岡山大学経済学会雑誌 41（３），2009，47 ～ 62

世界的景気循環の影響下における小国の為替レート変動に関する覚書き

横　尾　昌　紀

概　　要

本稿では，開放マクロ経済学でよく利用される Mundell-Fleming モデルの動学版を２つの方向に拡張し，そこから得られる為替レートの変動を調べる。第１の拡張は，定常状態での局所的な Marshall-Lerner 条件を維持しつつ，大域的にはそれが満たされない状況を定式化することである。より詳しく言うと，通常の定常状態の近傍では小国である自国の通貨の減価は純輸出を増加させるが，為替レートがその範囲を超えると，逆に自国通貨の減価が純輸出を減少させるという状況である。第２の拡張は，大国である外国，あるいは世界経済，が持続的かつ周期的な景気循環に曝されている状況をモデルに組み入れることである。このような設定のもとで，為替レートが自国通貨高均衡と自国通貨安均衡のそれぞれの周囲を経巡るような複雑な変動を生じることを計算機による数値計算により観察する。

１　はじめに

本稿では，学部教育でも頻繁に用いられる，開放マクロ経済学における変動相場制の Mundell-Fleming モデルを動学的な観点から再検討する。静学的な Mundell-Fleming モデルは，岡山大学経済学部でも通常２年次配当のマクロ経済学関連の講義科目の中で例年扱われており，全国的にみても人気のあるマクロ経済モデルのひとつと言えよう。

Mundell-Fleming モデルは，短期の財市場と金融市場を扱う IS-LM モデルを開放経済に拡張する第一段階的なモデルとして教科書に登場する。議論の単純化のため外国の産出量や金利を所与として扱う都合上，自国の活動が外国に影響しないよう，自国を「小国」とする想定がなされる。また，財政政策や金融政策が開放経済下で，閉鎖経済の場合とどのように異なる含意をもつかという点がこのモデルを通して主として比較静学の観点から議論される。

比較静学の含意が意味をもつためには，当然，均衡状態がなんらかの意味で動学的安定性をもつことが要求されるであろう。後述する最初の動学的定式化では，均衡は鞍点（saddle point）となる。このもとで比較静学が意味をもつためには，長期的な完全予見（long-run perfect foresight）という極端に強い合理性を想定しなければならない。類似の文脈でのこの議論について，Kouri（1976）や Dornbusch（1976）を参照せよ。そうでなければ，経済は時間とともに定常的な均衡から乖離し‘崩壊’してしまうからである。一方，この仮説を維持しようとするならば，モデル自体の構造を変更することで均衡の安定性の特性が変化した場合，均衡経路が無数に発生するという不決定性（indeterminancy）の問題に陥る危険性がある。

本稿はこのジレンマからの脱却に対する試みとして，長期的完全予見という超合理性の仮定を捨て，

代わりに非線形性を導入する。これにより，均衡は鞍点のままにしつつ，終局的有界性により経済の崩壊も回避できることを見ていく。

また持続的な為替レートの変動についても検討する。いわゆるケインズ的あるいはポスト・ケンジアン的な文献では，ひとつの流れとして，非線形性を投資関数あるいは貯蓄関数に想定することで，持続的な内生変動を再現しようという試みがなされてきた。例えば，非線形の加速度原理モデルの先駆的業績に関しては，Goodwin（1951）を，速度原理に関しては，Kaldor（1940）や Chang and Smyth（1971）を，期待需要の投資関数への導入に関しては，Benassy（1984）をそれぞれ参照せよ。Yokoo（2005）では，動学的 Mundell-Fleming モデルの設定で，純輸出が自国通貨の減価に対し均衡の近傍でのみ減少するという仮定と，Kaldor 型の非線形投資関数のもとで，その経済系が漸近安定な極限周期軌道による持続的振動を発生させることを示した。

本稿では，投資関数への非線形性は導入せず，純輸出が自国通貨の減価に対し均衡の近傍でのみ増加するという非線形性を導入する。この設定は，通常の鞍点型均衡の周囲に 1 対の別の局所漸近安定な均衡（円高および円安均衡）を発生させる。このことは過渡的な振動を生み出しえるが，Yokoo（2005）で示されたような持続的な振動を再現するこはできない。これらの設定に加えて，外国の金利が周期的に振動するという仮定を導入する。これは所与としている外国の経済が景気循環に曝されているという状況を決定論的枠組みでモデル化したものである。このような系は強制振動系とも呼ばれる。注目すべき結果は，外国の周期的な景気循環の影響を受けた国内経済は必ずしも周期的変動だけを呈するのではなく，決定論的なモデルにもかかわらず，しばしば非周期的で非常に乱雑な変動，いわゆるカオス的変動，を呈することである。とりわけ，円高均衡の周辺と円安均衡の周辺を複雑に行き来する為替レートの変動パターンが数値シミュレーションにより見てとることができる。異なる文脈だが，カオス的景気循環をもたらす強制振動系の数少ない例としては，政治的景気循環モデルのシミュレーション分析に関して，Sasakura（1995）を見よ。

2 動学的 Mundell-Fleming モデルのひとつの原型

Mundell-Fleming モデルには様々な異なる設定での定式化が考えられるが，最終的に，係数を特定化したモデルを扱うので，ここではやや一般性を犠牲にし単純化を図る。まず財市場と貨幣市場が共に不均衡となることを許容する以下の微分方程式系による定式化を考えよう。

$$\dot{Y} = I(R) + X(E) - S(Y), \tag{1}$$

$$\delta\dot{R} = L(Y, R) - M, \tag{2}$$

$$\dot{E} = R - R_f\,. \tag{3}$$

ここで，内生変数の Y, R, E はそれぞれ，自国の実質 GDP，自国の実質金利，自国通貨建て実質為替レートの自然対数値である。短期経済を考えるので，物価水準は一定かつ期待インフレ率はゼロとする。また，R_f は外国の実質金利，M は実質貨幣供給量である。R_f は当面所与の定数と考える。$I(R)$, $X(E)$, $S(Y)$, $L(Y, R)$ は，それぞれ投資関数，純輸出（＝実質輸出額 －実質輸入額）関数，貯蓄関数，実

