

フィルダムの二次元非線形浸透流解析

吉 武 美 孝・渡 辺 忠

(構築工学研究室)

Received July 1, 1978

Analysis of Two Dimensional Nonlinear Seepage through Embankment Dam

Yoshitaka YOSHITAKE and Tadashi WATANABE

(Laboratory of Construction Engineering)

Analysis of nonlinear seepage through porous media with a free surface is one of the very complicated problems, because the basic equation as to head of water is a nonlinear form. Therefore, a rigorous solution of this problem has not yet been obtained.

In this paper, we propose a numerical method for this problem, using the finite element method which belongs to the iterative method applied to a nonlinear stress analysis of soil mechanics and the like.

Then, we adopt the Forchheimer's law as a nonlinear resistance law and apply this proposed method to the analysis of seepage through an embankment dam and do research on the problems of numerical calculation.

Further, we investigate the seepage characteristic affected by the parameters of the Forchheimer's law and a matter of design of an embankment by comparing result of the linear analysis with that of the nonlinear analysis.

結 言

Darcy 則は浸透領域内の流れが層流領域において成立し、遷移領域から乱流領域になると成立しなくなり、この領域では Forchheimer 形あるいは指数形の抵抗則が成立するといわれている。このような非線形浸透流は粒度の粗な滞水層における揚水井戸の近傍、ロックフィルダムの浸透、あるいは基礎における浸透などにおいても生じる。また、不透水性領域から透水性領域へ浸透領域が移行する際にも生じるといわれている。

浸透領域内の流れが完全乱流状態になると指数形抵抗則が成立するといわれ、おもにロックフィル内の浸透流解析に用いられている。これに対して、Forchheimer 則は粒度が細かい主として浸透領域が砂あるいは細砂利の場合に適用されている。本論文においては Forchheimer 則に従う場合のフィルダムの浸透流解析について述べる。

有限要素法による解析の方法

Forchheimer 則を一般的にベクトル表示すると次式となる。

$$-gradh = (a + b|\mathbf{V}|) \mathbf{V} \quad (1)$$

ここに、 h は水頭、 \mathbf{V} は浸透流速、 a 、 b は定数であり $a\mathbf{V}$ は土粒子と浸透水の粘性摩擦による抵抗を、 $b|\mathbf{V}|\mathbf{V}$ は浸透水の慣性に基づく抵抗を表わす。スカラー場の任意の点で水頭が一定の面にたてた法線の単位ベクトルを \mathbf{S} とすると、

$$-gradh = -\frac{\partial h}{\partial s} \mathbf{S} \quad (2)$$

である。\$u, v\$ を \$x, z\$ 方向の浸透流速成分とすると、

$$u = \left\{ -\frac{a}{2b} + \sqrt{\left(\frac{a}{2b}\right)^2 + \frac{|\partial h/\partial s|}{b}} \right\} \left(-\frac{\partial h/\partial x}{|\partial h/\partial s|} \right) \quad (3)$$

$$v = \left\{ -\frac{a}{2b} + \sqrt{\left(\frac{a}{2b}\right)^2 + \frac{|\partial h/\partial s|}{b}} \right\} \left(-\frac{\partial h/\partial z}{|\partial h/\partial s|} \right) \quad (4)$$

となる、連続の条件より基礎方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left\{ -\frac{a}{2b} + \sqrt{\left(\frac{a}{2b}\right)^2 + \frac{|\partial h/\partial s|}{b}} \right\} \left(-\frac{\partial h/\partial x}{|\partial h/\partial s|} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left\{ -\frac{a}{2b} + \sqrt{\left(\frac{a}{2b}\right)^2 + \frac{|\partial h/\partial s|}{b}} \right\} \left(-\frac{\partial h/\partial z}{|\partial h/\partial s|} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

