für alle n ($n=1, 2, \dots$).

2°. Jede G_n enthält den über dem Punkt $w=0$ liegenden Punkt, der ein Verzweigungspunkt von der Ordnung $p-1$ ist.

Definition: Es seien A und B die beiden über der w -Ebene liegenden Riemannschen Flächen. Wenn es eine eindeutige Abbildung von A in B (nicht notwendig auf) mit den folgenden a° und b° gibt, so sagen wir, dass A in B enthalten ist.

a°. Wir bezeichnen diese Abbildung mit $f(q)$. Wenn $q_1 \in A$ und $q_2 \in A$ und $q_1 \neq q_2$ ist, so ist immer $f(q_1) \neq f(q_2)$.

b°. Der Spurpunkt von $f(q)$ stimmt immer mit dem Spurpunkt von q überein. Wenn q ein Verzweigungspunkt von der Ordnung $s-1$ ist, so ist der Punkt $f(q)$ ein Verzweigungspunkt von der Ordnung von $s-1$.

Wenn auch die Fläche A eine berandete Teilfläche einer Riemannschen Fläche, gilt die obige Definition für A und B .

Definition²⁾: Es sei $\{G_n\}$ ($n=1, 2, \dots$) eine Folge der über der w -Ebene liegenden Riemannschen Flächen, und jede G_n sei einfach-zusammenhängend. Die Folge genüge den obigen Bedingungen 1° und 2°.

Wir nennen dann eine über der w -Ebene liegende Riemannsche Fläche K mit den folgenden Bedingungen c° und d° den Kern von $\{G_n\}$.

c°. K ist p -blättrig, und K enthält den über dem Punkt $w=0$ liegenden Punkt, der ein Verzweigungspunkt von der Ordnung $p-1$ ist. Jede berandete Teilfläche von K ist, für fast alle n , in G_n enthalten.

d°. Eine die Fläche K enthaltende und von K verschiedene Riemannsche Fläche genügt keineswegs der obigen Bedingung c°.

Wenn jede Teilfolge von $\{G_n\}$ als Kern die Fläche K hat, so sagen wir, dass die Folge $\{G_n\}$ gegen K strebt.

Satz II. Es sei $\{B_n\}$ ($n=1, 2, \dots$) eine Folge der über der w -Ebene liegenden Riemannschen Flächen von der Art, dass jede B_n einfach-zusammenhängend und hyperbolisch ist, und dass jede B_n den obigen Bedingungen 1° und 2° genügt. Die Folge $\{B_n\}$ strebe gegen seinen Kern K .

Wir bezeichnen die einundeindeutige und konforme Abbildung von dem Kreis $|z| < 1$ auf B_n mit

$$w = f_n(z) = a_p(n)z^p + a_{p+1}(n)z^{p+1} + \dots, a_p > 0.$$

Wenn die Funktionenfolge $\{f_n(z)\}$ gleichmäßig beschränkt ist, so konvergiert die Folge $\{f_n(z)\}$ selbst in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von dem Kreis $|z| < 1$ gleichmäßig und die Grenzfunktion $w=f(z)$ bildet den Kreis $|z| < 1$ einundeindeutig und konform auf K ab.

Beweis. Da die Folge $\{f_n(z)\}$ gleichmäßig beschränkt ist, so bildet die Folge $\{f_n(z)\}$ die Montelsche normale Familie. Daher können wir aus $\{f_n(z)\}$ eine Teilfolge $\{f_{k_n}(z)\}$ auswählen, so dass die Folge $\{f_{k_n}(z)\}$ in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von dem Kreis $|z| < 1$ gleichmäßig konvergiert. Die Grenzfunktion von $\{f_{k_n}(z)\}$ bezeichnen wir mit $w=f(z)$.

Indem wir die Veränderliche w nur in K bewegt, gewinnen wir die Umkehrungsfunktion³⁾ $z=\varphi_n(w)$ von $w=f_n(z)$.