質貨幣需要関数である。各関数は十分滑らかで，通常のように，各（偏）導関数に関して，

$$I'(R) < 0, \quad 0 < S'(Y) < 1, \quad L_Y(Y,R) > 0, \quad L_R(Y,R) < 0$$

を仮定する。純輸出関数 $X(E)$ の性質については後ほど議論することにしよう。

時間の関数である各内生変数 Y, R, E の上の点は時間 t に関する微分を表す。（1）式は，財市場（IS バランス）の不均衡の調整を表し，GDP の時間変化が超過需要に比例すると仮定する。ただし，時間の尺度を調整することで，比例定数を 1 としてある。（2）式は，貨幣市場（LM バランス）の不均衡調整を表し，金利の時間変化が貨幣の超過需要に比例すると仮定する。ただし，$\delta \geq 0$ は調整係数（の逆数）である。δ がゼロに近いほど，貨幣市場の調整が速やかである。（3）式は，カバーなしの金利平価の近似式である。すなわち，投資家が資金を国内外に移動させることで利鞘を稼ぐ機会がどの時点でももはや存在しないことを表す。さらに為替レートの期待成長率は実際の成長率と等しいと仮定する。つまり，為替レートの予測は完全予見（perfect foresight）である。ここで，Kouri（1976）の表現に従い，完全予見を，無限先の時間 t での状態まで予見する長期的完全予見か，各瞬間毎に予測と現実が整合するという意味での近視眼的完全予見（myopic perfect foresight）かに想定する必要があるが，これについてはこの節の最後で議論する。

モデルの次元を下げることで分析を容易にすることを考えよう。貨幣市場は財市場に比べ，調整速度が速いと想定できる。したがって，最初の分析としては，$\delta = 0$ として，貨幣市場が常時均衡していると近似的に考えるのは妥当な選択であろう。これにより，（2）式より，LM バランスは

$$L(Y,R) = M$$

と書け，

$$R = \varphi(Y) \tag{4}$$

をその陰関数とする。ただし，$\varphi'(Y) > 0$である。また，貨幣供給 M については，本稿では議論しないので省いた。（4）式を（1）式と（3）式に代入すれば，この経済系は，

$$\dot{Y} = I(\varphi(Y)) - S(Y) + X(E), \tag{5}$$

$$\dot{E} = \varphi(Y) - R_f \tag{6}$$

と縮約できる。

まず判断の基準として，Marshall-Lerner 条件が大域的に満たされた場合，すなわち，任意の E に対し，

$$X'(E) > 0$$

が満たされた場合の（5）-（6）の動学を簡単に調べてみる。(Y, E)- 平面を考える。$\dot{Y} = 0$ 曲線の傾きは，単純な計算により，

$$\left.\frac{dE}{dY}\right|_{\dot{Y}=0} = -\frac{I'\varphi' - S'}{X'} > 0$$

なので，$\dot{Y} = 0$ 曲線は常に右上がりである。他方，（6）式より，$\dot{E} = 0$ 曲線は垂直な直線である。したがって均衡は存在すれば一意的である。以下その存在を仮定し，それを主均衡と呼び，$P = (Y^*, E^*)$ と表記しよう。均衡に「主」をつけるのは，非線形性を導入したとき，複数均衡が発生するので，新たな均衡と区別するためである。主均衡 P で評価した（5）-（6）のヤコビ行列 J は，

$$J(P) = \begin{pmatrix} I'\varphi' - S' & X' \\ \varphi' & 0 \end{pmatrix}\Bigg|_P \qquad (7)$$

となる。その行列式は，

$$|J(P)| = -\varphi'(Y^*)X'(E^*) < 0$$

であるので，主均衡は鞍点であることがわかる。

ここで議論はひとつの岐路に立つことになる。ひとつの議論は以下の通りである。もし初期条件が Y と E に関して歴史的に状態空間上に与えられるものとしよう。そうなると，特殊な初期条件を除いて，解軌道は発散する。したがって，このモデルは経済を記述すると考えるには不適格であるとし，モデルを破棄するというものである。

いまひとつの議論では，経済主体にの期待形成にさらに強い合理性を仮定する。為替レートの期待形成が瞬間的（あるいは近視眼的）な完全予見であるだけでなくで，なおかつ長期的であるならば，自国ないし他国の通貨価値が失われるような軌道を排除できるであろう，というものだ。あるいは，最適成長モデルにおける横断性条件に相当する条件を暗黙に想定することで同様の結果を導く。例えば，Kouri（1976）の議論を参照せよ。いずれにせよ，後者の議論では，均衡の安定多様体上に経済状態が制限され，時間とともに経済は定常的な均衡に単調に収束する。現在では，微細な違いはあれ，多くのマクロ経済モデルで後者の方法論が主として用いられている。

3　第３の道：非線形性の導入

本稿では，前節で述べた長期的な完全予見を想定せず，なおかつ，均衡が鞍点であるという性質も残しつつ，自国の通貨価値も外国の通貨価値のいずれもゼロにならないという維持可能性を生み出す第３の道を探っていくことにしよう。

そのために，純輸出関数 $X(E)$ の性質を再検討する。直観的に理解しやすくするため，為替レートを $e = \exp(E)$ とし，純輸出関数をここで，$\tilde{X}(e) = X(\ln(e))$ とする。いま輸出関数を $G(e)$，輸入関数を $H(e)$ とすれば，純輸出関数は，

$$\tilde{X}(e) = G(e) - eH(e) \qquad (8)$$

と表される。また通常の仮定により，$G(e) \geq 0$, $H(e) \geq 0$, $G'(e) \geq 0 \geq H'(e)$ である。純輸出関数の導関数は，

$$\tilde{X}'(e) = G'(e) - H(e) - eH'(e) \qquad (9)$$

であるので，符号は定まらない。まず，e がゼロに近いときを考える。自国を日本（通貨は円），外国を米国（通貨はドル）とすれば，これは極端な円高ドル安の状況を想定していることになる。このときは輸入量 $H(e)$ は大きな正の値をとるであろう。また，輸出量 $G(e)$ は一定水準以下の e に対し，一様にゼロに近い値をとっているとすれば，$G'(e) \approx 0$ と仮定するのが妥当であろう。また，輸入側も飽和状態に達しているとすれば，やはり $H'(e) \approx 0$ であろう。この結果，過度の円高水準，すなわち，十分ゼロに近い e に対しては，$\tilde{X}'(e) < 0$ を仮定するのが妥当である。