拘束流に対する解析の方法は以前に示した⁴⁾。この方法を応用して自由水面を有する問題も解くことが可能となる。自由水面形が未知であるから透水係数を定数 \$a\$ の逆数にとり自由水面上の境界条件を満足するまで線形計算を行い、自由水面形の第1近似を求める。この線形計算により求めた水頭分布は Forchheimer 則を満足していないので、みかけの透水係数 \$K'_x, K'_z\$ を求めて拘束流として解く。ここに \$K'_x, K'_z\$ は次式である。

$$K'_x = K'_z = \left\{ -\frac{a}{2b} + \sqrt{\left(\frac{a}{2b}\right)^2 + \frac{|\partial h/\partial s|}{b}} \right\} \cdot \frac{1}{|\partial h/\partial s|} \quad (6)$$

そうすると自由水面上の境界条件は満足されていない。それゆえ、自由水面を nodal line に沿って移動して浸透領域を設定する。

以上の操作を前提として、

(i) みかけの透水係数のもとで、自由水面の境界条件を満足するまで自由水面の移動修正を行う。

(ii) 自由水面の境界条件が満足されれば、この水頭分布が Forchheimer 則を満足しているか否かを調べる。満足していればすべての境界条件、連続の条件、Forchheimer 則を満足しているので解は求まったことになる。

(iii) ステップ (ii) で Forchheimer 則が満足されていなければみかけの透水係数を新たに求めて、ステップ (i), (ii) を Forchheimer 則が全要素について満足されるまで繰り返す。

以上の方法の有効性を調べるために Volker³⁾ が差分法により解いた結果と比較すると Fig. 1 のようになる。これより両者はほとんど一致しているとみなすことができる。なお、連立方程式は SOR 法で解き、その収束判定および自由水面、Forchheimer 則の収束判定にはユークリッドノルムを用いた。すなわち、各節点水頭について \$m\$ 次近似値と \$(m+1)\$ 次近似値を \$h_i^{(m)}, h_i^{(m+1)}\$ とすると SOR 法の収束判定条件は

$$\frac{\| \{ h_i^{(m+1)} - h_i^{(m)} \} \|}{\| \{ h_i^{(m+1)} \} \|} \leq \varepsilon_1 \quad (7)$$

$$\frac{\| \{ h_f - z_f \} \|}{\| \{ z_f \} \|} \leq \epsilon_2 \quad (8)$$

であり、自由水面の収束判定条件はダム底面を datum plane に採ると次式となる。

ただし、 h_f, z_f は自由水面上の節点 f の水頭値と鉛直座標値である。また、Forchheimer の収束判定条件は次式である。

$$E_x = \frac{\| \{ u_i - u_i' \} \|}{\| \{ u_i \} \|} \leq \epsilon_3 \quad (9)$$

$$E_z = \frac{\| \{ v_i - v_i' \} \|}{\| \{ v_i \} \|} \leq \epsilon_4 \quad (10)$$

ただし、 u, v は第 i 要素における式 (3), (4) の浸透流速成分であり、 u_i', v_i' は $-K_x \partial h / \partial x, -K_z \partial h / \partial z$ である。そして、収束判定数としては $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = 10^{-3}$ を用いた。

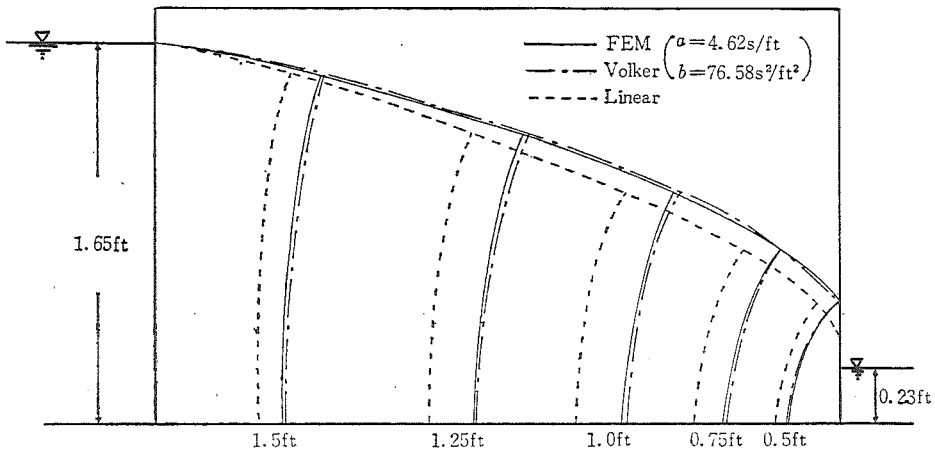


Fig. 1 Comparison with Volker's solution

フィルダムの非線形浸透流解析

前項で Forchheimer 則に従う非線形浸透流解析の方法を述べその有効性を示した。そこで、ここではフィルダムを設定して解析を行い、数値計算上の問題点について論じ、非線形浸透流の浸透流特性について考察を行う。