Es sei $\tilde{w}_0$ ein über $w=0$ liegender Punkt auf K . Der Punkt $\tilde{w}_0$ ist dann nach der Voraussetzung des Satzes der Punkt von der Ordnung $p-1$. Wir setzen $w=t^p$. Es gibt dann eine Umgebung $\tilde{U}(\tilde{w}_0)$ von $\tilde{w}_0$ auf K , so dass die abgeschlossene Hülle von $\tilde{U}(\tilde{w}_0)$ umkehrbar eindeutig und konform auf den abgeschlossenen Kreis $|t| \leq r$ sich abbilden lässt, und dass die abgeschlossene Hülle von $\tilde{U}(\tilde{w}_0)$ keine von $\tilde{w}_0$ verschiedenen Verzweigung-

2) C. Carathéodory. Stetige Konvergenz und normale Familien von Funktionen. Math. Ann. 101. (1929). S. 515—533.

3) Ein Stück der Umkehrungsfunktion von $w=f_n(z)$.

spunkte enthält.

Da K der Kern von B_n ist, ist $\tilde{U}(\tilde{w}_0)$ in fast alle B_n enthalten. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $\tilde{U}(\tilde{w}_0)$ in alle B_n enthalten ist.

Wir setzen $z = \varphi_{k_n}(w) = \varphi_{k_n}(t^p) = \tilde{\varphi}_{k_n}(t)$. In dem Gebiet $|t| < r + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$, genug klein) ist die Funktion $z = \tilde{\varphi}_{k_n}(t)$ regulär und eindeutig, und überdies gilt es $|\tilde{\varphi}_{k_n}(t)| < 1$. Folglich bildet die Folge $\{\tilde{\varphi}_{k_n}(t)\}$ die normale Familie in $|t| < r + \varepsilon$. Es gibt daher eine Teilfolge von $\{\tilde{\varphi}_{k_n}(t)\}$, welche in $|t| \leq r$ gleichmäßig konvergiert. Diese Teilfolge bzw. die Grenzfunktion bezeichnen wir mit $\{\tilde{\varphi}_{k_n}(t)\}$ bzw. $\tilde{\varphi}(t)$.

Nach der Voraussetzung des Satzes ist die Folge $\{f_n(z)\}$ gleichmäßig beschränkt. D. h. $|f_n(z)| < M$. ($n = 1, 2, \dots$). Es ist dann nach der Cauchyschen Ungleichung

$$|f_{p_n}^{(p)}(0)| = |p! a_p| \leq Mp!$$

Daher ist

$$|\tilde{\varphi}'_{p_n}(0)| = \left| \frac{p!^{\frac{1}{p}}}{p \{f_{p_n}^{(p)}(0)\}^{\frac{1}{p}}} \right| \geq \frac{1}{pM^{\frac{1}{p}}}. \quad (10)$$

Aus (10) folgt ohne weiteres

$$|\tilde{\varphi}'(0)| \geq \frac{1}{pM^{\frac{1}{p}}}. \quad (11)$$

Folglich ist die Funktion $\tilde{\varphi}(t)$ nicht eine Konstante in $|t| \leq r$.

Es gilt aber

$$|f^{(p)}(0)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_{p_n}^{(p)}(0)| = \lim_{p \rightarrow \infty} \left| \frac{p!^{\frac{1}{p}}}{p \tilde{\varphi}'_{p_n}(0)} \right|^p \geq \left(\frac{r p!^{\frac{1}{p}}}{p} \right)^p.$$

Daher nimmt die Funktion $f(z)$ die folgende Form an.

$$f(z) = \frac{f^{(p)}(0)}{p!} z^p + \dots, \quad f^{(p)}(0) \neq 0.$$

Also gibt die Funktion $f(z)$ eine einundeindeutige und konforme Abbildung von der Umgebung $U(0)$ von $z = 0$ auf die Umgebung $\tilde{U}(\tilde{w}_0)$ von $\tilde{w}$ auf K .

Zweitens nehmen wir einen willkürlichen Punkt $\tilde{w}_1$ auf K auf. Wir bezeichnen den Spurpunkt von $\tilde{w}_1$ mit w_1 . Der Punkt $\tilde{w}_1$ hat die bestimmte Ordnung $s-1$. Wenn der Punkt $\tilde{w}_1$ ein gewöhnlicher Punkt ist, setzen wir offenbar $s = 1$. Wir setzen $w - w_1 = t^s$.