逆に，e が十分大きいときを考える。極端な円安の状況である。この場合は直観的な推論が困難である。実際のところ，$\tilde{X}'(e)$ の符号がどちらの場合でも興味深い議論はできるのだが，本稿では，ある種の大域的な安定性を考えたいので，それを実現するために，e が大きいとき，$\tilde{X}'(e) < 0$ となると仮定する。$\tilde{X}'(e) < 0$ を想定した場合については最後の節で言及する。

以上の考察を踏まえて，$X(E)$ の形状について以下のような非線形性を導入する。主均衡の為替レート（の自然対数）の水準を E^* とし，その近傍とそれ以外に為替レートの領域を分割する。つまり，$\bar{E} > E^* > \underline{E}$ となる２つの数 $\bar{E}$ と $\underline{E}$ があって，$E < \underline{E}$ あるいは $E > \underline{E}$ のとき，$X'(E) < 0$，$\underline{E} < E < \bar{E}$ のとき，$X'(E) > 0$ と仮定する。さらに単純化のために，$X(E)$ を上記の満たす連続な区分的アファイン（以下慣習に従って「区分線形」と呼ぶ）と仮定する。

4　外国の景気循環

大国である外国，あるいは当該国以外の諸外国の総体と考えてもよいが，これが景気循環をしている状況をモデルに組み入れる。本来，財市場における輸出や輸入を通じて，また，国際金融市場を通じて外国の景気循環の影響は自国に影響するはずであるが，議論の単純化のため，財市場を通じての景気循環の影響の経路を無視する。（６）式より，景気循環は外国の金利のみを変動させると仮定しよう。より具体的には，

$$R_f = \rho - \varepsilon \cos \omega t \tag{10}$$

と仮定する。ただし，$\rho > 0$，$\varepsilon \geq 0$，$\omega > 0$ である。$\varepsilon = 0$ のとき，外国金利は一定であり，景気循環が発生していない状況に対応する。外国で景気循環が発生している $\varepsilon > 0$ のとき，外国金利は ρ の周りを周期 $2\pi/\omega$ で周期変動する。

5　区分線形為替レート動学モデル

さらにモデルを単純化するために，純輸出関数以外のマクロ関数は全て線形であると仮定する。また，煩雑さを回避するために記号はそのままで，(10) 式の $\varepsilon = 0$ のときの主均衡 P を原点 O=(０,０) に移すように（５)-(６）式および (10) 式を適当に変数変換すると，

$$\dot{Y} = -aY + X(E), \tag{11}$$

$$\dot{E} = Y + \varepsilon \cos \omega t \tag{12}$$

を得る。ここで，

$$X(E) = \begin{cases} -\beta E - (\alpha + \beta) & \text{if } -1 > E, \\ \alpha E & \text{if } \theta > E \geq -1, \\ -\gamma E + \theta(\alpha + \gamma) & \text{if } E \geq \theta. \end{cases} \tag{13}$$

ただし，a > 0，$\theta > 0$，$\alpha > 0$，$\beta > 0$，$\gamma > 0$ である。便宜上，(*Y*, *E*)- 平面を３つの領域に分割しておこう。

$$\begin{aligned} V_L &= \{(Y,E) \in \mathcal{R}^2 \mid -1 > E, Y \in \mathcal{R}\}, \\ V_O &= \{(Y,E) \in \mathcal{R}^2 \mid \theta > E \geq -1, Y \in \mathcal{R}\}, \\ V_H &= \{(Y,E) \in \mathcal{R}^2 \mid E \geq \theta, Y \in \mathcal{R}\} \end{aligned}$$

このモデルは，パラメータの制約を除けば，区分線形版の Duffing 方程式と類似の構造をもっていることが分かる。Duffing 方程式の概観については，Guckenheimer and Holmes（1983）などを参照せよ。以下でこのモデル（11)-(13）について議論する。

6　外国に景気循環が存在しない場合

外国で景気循環が発生していない場合は，(12）式において，$\varepsilon = 0$ となる。このとき (*Y*, *E*)- 平面上で，$\dot{Y} = 0$ 曲線と $\dot{E} = 0$ 曲線は図 1 のようになる。$\dot{E} = 0$ 曲線は縦軸と一致する。主均衡である原点近辺では，$\dot{Y} = 0$ 曲線は右上がりであるが，原点から上あるいは下に $\dot{Y} = 0$ 曲線をたどると，屈折していることが分かる。さらに重要なことは，縦軸上，原点の上下に１対の新たな均衡が発生していることである。これらを主均衡に対し，便宜上，副均衡と呼んでおこう。上側の副均衡を

$$P_H = \left(0, \frac{\theta(\alpha + \gamma)}{\gamma}\right),$$

下側の副均衡を

$$P_L = \left(0, -\frac{\alpha + \beta}{\beta}\right)$$

と書く。$O \in V_O, P_L \in V_L, P_H \in V_H$ であることに注意する。P_H を「円安均衡」，P_L を「円高均衡」と呼んでもよいであろう。各副均衡に対応するヤコビ行列は，

$$J(P_L) = \begin{pmatrix} -a & -\beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J(P_H) = \begin{pmatrix} -a & -\gamma \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

となる。パラメータの条件から，P_H と P_L は共に沈点であることが分かる。仮に，$a = 0$ のとき P_H と P_L は渦心点（center）となることに注意する。十分小さな正の a に対しては，具体的には，$2\sqrt{\beta} > a > 0$となる a に対して P_L は，また，$2\sqrt{\gamma} > a > 0$となる a に対して P_H は渦状沈点となる。以下では十分小さな a を想定する。これは，限界貯蓄性向が低く，投資の金利弾力性が小さく，かつ，LM 曲線が水平に近い（流動性の罠のような状態）といった状況に対応する。