(a) 数値計算法について

解析モデルとして上下流法面勾配がそれぞれ 2 割、ダム底巾 55m、上流側水位 10m のフィルダムを設定した。要素分割は鉛直方向を 9 等分、水平方向を 19 等分して節点数 200、要素数 171 である。定数 a, b はこれまで公表されている実験値より $a=10, 20, 30, 40$ (sec/m), $b=1000, 2000, 3000$ (sec²/m²) とした¹⁾²⁾。

$a=10$ sec/m, $b=3000$ sec²/m² とした場合について収束状況などに関する検討を行う。ただし、最初に仮定した自由水面形は浸出点の高さを 4.8m として、この点と上流側流入面の

最上部とを直線で結んだ形である。

自由水面の移動修正の回数は36回であった。このうち線形計算に14回費やしている。実質的な非線形浸透流としての計算では26回のみかけの透水係数の変更および22回の自由水面形の移動により解は求まっている。また、みかけの透水係数の変更回数 N とその時の自由水面形の移動修正の回数 M との関係は Fig. 2 のようになる。これより、みかけの透水係数の変更回数 N が $N=2$ で2回の自由水面の移動修正が行われ、それ以上では1回の自由水面の移動修正あるいは一度も自由水面の移動修正が行われずに収束しているのがわかる。

さらに、各自由水面形において連立方程式をSOR法で解くのであるが、線形浸透流解析および非線形浸透流解析におけるSOR法内における反復回数およびForchheimer則の収束判定条件式の Ex , Ez を Table 1 に示す。これより、みかけの透水係数の変更回数 N が2回目からは各自由水面形におけるSOR法での反復回数は1回であることがわかる。すなわち、非常によい初期値によって計算することになり最少反復回数で解が求まっている。したがって、演算時間の短縮に大きな役割を果たしているのが認められる。

Table 1 Convergency of the Forchheimer's law and No. of iteration of SOR method

* SOR : No. of iteration of SOR method

		SOR*	Ex ($\times 10^{-3}$)	Ez ($\times 10^{-3}$)
Linear seepage		77		
No. of Alteration of Modified Pearnability (N)	1	32	33.72	44.03
	2	3	3.99	4.62
	3	2	2.67	2.70
	4	2	2.18	2.14
	5	2	1.78	1.87
	6	2	1.66	1.69
	7	2	1.44	1.59
	8	2	1.36	1.53
	9	2	1.26	1.49
	10	2	1.17	1.46
	11	2	1.08	1.42
	12	1	1.74	1.59
	13	2	1.30	1.70
	14	1	1.34	1.30
	15	2	1.38	1.68
	16	1	1.19	1.17
	17	2	1.35	1.62
	18	1	1.21	1.21
	19	1	1.06	1.05
	20	2	1.26	1.44
	21	1	1.18	1.32
	22	1	1.08	1.06
	23	2	1.25	1.32
	24	1	1.13	1.21
	25	1	1.02	0.96
	26	1	0.91	0.97

また, Forchheimer 則の収束性に関してはみかけの透水係数の変更回数が5回で, $E_x=1.78 \times 10^{-3}$, $E_z=1.87 \times 10^{-3}$ とかなり収束しているがなかなか収束しない. すなわち, 自由水面形の修正が Forchheimer 則の収束性に微妙な影響を与えることになる. 式 (9), (10) の収束判定数 ϵ に 2×10^{-3} を用いるとみかけの透水係数の変更は5回で収束することになる. この時の単位巾当りの浸透流量は $4.638 \times 10^{-2} m^3/sec$, $\epsilon=10^{-3}$ では $4.637 \times 10^{-2} m^3/sec$ となり両者は一致しているとみなせる. これに対して, 浸出点の高さは前者で $5.743m$, 後者で $5.988m$ となり 4.3% の相違がある. したがって, 浸出点の位置すなわち自由水面形の方が浸透流量よりも Forchheimer 則の影響を強くうけることがわかる.