Es gibt eine Umgebung $\tilde{U}(\tilde{w}_1)$ von $\tilde{w}_1$ auf K , so dass die abgeschlossene Hülle von $\tilde{U}(\tilde{w}_1)$ umkehrbar eindeutig und konform auf den abge-

geschlossenen Kreis $|t| \leq r$ sich abbilden lässt, und dass die abgeschlossene Hülle von $\tilde{U}(\tilde{w}_1)$ keine Verzweigungspunkte, eventuell abgesehen von $\tilde{w}_1$, enthält.

Da K der Kern von B_n ist, ist $\tilde{U}(\tilde{w}_1)$ in fast alle B_n enthalten. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $\tilde{U}(\tilde{w}_1)$ in alle B_n enthalten ist.

Wir setzen $z = \varphi_{k_n}(w) = \varphi_{k_n}(w_1 + t^*) = \tilde{\varphi}_{k_n}(t)$. In dem Gebiet $|t| < r + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ genug klein) ist die Funktion $z = \tilde{\varphi}_{k_n}(t)$ regulär und eindeutig, und überdies gilt es $|\tilde{\varphi}_{k_n}(t)| < 1$. Folglich bildet die Folge $\{\tilde{\varphi}_{k_n}(t)\}$ die normale Familie in $|t| < r + \varepsilon$. Es gibt daher eine Teilfolge von $\{\tilde{\varphi}_{k_n}(t)\}$, welche in $|t| \leq r$ gleichmässig konvergiert. Diese Teilfolge bzw. die Grenzfunktion bezeichnen wir mit $\{\tilde{\varphi}_{q_n}(t)\}$ bzw. $\tilde{\varphi}(t)$.

Wir setzen $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(w)$, so ist die Funktion $\varphi(w)$ wie in dem Vorigen nicht eine Konstante in der Umgebung von $w = 0$. Folglich ist $\varphi(w)$ nicht eine Konstante in der Umgebung von w_1 , und damit ist $\tilde{\varphi}(t)$ auch nicht eine Konstante in $|t| \leq r$.

Da die Funktion $\tilde{\varphi}_{q_n}(t)$ schlicht in $|t| \leq r$ ist, und da die Grenzfunktion $\tilde{\varphi}(t)$ nicht eine Konstante ist, so ist $\tilde{\varphi}(t)$ auch schlicht in $|t| \leq r$. Daher ist $\tilde{\varphi}'(0) \neq 0$.

Es ist aber nach dem Weierstrassschen Satz $\lim \tilde{\varphi}'_{q_n}(0) = \tilde{\varphi}'(0)$. Folglich gibt es eine positive Zahl N , so dass es

$$\left. \begin{aligned} |\tilde{\varphi}'_{q_n}(0)| &> N \quad (n = 1, 2, \dots) \\ |\tilde{\varphi}'(0)| &> N \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

gilt.

Wir setzen $\tilde{\varphi}_{q_n}(0) = z_n$. Das Bildgebiet von $|t| \leq r$ durch die Funktion $z = \tilde{\varphi}_{q_n}(t)$ enthält nach dem Koebeschen Viertelsatz⁴⁾ und der Ungleichung (12) den Kreis von dem Mittelpunkt z_n und von dem Radius $\frac{rN}{4}$. Ebenfalls, wenn wir $\tilde{\varphi}(0) = z_0$ setzen, enthält das Bildgebiet von $|t| \leq r$ durch die Funktion $z = \tilde{\varphi}(t)$ den Kreis von dem Mittelpunkt z_0 und von dem Radius $\frac{rN}{4}$.

Der Punkt z_n ($n = 1, 2, \dots$) wird daher in dem Kreis $|z| < \left(1 - \frac{rN}{4}\right) + \gamma$ enthalten für jede positive Zahl γ .

Da die Folge $\{f_n(z)\}$ in $|z| < 1$ gleichmässig beschränkt ist, so ist die Folge $\{f_n^{(s)}(z)\}$ auch gleichmässig beschränkt in $|z| < 1$. Daher ist die Folge $\{f_n^{(s)}(z)\}$ nach dem Montelschen Satz gleichgradig stetig in $|z| <$

4) L. Bieberbach. Lehrbuch der Funktionentheorie. Vol. 11. S. 75.

$\left(1 - \frac{rN}{4}\right) + \gamma$. Also gibt es zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl δ , so dass es

$$|f_n^{(s)}(z) - f_n^{(s)}(z')| < \varepsilon \quad (13)$$

ist für alle n ($n = 1, 2, \dots$) und alle z und z' unter der Beschränkung $|z - z'| < \delta$ und $|z| < \left(1 - \frac{rN}{4}\right) + \gamma$ und $|z'| < \left(1 - \frac{rN}{4}\right) + \gamma$.