典型的な以下のパラメータ値に対して，$\varepsilon = 0$ のもと，各副均衡の吸引鉢を計算したものを図 2

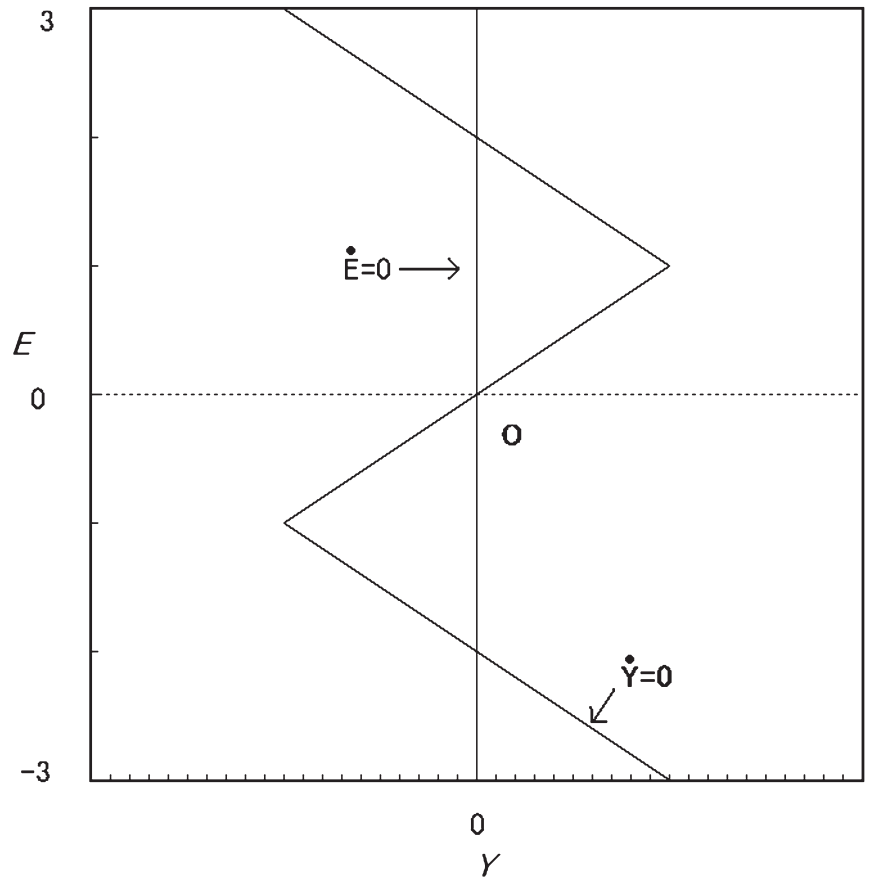

図１：$\dot{E}=0$ 曲線と $\dot{Y}=0$ 曲線。$\dot{E}=0$ 曲線は縦軸と一致する。$\dot{Y}=0$ 曲線は屈折した曲線になる。

に示す。

$$\alpha=\beta=\gamma=\theta=\omega=1,\quad a=0.1. \tag{15}$$

黒の領域の内部が $P_H=(0,2)\in V_H$ の吸引鉢を，白の領域内部が $P_L=(0,-2)\in V_L$ の吸引鉢を表す。境界は主均衡の安定多様体である。原点から十分離れた初期条件 (Y_0, E_0)，仮に P_L の吸引鉢にあるとすれば，その軌道は白い帯状の回廊に沿って，反時計周りに回りに，３つの均衡を取り囲みながら大きく回転し，最終的に P_L の周囲を渦巻きながら，P_L に収束する。

注意しておきたいのは，長期的に経済は円高均衡 P_L か円安均衡 P_H のいずれかに到達するが，主均衡には極めて特異な場合を除いて到達しえないということである。仮に，我々が破棄した長期的完全予見を仮定したとしても，与えられた Y_0 に対し，少なくともある E の区間のどのような初期時点の為替レート E_0 でも，その軌道はいずれかの均衡に収束する。その中で，主均衡に収束する，測度ゼロの，主均衡の安定多様体上の点が選ばれるための何らかの合理性を見出すことは困難である。

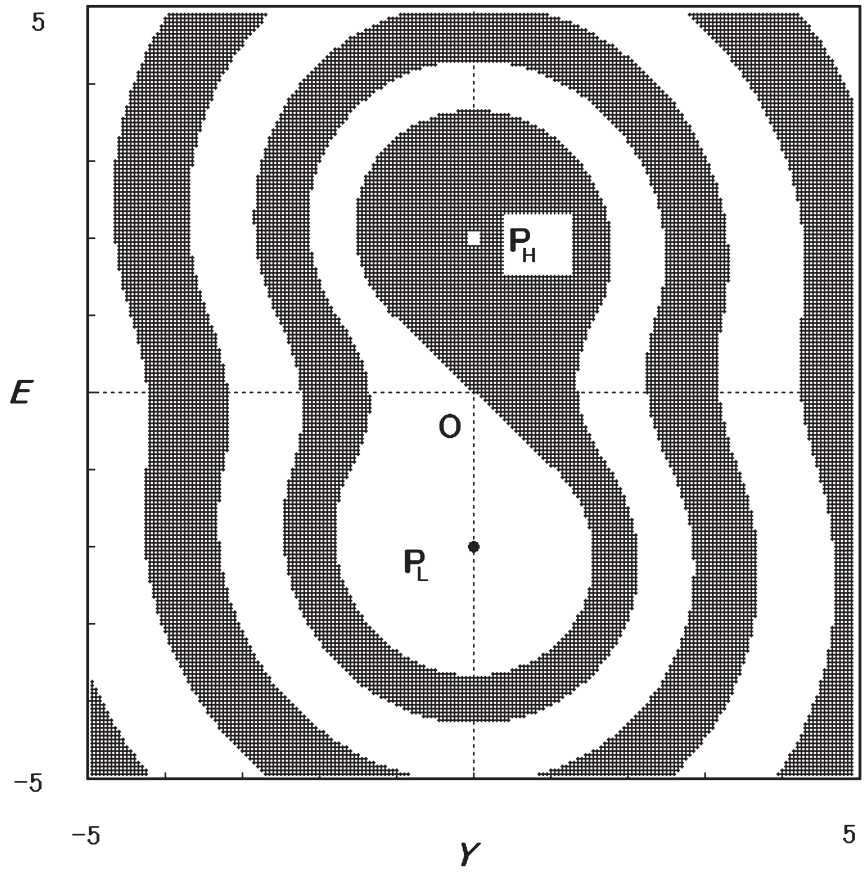

図２：円安均衡 $P_H = (0, 2)$ の吸引鉢と円高均衡 $P_L = (0, -2)$ の吸引鉢。図の黒い部分が P_H の，白い部分が P_L の吸引鉢である。境界は鞍点型の主均衡 $O = (0, 0)$ の安定多様体である。

7　外国に景気循環が存在する場合

パラメータを（15）に保ちつつ，(11)-(13）における，外国の景気循環の振幅 ε を大きくしてみよう。ε が十分小さな正の値である場合，外国の景気循環がない $\varepsilon = 0$ の場合と比べ，経済変動のパターンに関して，定性的には当然ながら振動が加わるので大きく異なるが，定量的に大きな違いは観察できない。実際，ε が十分小さな場合，解軌道は終局的に V_L の内部か，あるいは V_H の内部に閉じ込められる。V_L や V_H に制限された（11)-(13）の流れは線形なので，強制振動項の周期である周期 2π の周期変動が長期的に観察されることになる。