また, 各定数 a , b とみかけの透水係数 N との関係を図. 3 に示す. これより, 定数 a が大きく b が小さいほど変更回数が少なくなることがわかる. これは, 定数 a が大きく b が小さいほど非線形性が弱まりポテンシャル流に近づくためである.

(b) フィルダムの非線形浸透流特性

非線形抵抗則に従う浸透流では浸透流速が大きくなり Darcy 則の適用範囲外であるが, 一応 Forchheimer 則の定数 a の逆数を透水係数とみなして Laplace 方程式を解き, これを線形浸透流の場合, すなわち, Darcy 則に従う場合として Forchheimer 則に従う浸透流との比較検討を行うことにする.

水頭分布図の一例を図. 4 に示す. このように線形浸透流と比べて, Forchheimer 則に従う浸透流では自由水面形が全体に高くなり, 等水頭線が下流側へ移行した形を示すことが特徴である. Fig. 5 には各定数 a , b に対する浸出点の高さを示した. Forchheimer 則の定数 a が小さいほど, また b が大きいほど線形浸透流との相違が大きくなることが認められる. さらに, 本計算例の場合, 浸出点の位置は線形浸透流に比べて 5% から 25% ほど高くなることがわかる.

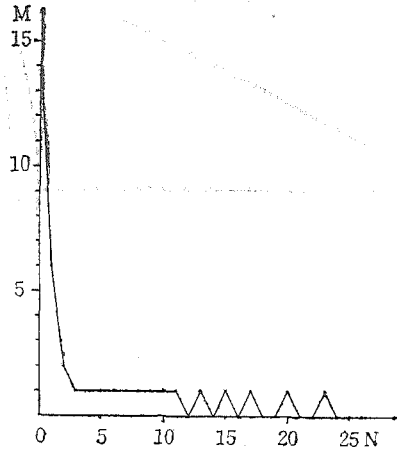


Fig. 2 Convergancy of the nonlinear seepage analysis
 N : No. of alteration of modified permeability
 M : No. of alteration of free surface
 ($a=10sec/m$, $b=3000sec^2/m^2$)

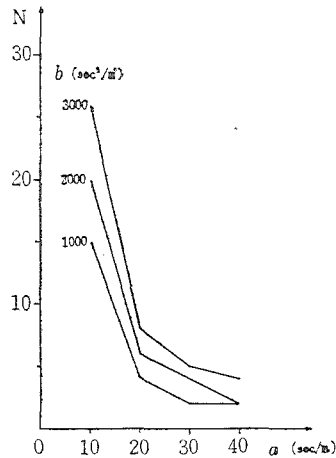


Fig. 3 No. of alteration of modified permeability due to the parameters of the Forchheimer's law (N)

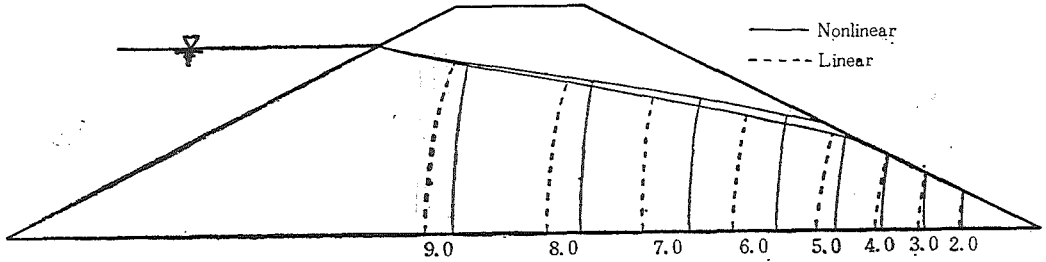


Fig. 4 Calculated results of water head(m)
($a=10\text{sec}/m$, $b=3000\text{sec}^2/m^2$)