Es gibt eine Nummer N , so dass

$$|z_0 - z_n| < \delta \quad (14)$$

ist für alle n unter der Beschränkung $n > N$.

Aus (13) und (14) gilt es für alle $n > N$

$$|f_{q_n}^{(s)}(z_0) - f_{q_n}^{(s)}(z_n)| < \varepsilon. \quad (15)$$

Aus (15) ergibt es sich

$$|f^{(s)}(z_0)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_{q_n}^{(s)}(z_0)| \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_{q_n}^{(s)}(z_n)| - \varepsilon = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{s!^{\frac{1}{s}}}{s\tilde{\varphi}_{q_n}'(0)} \right|^{\frac{1}{s}} - \varepsilon. \quad (16)$$

Anderseits ist es nach der Cauchyschen Ungleichung

$$|\tilde{\varphi}_{q_n}'(0)| \leq \frac{1}{r}. \quad (17)$$

Aus (16) und (17) folgt unmittelbar

$$|f^{(s)}(z_0)| \geq \left| \frac{s!^{\frac{1}{s}} r}{s} \right|^{\frac{1}{s}} - \varepsilon.$$

Also ist $f^{(s)}(z) \neq 0$.

Wir nehmen nun eine ganze Zahl s_1 auf, derart dass $0 \leq s_1 < s$ ist. Es gibt zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl δ , so dass es

$$|f_n^{(s_1)}(z) - f_n^{(s_1)}(z')| < \varepsilon \quad (18)$$

ist für alle n ($n = 1, 2, \dots$) und alle z und z' unter der Beschränkung $|z - z'| < \delta$ und $|z| < \left(1 - \frac{rN}{4}\right) + \gamma$ und $|z'| < \left(1 - \frac{rN}{4}\right) + \gamma$.

Es gibt eine Nummer N , so dass es

$$|z_0 - z_n| < \delta \quad (19)$$

ist für alle n unter der Beschränkung $n > N$.

Aus (18) und (19) gilt es für alle $n > N$

$$|f_{q_n}^{(s_1)}(z_0) - f_{q_n}^{(s_1)}(z_n)| < \varepsilon. \quad (20)$$

Aus (20) ergibt es sich, wenn $s_1 > 0$ ist,

$$|f^{(s_1)}(z_0)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_{q_n}^{(s_1)}(z_0)| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_{q_n}^{(s_1)}(z_n)| + \varepsilon = \varepsilon.$$

Da ε eine willkürliche kleine positive Zahl ist, ist $|f^{(s_1)}(z_0)| = 0$.

Wenn $s_1 = 0$ ist, so ist es aus

$$|f_{q_n}(z_0) - f_{q_n}(z_n)| = |f_{q_n}(z_0) - w_1| < \varepsilon$$

für alle $n < N$. Daher ist

$$f(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{q_n}(z_0) = w_1.$$

Folglich gewinnen wir die Entwicklung

$$f(z) = w_1 + \frac{f^{(s)}(z_0)}{s!} (z - z_0)^s + \dots, \quad f^{(s)}(z_0) \neq 0.$$

Also gibt die Funktion $f(z)$ eine einundeindeutige und konforme Abbildung von einer Umgebung $U(z_0)$ von $z = z_0$ auf eine Umgebung $\tilde{U}(\tilde{w}_1)$ von $\tilde{w}_1$ auf K .

Wir nehmen die beiden willkürlichen, voneinander verschiedenen Punkte $\tilde{w}_2$ und $\tilde{w}_3$ auf K auf. Wir bezeichnen den Spurpunkt von $\tilde{w}_2$ bzw. $\tilde{w}_3$ mit w_2 bzw. w_3 . Der Punkt $\tilde{w}_2$ bzw. $\tilde{w}_3$ hat die bestimmte Ordnung $s_2 - 1$ bzw. $s_3 - 1$. Wir setzen $w - w_2 = t^{s_2}$ und $w - w_3 = t^{s_3}$.