さらに ε を大きくとって，$\varepsilon = 0.34$ のところで，解軌道の (Y, E)- 平面への射影を図 3 に示す。以下，

各図の作成に関して，過渡的な部分は取り除いてある。強制振動項の振幅が大きくなったので，ひとつの領域 (V_L あるいは V_H) に解軌道がもはや閉じ込められることはなくなった。図 3 は，経済が 3 つの $\varepsilon = 0$ のときの均衡 P_H, O, P_H を取り巻く周期軌道に収束する状況を示している。自励系でないため，Poincaré 断面を取り，次元を落として観察してみる。外国金利の強制振動項が周期 2π なので，時点 $t_0 + z2\pi$ ($z \in Z$) ごとに (Y, E)- 平面を同一視することで，解軌道を離散化させる。これは 2 次元平面上の同相写像（Poincaré 写像）を導く。Poincaré 断面でみると，図 3 の周期軌道は，Poincaré 写像の周期アトラクタに対応するが，その周期は 7 であることが図 4 から見てとれる。図 5 は対応する為替レートの時系列である。

次に $\varepsilon = 0.7$ として，(11)-(13) の数値計算をしてみる。解軌道の (Y, E)- 平面への射影を図 6 に示

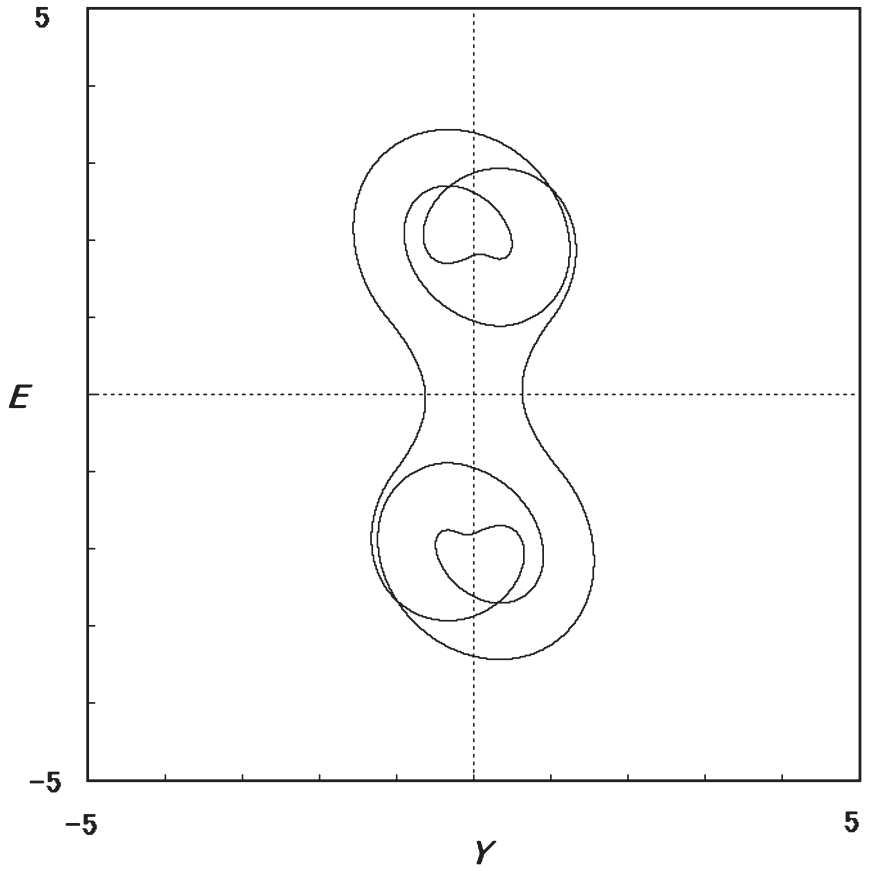

図 3：周期的変動への収束。$\varepsilon = 0.34$ のとき，(Y, E)- 平面で解軌道の，周期軌道への収束が観察される。

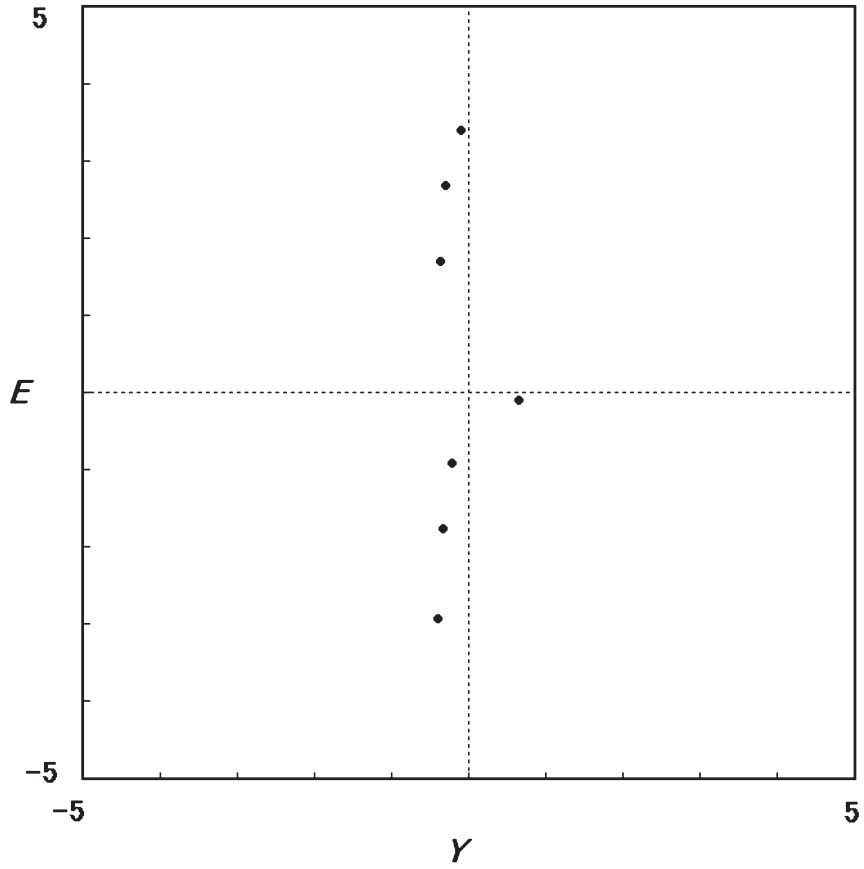

図４：Poincaré 断面図。$\varepsilon = 0.34$ のとき，図３の Poincaré 断面図をとると，対応する Poincaré 写像の周期７の周期アトラクタが観察される。見やすいように，点を強調してある。