次に水頭勾配分布図を $a=10\text{sec}/m$, $b=3000\text{sec}^2/m^2$ の場合について Fig. 6 に示す。水頭勾配分布に関しては線形浸透流, 非線形浸透流ともに同じような分布形を示しているが, 水平方向の水頭勾配 i_x は下流側法面に近づくに従って非線形浸透流の方がわずかに大きくなっている。これに対して, 鉛直方向の水頭勾配 i_z は自由水面に近づくに従って大きくなるのであるが, 線形浸透流の方が全体に大きくなっている。動水勾配 $i_s = -\sqrt{i_x^2 + i_z^2}$ は下流側法面に近づくに従って非線形浸透流の方が大きくなる。最大値は両者ともに下流側法先において生じるがそれほど相違は生じない。

さらに, 浸透流速分布図を Fig. 7 に示す。これより, 線形浸透流, 非線形浸透流ともに同様な分布形を示すが値に関しては線形浸透流の方が大きくなる。また, その最大値の生じる位置は両者ともに同様であり, 水平方向浸透流速成分 u および合成した浸透流速 V は下流側法先付近で最大となり, 鉛直方向浸透流速成分 v は下流側浸出点付近で最大となる。この最大値に関しては, u および V については約 4 倍, v については約 4.5 倍線形浸透流の方が大きくなる。

以上, 水頭勾配分布, 浸透流速分布について考察を行ったが Forchheimer 則の第 2 項の慣性に基づく抵抗によって自由水面形は非線形浸透流の方が高くなり, 動水勾配 i_s についても非線形浸透流の方が大きくなるが, 浸透流速に関しては逆に線形浸透流とした方が大きくなることがわかった。

次に浸透流量について Fig. 8 に示す。前述の浸透流速に関する考察により線形浸透流の方が浸透流量は多くなるのであるが, Forchheimer 則の定数 a が小さく b が大きいほど線形浸透流との相違が大きくなる。しかしながら, 浸透流量そのものは a が小さく b が小さいほど多くなる。このことは定数 a , b が小さくなるほど, 動水勾配が小さくても浸透流速は大

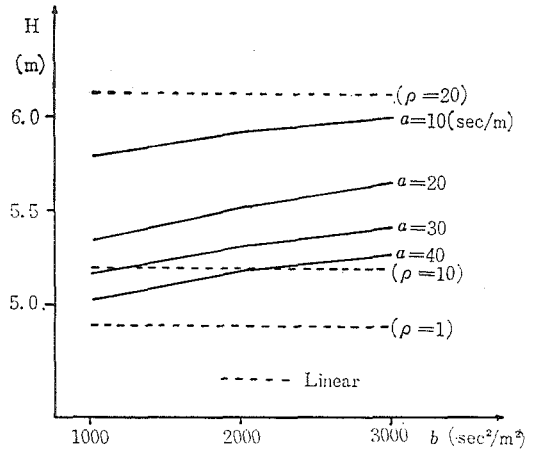


Fig. 5 Hight of the exit point from the datum plane (H)
 ρ : ratio of permeability coefficient

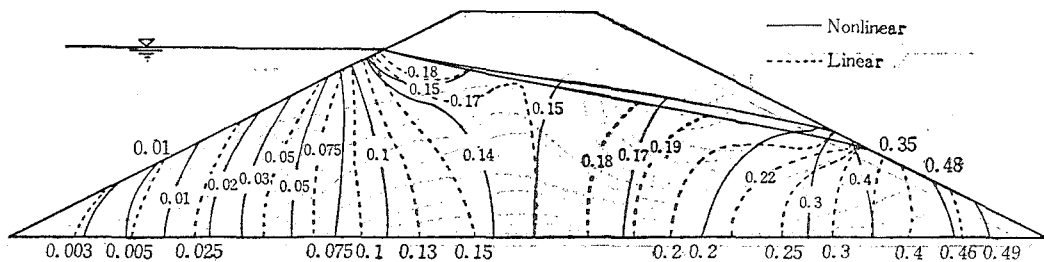


Fig. 6(1) Distribution of the horizontal gradient i_x ($-i_x$)
 ($a=10\text{sec}/m$, $b=3000\text{sec}^2/m^2$)