Es gibt eine Umgebung $\tilde{U}(\tilde{w}_2)$ bzw. $\tilde{U}(\tilde{w}_3)$ von $\tilde{w}_2$ bzw. $\tilde{w}_3$ auf K , so dass die abgeschlossene Hülle von $\tilde{U}(\tilde{w}_2)$ bzw. $\tilde{U}(\tilde{w}_3)$ umkehrbar eindeutig und konform auf den abgeschlossenen Kreis $|t| \leq r_2$ bzw. $|t| \leq r_3$ sich abbilden lässt, und dass die abgeschlossene Hülle von $\tilde{U}(\tilde{w}_2)$ bzw. $\tilde{U}(\tilde{w}_3)$ keine Verzweigungspunkte, eventuell abgesehen von $\tilde{w}_2$ bzw. $\tilde{w}_3$, enthält, und dass die abgeschlossene Hülle von $\tilde{U}(\tilde{w}_2)$ und die abgeschlossene Hülle von $\tilde{U}(\tilde{w}_3)$ keine Punkte gemein haben.

In dem Gebiet $|t| < r_2 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) setzen wir $z = \varphi_{k_n}(w) = \varphi_{k_n}(w_2 + t^{s_2}) = \tilde{\varphi}_{k_n}(t)$. Es gibt dann eine Teilfolge von $\{\tilde{\varphi}_{k_n}(t)\}$, welche in $|t| \leq r_2$ gleichmässig konvergiert. Diese Teilfolge bzw. die Grenzfunktion bezeichnen wir mit $\{\tilde{\varphi}_{q_n}(t)\}$ bzw. $\tilde{\varphi}(t)$.

Ebenfalls, in dem Gebiet $|t| < r_3 + \varepsilon$ setzen wir $z = \varphi_{k_n}(w) = \varphi_{k_n}(w_3 + t^{s_3}) = \bar{\varphi}_{k_n}(t)$. Es gibt dann eine Teilfolge von $\{\bar{\varphi}_{k_n}(t)\}$, welche in $|t| \leq r_3$ gleichmässig konvergiert. Diese Teilfolge bzw. die Grenzfunktion bezeichnen wir mit $\{\bar{\varphi}_{q_n}(t)\}$ bzw. $\bar{\varphi}(t)$.

Es gibt eine positive Zahl N_1 , so dass

$$\left. \begin{aligned} |\tilde{\varphi}_{q_n}'(0)| &> N_1 \\ |\tilde{\varphi}(0)| &> N_1 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

gilt. Ebenfalls gibt es eine positive Zahl N_2 , so dass

$$\left. \begin{array}{l} |\bar{\varphi}_{q_n}^t(0)| > N_2 \\ |\bar{\varphi}^t(0)| > N_2 \end{array} \right\}$$

gilt.

Wir setzen $\bar{\varphi}_{q_n}(0) = z_{n,2}$ und $\bar{\varphi}(0) = z_2$. Das Bildgebiet von $|t| \leq r_2$ durch die Funktion $z = \bar{\varphi}_{q_n}(t)$ enthält nach der Formel (21) den Kreis von dem Mittelpunkt $z_{n,2}$ und von dem Radius $\frac{rN_1}{4}$. Ebenfalls enthält das Bildgebiet von $|t| \leq r_2$ durch die Funktion $z = \bar{\varphi}(t)$ den Kreis von dem Mittelpunkt z_2 und von dem Radius $\frac{rN_1}{4}$.

Wir setzen $\bar{\varphi}_{p_n}(0) = z_{n,3}$ und $\bar{\varphi}(0) = z_3$. Das Bildgebiet von $|t| \leq r_3$ durch die Funktion $z = \bar{\varphi}_{p_n}(t)$ enthält den Kreis von dem Mittelpunkt $z_{n,3}$ und von dem Radius $\frac{rN_2}{4}$. Ebenfalls enthält das Bildgebiet von $|t| \leq r_3$ durch die Funktion $z = \bar{\varphi}(t)$ den Kreis von dem Mittelpunkt z_3 und von dem Radius $\frac{rN_2}{4}$.

Da die Funktion $w = f_n(z)$ die einundeindeutige und konforme Abbildung von dem Kreis $|z| < 1$ auf B_n gibt, so haben das Bildgebiet von $|t| \leq r_2$ durch die Funktion $z = \bar{\varphi}_{p_n}(t)$ und das Bildgebiet von $|t| \leq r_3$ durch die Funktion $z = \bar{\varphi}_{p_n}(t)$ keine Punkte gemeinsam.