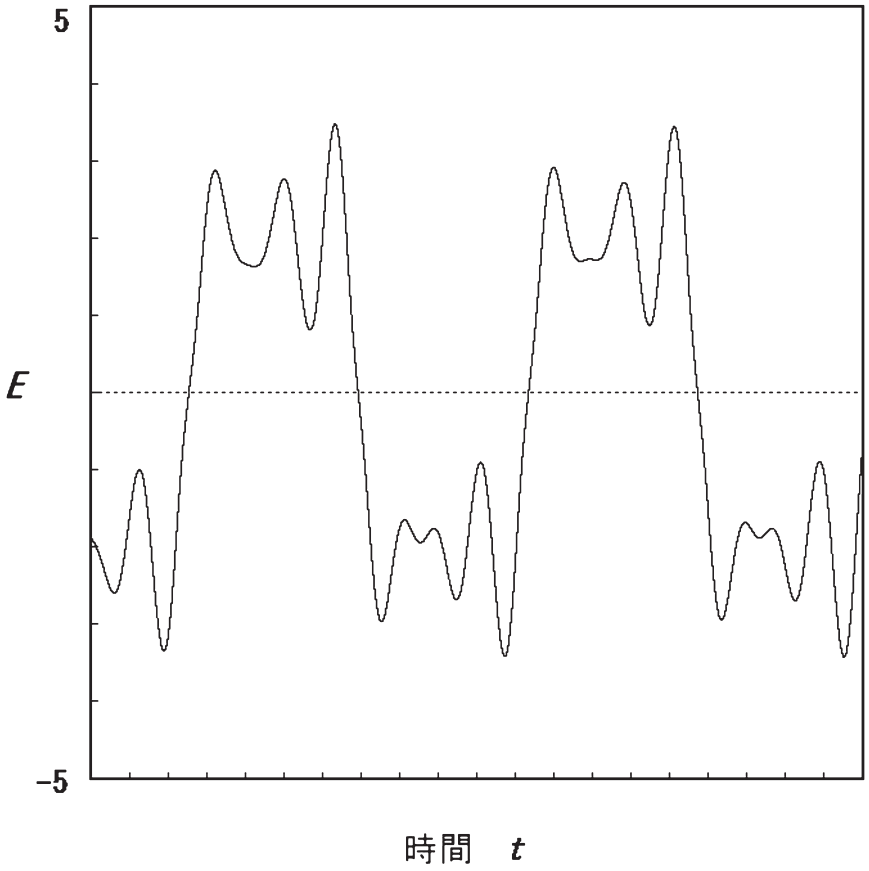

図５：為替レートの時系列。図３に対応する，周期変動の時系列のプロット。$\varepsilon = 0.34$。

す。一見して，周期的な変動に収まることがないような乱雑な振る舞いである。対応する Poincaré 断面を図 7 に示すと，図 4 とは対照的に，‘奇妙なアトラクタ’が浮かび上がる。対応する為替レートの時系列を図 8 に示す。３つの $\varepsilon = 0$ のときの均衡 P_H, O, P_H に対応する為替レートの各水準 $E = 2, 0, -2$ の各近辺を経巡る，不規則な変動が持続する。

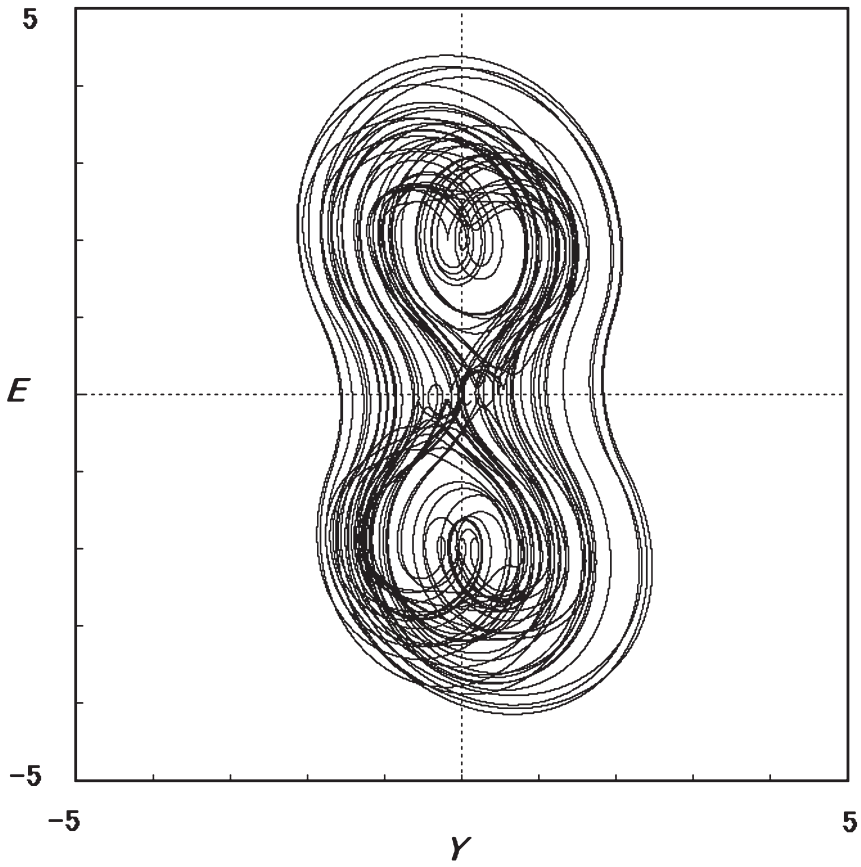

図６：非周期的な持続的変動。$\varepsilon = 0.7$ のときの，解軌道を (Y, E)- 平面にプロットしたもの。十分長い過渡的な変動を除去した後もなお，不規則な変動を続けるように見える。