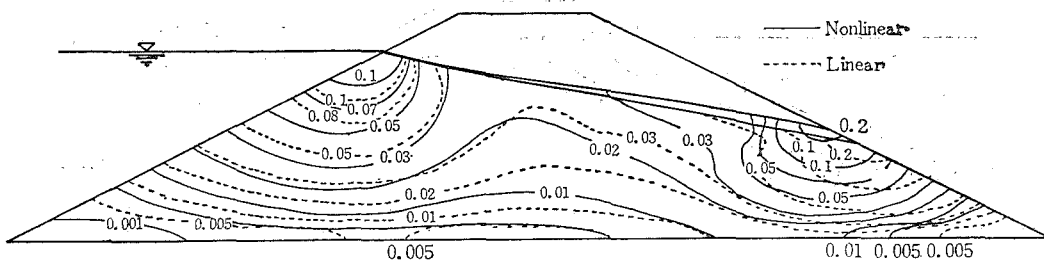


Fig. 6(2) Distribution of the vertical gradient i_z
 ($a=10\text{sec}/m$, $b=3000\text{sec}^2/m^2$)

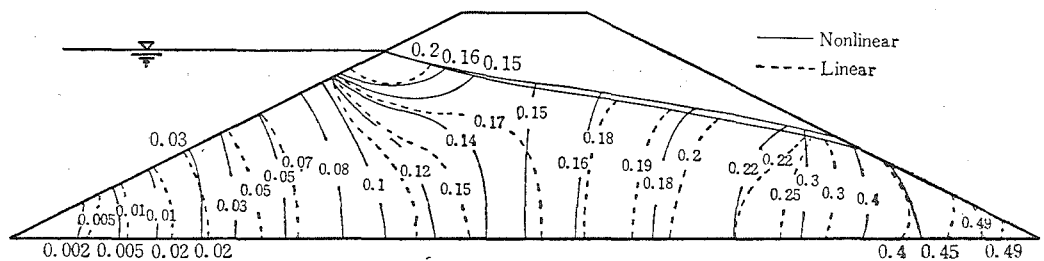


Fig. 6(3) Distribution of the hydraulic gradient i_s ($-i_s$)
 ($a=10\text{sec}/m$, $b=3000\text{sec}^2/m^2$)

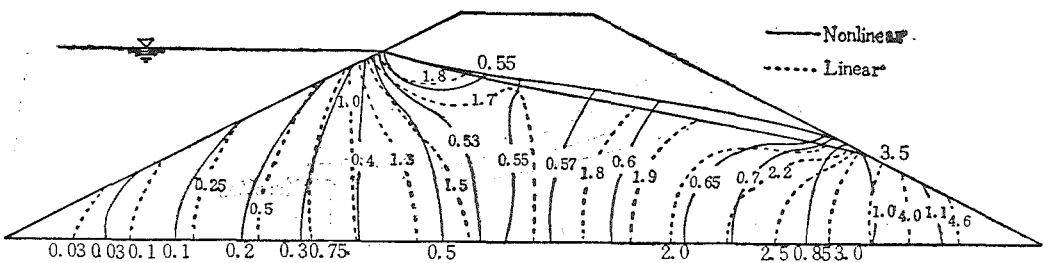


Fig. 7(1) Distribution of the horizontal velocity u ($\times 10^{-2} m/sec$)
 ($a=10\text{sec}/m$, $b=3000\text{sec}^2/m^2$)

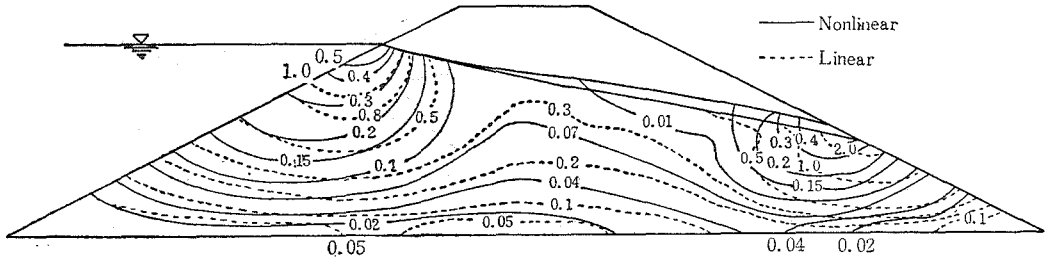


Fig. 7(2) Distribution of the vertical velocity v ($\times 10^{-2}m/sec$)
 $(a=10sec/m, b=3000sec^2/m^2)$