Andererseits wird der Kreis $|z - z_2| < \frac{rN_1}{8}$ bzw. $|z - z_3| < \frac{rN_2}{8}$ in dem Bildgebiet von $|t| \leq r_2$ bzw. $|t| \leq r_3$ durch die Funktion $z = \bar{\varphi}_{p_n}(t)$ bzw. $z = \bar{\varphi}_{p_n}(t)$, für genügend grosse n , enthalten. Daher haben der Kreis $|z - z_2| < \frac{rN_1}{8}$ und der Kreis $|z - z_3| < \frac{rN_2}{8}$ keine Punkte gemeinsam. Da $f(z_2) = w_2$ und $f(z_3) = w_3$ ist, bildet die Funktion $w = f(z)$ den Kreis $|z| < 1$ oder ein Teilgebiet von $|z| < 1$ einundeindeutig und konform auf K ab.

Wir wollen nun zeigen, dass das Bildgebiet von dem Kreis $|z| < 1$ durch die Funktion $w = f(z)$ mit der Riemannschen Fläche K übereinstimmt. Es sei $z = z_0$ ein Punkt in $|z| < 1$, so dass $f'(z_0) \neq 0$ ist. Wir nehmen einen in einer genügend kleinen Umgebung von $z = 0$ enthaltenen Punkt $z = z_1$ auf, und wir ziehen einen einfachen, von z_1 zu z_0 führenden Bogen l , so dass der Bogen l in $|z| < 1$ enthalten ist und auf dem Bogen l die Ableitung $f'(z)$ keineswegs verschwindet.

Wir können nach dem Heine-Borelschen Satz endlich viele abgeschlossene Kreisscheiben $S_1, S_2, \dots, S_s$ derart angeben, dass jeder Punkt von l dem Inneren mindestens einer dieser Kreisscheiben angehört, und dass die

Ableitung $f'(z)$ auf jeder dieser Kreisscheiben keineswegs verschwindet.

Nach dem Rouchéschen Satz verschwindet die Ableitung $f'_n(z)$ für genügend grosse $n > N_1$ auf jeder dieser Kreisscheiben keineswegs. Es gibt daher eine Zahl M , so dass es

$$\left. \begin{array}{l} |f'(z)| > M \\ |f'_n(z)| > M \text{ für } n > N \end{array} \right\} \quad (22)$$

auf jeder $S_i (i=1, 2, \dots)$ gilt.

Wir können ein abgeschlossenes Intervall $0 \leq u \leq 1$ auf den Bogen l topologisch abbilden, so dass $u=0$ und $z=z_1$ zueinander sich ordnen lassen. Diese Abbildung bezeichnen wir mit $z=z(u)$. Wir nehmen nun an, dass es auf dem Intervalle $0 \leq u \leq 1$ einen den folgenden Eigenschaften genügenden Punkt $u=u_0$ gibt.

1. Der Punkt $f(z(u_0))$ ist nicht in K enthalten.
2. Jeder Punkt $f(z(u))$ für $0 \leq u < u_0$ ist in K enthalten.

Es gibt dann einen Punkt $u=u_1$ auf $0 \leq u < u_0$ mit den folgenden Eigenschaften.

1. Für eine genügend kleine positive Zahl r ist der abgeschlossene Kreis $|z-z(u_1)| \leq r$ in der Vereinigungsmenge $S_1 + S_2 + \dots + S_s$ enthalten, und $f(z)$ ist in $|z-z(u_1)| \leq r$ schlicht.

2. Für jedes u in $u_1 \leq u \leq u_0$ ist der Punkt $z=z(u)$ in dem obigen Kreis $|z-z(u_1)| < r$ enthalten.

Nach der obigen Bedingung 1 ist $|f(z) - f(z(u_0))| \neq 0$ auf $|z-z(u_1)| = r$. Der absolute Betrag $|f(z) - f(z(u_0))|$ nimmt seine kleinste obere Grenze an einem Punkt der Kreisperipherie $|z-z(u_1)| = r$ an. Diese kleinste obere Grenze bezeichnen wir mit ρ . Es gibt eine positive Nummer N , so dass es $|f(z) - f_n(z)| < \rho$ ist für alle n und z unter der Beschränkung $n > N$ und $z \in$ der Kreisperipherie $|z-z(u_1)| = r$. Nach dem Rouchéschen Satz nimmt daher die Funktion $f_n(z)$, für $n > N$, den Wert $f(z(u_0))$ genau nur einmal in $|z-z(u_1)| < r$ an.