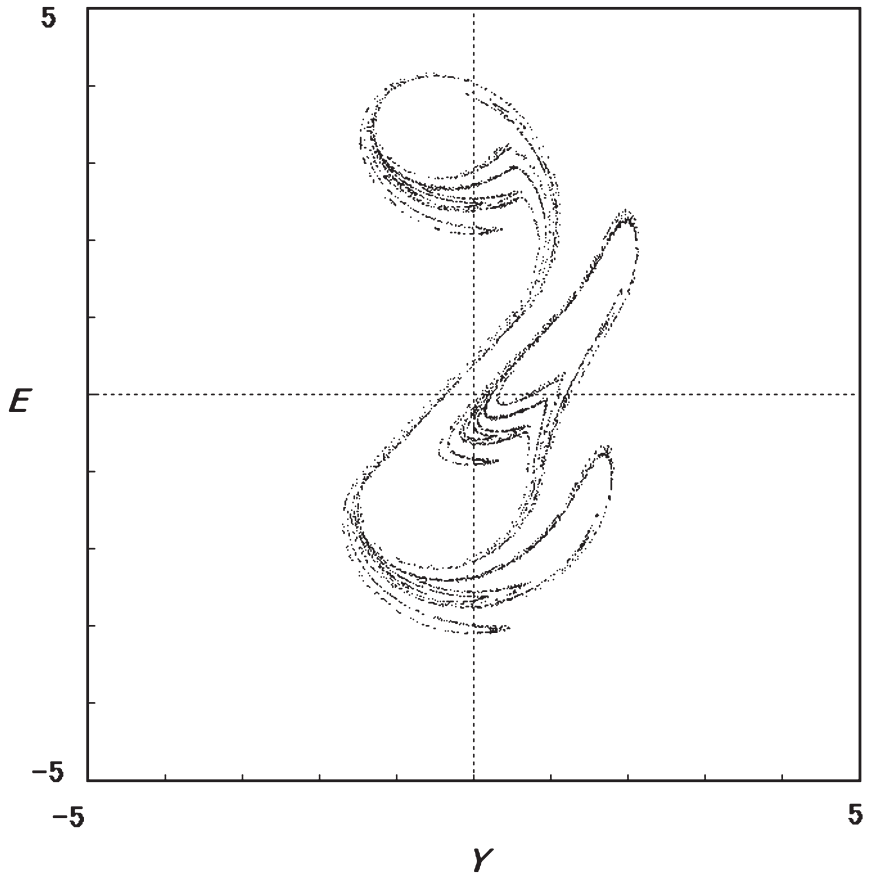

図７：Poincaré 断面図。$\varepsilon = 0.7$ のとき，図６の Poincaré 断面図をとると，奇妙なアトラクタが観察できる。

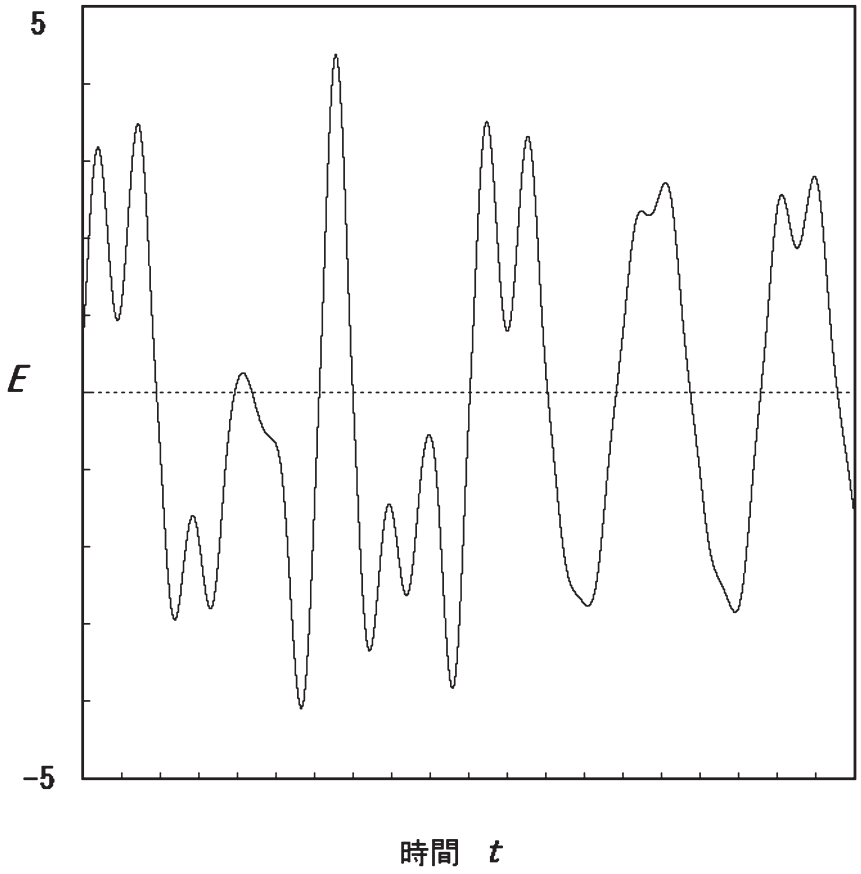

図８：為替レートの時系列。図６に対応する時系列のプロット。

外国の景気循環の振幅幅 ε を 0 から，例えば，1.0 まで連続的に動かしたときに，各 ε に対応する Poincaré 断面の様子はどのように推移するであろうか？その様子を分岐図として図 9 に示す。図 9 では，ε の小さく刻んだ各値ごとに初期条件をランダムに生成しているので，ひとつの ε に対し，複数のアトラクタが存在する場合，いずれかがランダムにプロットされる。また，作図の時間制約の都合上，極端に長い過渡的な挙動は排除できていない可能性があることに留意されたい。ε がゼロに近いところでは，V_L ないし V_H の内部に軌道が終局的に閉じ込められる場合は，周期 2π の周期変動に軌道が収束するため，Poincaré 断面では局所漸近安定な不動点に対応する。したがって，十分小さい ε に対しては，初期条件により観察できる，このような漸近安定な不動点が２つと，事実上観察できない鞍点型の不動点がひとつ存在する。ε がある閾値を超えて，３領域を解軌道が経巡るようになると，その後の変動パターンの現れ方は複雑になる。$\varepsilon = 0.34$ 近辺は，図 9 内で，ある ε の区間で周期アトラクタが現れる‘周期の窓’に対応しているが，その前後の ε にはカオス的アトラクタは頻繁に