Wir setzen $f_n(z_n) = f(z(u_0))$, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$. Daher enthält das Bildgebiet von $|z-z_n| < \frac{r}{2}$ durch die Funktion $f_n(z)$ den Kreis von dem Mittelpunkt $f(z(u_0))$ und von dem Radius $\frac{rM}{8}$. Folglich enthält das Bildgebiet von $|z-z(u_0)| < \frac{r}{2}$ durch die Funktion $f(z)$ den Kreis von dem Mittelpunkt $f(z(u_0))$ und von dem Radius $\frac{rM}{8}$.

Das Bildgebiet von $|z-z_n| < \frac{r}{2}$ durch die Funktion $f_n(z)$ ist nach der

Voraussetzung des Satzes in B_n enthalten. Da K der Kern von $\{B_n\}$ ist, so muss das Bildgebiet von $|z - z(u_0)| < \frac{r}{2}$ durch die Funktion $f(z)$, nach der Kern-Bedingung d° , in K enthalten sein. Also haben wir gezeigt, dass das Bild von der kleinen Umgebung von $z = z_0$ durch die Funktion $w = f(z)$ in der Fläche K enthalten, wenn $f'(z_0) \neq 0$ ist.

Es sei nun $z = z_0$ ein Punkt in $|z| < 1$, so dass die Ableitung $f'(z_0) = 0$ ist. Wir nehmen einen in einer genügend kleinen Umgebung von $z = 0$ enthaltenen Punkt $z = z_1$ auf, und wir ziehen einen einfachen, von z_1 zu z_0 führenden Bogen l , so dass der Bogen l in $|z| < 1$ enthalten ist und auf dem Bogen l , ausser dem Punkt z_0 , die Ableitung $f'(z)$ keineswegs verschwindet. Auf ganz analoge Weise mit der Obigen, können wir zeigen, dass das Bildgebiet von einer kleinen Umgebung von $z = z_0$ durch die Funktion $f(z)$ in der Fläche K enthalten ist.

Also bildet die Funktion $w = f(z)$ den Kreis $|z| < 1$ einundeindeutig und konform auf der Fläche K ab. Wir wollen schliesslich zeigen, dass die gegebene Folge $\{f_n(z)\}$ selbst in dem Kreise $|z| < 1$ konvergiert. Angenommen in der Tat, dass die Folge $\{f_n(z)\}$ nicht in $|z| < 1$ konvergiert. Es gibt dann die beiden Teilfolgen $\{f_{n_i}(z)\}$ und $\{f_{j_i}(z)\}$ von $\{f_n(z)\}$, und zwar, dass sowohl $\{f_{n_i}(z)\}$ als auch $\{f_{j_i}(z)\}$ in dem Kreis $|z| < 1$ konvergent ist. Die Grenzfunktion von $\{f_{n_i}(z)\}$ bzw. $\{f_{j_i}(z)\}$ bezeichnen wir mit $F_1(z)$ bzw. $F_2(z)$. Die Funktion $F_1(z)$ bzw. $F_2(z)$ nimmt die Form an.

$$F_1(z) = b_p z^p + \dots, \quad b_p > 0$$

$$F_2(z) = c_p z^p + \dots, \quad c_p > 0.$$

Da $\{B_n\}$ gegen K strebt, bildet sowohl $F_1(z)$ als auch $F_2(z)$ den Kreis $|z| < 1$ einundeindeutig und konform auf die Fläche K ab. Daher muss $F_1(z) = F_2(z)$ sein. W. z. b. w.

§ 3. Koeffizienten der p -wertigen Funktionen.