発生していると思われる領域が存在している。また $\varepsilon = 0.7$ ではカオス的アトラクタと思われる変動が観察されるが，$\varepsilon = 0.8$ 近辺では，再び周期 3 の大きな窓，したがって，揺れは幅は大きいが予測可能な変動が現れる。

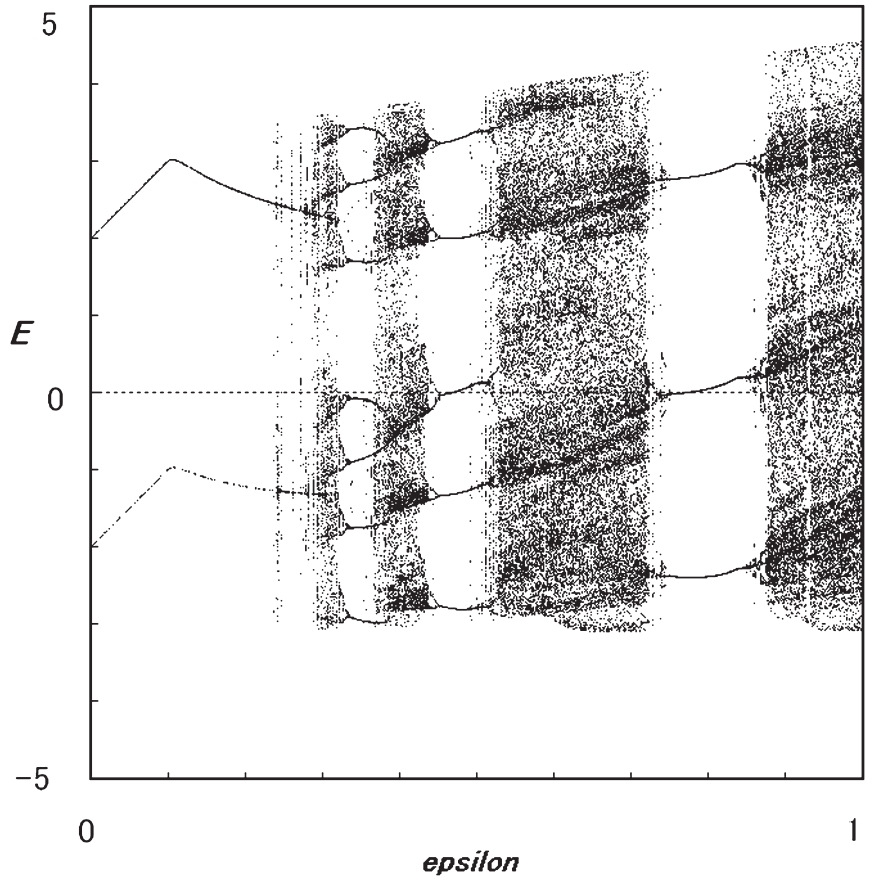

図９：分岐図。パラメータを（15）に固定し，ε を０から１まで変化させたときの，各 Poincaré 断面に現れる，過渡的軌道を除いた E の値をプロットしたもの。複数のアトラクタが共存するため，図が‘不鮮明’に見える。

8　おわりに

本稿では，純輸出関数が為替レートに関して N 字型の非線形性を，そして，外国金利が周期関数で表される，小国の開放マクロ経済モデルを構築した。純輸出関数の非線形性により，鞍点の主均衡の他に沈点の副均衡が存在し，経済は長期的完全予見を想定しなくても発散しなくなることをみた。さらに，この設定に加え，外国金利が国内経済とは独立に文字通り周期的に周期変動している場合，

為替レートや自国 GDP，国内金利等を持続的に振動させるが，その振動は必ずしも周期的ではなく，カオス的となる可能性があることを計算機による数値計算により観察した。

純輸出関数の非線形性は部分的には実証研究の範疇に入るものであるが，少なくとも理論的には，通常の仮定の範囲でどのような変動の型が再現できるかを網羅しておくことは重要であると思われる。今回，N 字型の非線形性を想定したが，V 字型の非線形性を想定した場合についても，若干触れておこう。この場合，外国の金利が一定である場合，定常状態としては，鞍点型の主均衡 O と沈点型の円高均衡 P_L のみが発生する。そのため，$\varepsilon \neq 0$ のとき，有界な解軌道があれば，それは円高均衡 P_L 近辺の周りを振動する一方，円安方向に発散する初期値が多く並存する。これは一種の通貨破綻の可能性を排除しないモデルであるということができるかもしれない。詳細については，今後の研究課題として残しておくことにする。

また，本稿では，カオス的にみえる挙動の発生の仕組みについて厳密な検証を行わなかった。複雑性への遷移のメカニズムとして，パラメータ a が小さいときに，上述のモデル（11）-（13）の Poincaré 写像が同宿分岐（homoliclinic bifurcation）を通じて，カオスが発生するというルートが予想されるが，これについては Yokoo（2009）で詳しく取り扱うことにしよう。

謝　　辞

本研究は文部科学省科学研究費（若手（B），No.20730133, 2008—2011 年）による研究助成を受けて執筆されたものである。

参 考 文 献

Benassy, J.-P., 1984, A non-Walrasian model of the business cycle, *Journal of Economic Behavior and Organization 5*, pp.77-89.

Chang, W. W. and D. J. Smyth, 1971, The existence and persistence of cycles in a nonlinear model: Kaldor's 1940 model re-examined, *Review of Economic Studies 38*, pp.37-44.

Dornbusch, R., 1976, Expectations and exchange rate dynamics, *Journal of Political Economy 84*, pp.1161-1176.

Goodwin, R. M., 1951, The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles, *Econometrica 19*, pp. 1 -17.

Guckenheimer, J. and P. Holmes, 1983, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag.

Kaldor, N., 1940, A model of the trade cycle, *Economic Journal 50*, pp.78-92.

Kouri, P.J.K., 1976, The exchange rate and the balance of payments in the short run and the long run: a monetary approach, *Scandinavian Journal of Economics 78*, pp.280-304.

Sasakura, K., 1995, Political economic chaos?, *Journal of Economic Behavior and Organization 27*, pp.213-221.

Yokoo, M., 2005, Exchange rate cycles in the Mundell—Fleming model when the Marshall—Lerner condition is violated, *Okayama Economic Review 37*, pp.57-63.

Yokoo, M., 2009, Homoclinic bifurcation in a small country open macroeconomic model under the influence of the foreign business cycle, mimeo.