Satz III. *Es sei $w = f(z)$ eine, in dem Kreise $|z| < 1$ reguläre und normierte, p -wertige Funktion, derart dass die Ableitung $f'(z)$ keineswegs in $|z| < 1$ verschwindet. Wir können dann eine Folge der p -wertigen Funktionen $\{f_n(z)\}$ auswählen, derart dass jede $f_n(z)$ zu der Familie (L) gehört und $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$ ist.*

Beweis. Wir setzen $w = \frac{f(rz)}{r^p} = f_r(z)$, wo $0 < r < 1$ ist. Die Funktion $f_r(z)$ ist dann eine in $|z| < 1$ reguläre, normierte und beschränkte, p -wertige Funktion. Wir nehmen eine zunehmende Folge $\{r_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) auf, so dass jede $r_n > 0$ ist und $r_n \rightarrow 1$ mit $\frac{1}{n}$ gegen 0 strebt. Die Folge der

Funktionen $\{f_{r_n}(z)\}$ strebt dann in jedem abgeschlossenen Teilgebiet in dem Kreis $|z| < 1$ gleichmässig gegen $f(z)$ strebt. Folglich können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit von Anfang an annehmen, dass die gegebene p -wertige Funktion $f(z)$ beschränkt ist.

Die Funktion $w = f(z)$ bildet den Kreis $|z| < 1$ einundeindeutig und konform auf die p -blättrige Riemannsche Fläche, welche über der w -Ebene liegt. Es gibt⁵⁾ dann die Greensche Funktion $G(w, 0)$ zum Pole $w = 0$ der Fläche R .

Es sei $\{\lambda_n\}$ eine abnehmende Folge der positiven Zahlen, so dass λ_n mit $\frac{1}{n}$ gegen 0 strebt. Die Niveau-Kurve $G(w, 0) = \lambda_n$ zerlegt die Fläche R in die beiden Teilflächen. Eine Fläche von diesen Teilflächen enthält den über $w = 0$ liegenden Punkt. Diese Teilfläche bezeichnen wir mit R_n . Die Fläche R ist dann offenbar der Kern der Flächen-Folge $\{R_n\}$.

Wir bezeichnen das Maximum der Entfernungen zwischen dem Punkt $w = 0$ und der Spurpunkte der Grenzpunkte von R_n mit d_n . Es ist offenbar $d_n > 0$. Wir nehmen eine zunehmende Folge der positiven Zahlen $\{\rho_q\}$ von der Art, dass ρ_q gegen d_n mit $q \rightarrow \infty$ strebt. Die Funktion $w = z^p$ bildet den Kreis $|z| < \rho_q^{\frac{1}{p}}$ einundeindeutig und konform auf die über der w -Ebene liegende Riemannsche Fläche S ab. Die Fläche S wird durch die Begrenzung⁶⁾ von R_n in die höchstens abzählbaren Teilflächen zerlegt. Unter diesen Teilflächen enthält nur eine einzige Teilfläche den über dem Punkt $w = 0$ liegenden Punkt. Diese Teilfläche bezeichnen wir mit T . Die Begrenzung von T ist die Vereinigungsmenge von einer Teilmenge der Begrenzung von S und einer Teilmenge der Begrenzung von R_n . Diese Teilmenge der Begrenzung von R_n besteht aus einigen analytischen Kurven. Indem wir im notwendigen Fall eines Stück dieser analytischen Kurven beseitigen, bekommen wir eine Riemannsche Fläche S_n , welche mit der Riemannschen Fläche S — einige Schlitz übereinstimmt.

Wir bilden den Kreis $|z| < 1$ einundeindeutig und konform auf die Fläche S_n ab durch die Funktion $w = f_n(z) = a_p z^p + \dots$, $a_p > 0$. Die Funktion $w = f_n(z)$ gehört dann zu der Familie (L) , und die $w = f_n(z)$ approximiert mit beliebiger Genauigkeit die gegebene Funktion $w = f(z)$. W. z. b. w.

Aus dem obigem Satze folgt ohne weiteres

Satz IV. *Es sei*

$$w = f(z) = z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \dots$$

5) R. Nevanlinna. Uniformisierung. S. 204.

6) Die Begrenzung von R_n ist das Bild von $\log \frac{1}{z} = \lambda_n$ durch die Funktion $w = f(z)$.

eine, in dem Kreis $|z| < 1$ reguläre und normierte, p -wertige Funktion von der Art, dass die Ableitung $f'(z)$ keineswegs in $|z| < 1$ verschwindet. Es gilt dann

$$|a_{p+1}| \leq 2p.$$

Diese Schranke kann nicht verbessert werden.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
OKAYAMA UNIVERSITY.

(Received December 20, 1960)