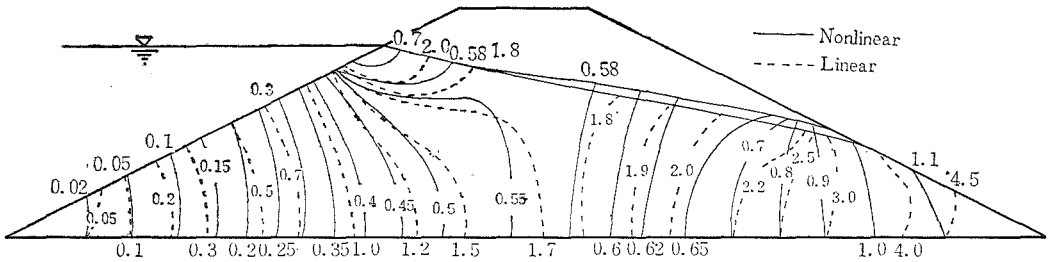


Fig. 7(3) Distribution of the seepage velocity V ($\times 10^{-2}m/sec$)
 $(a=10sec/m, b=3000sec^2/m^2)$

きくなることより理解できる。すなわち、Forchheimer 則の第 1 項 aV は土粒子と浸透水の粘性摩擦による抵抗であり、第 2 項の bV^2 は浸透水の慣性に基づく抵抗を表わすものであるから、定数 a, b が小さくなると抵抗が減少して浸透しやすくなるためである。

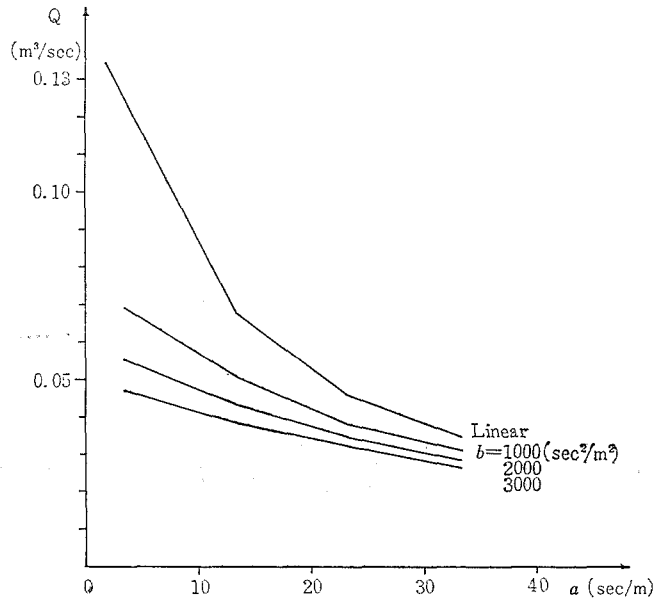


Fig. 8(1) Seepage discharge Q

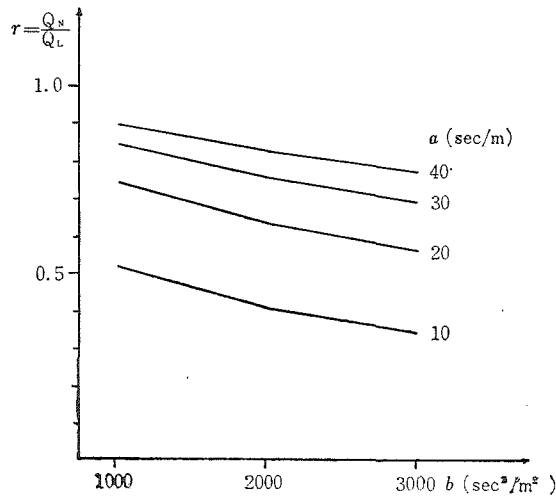


Fig. 8(2) Comparison of the linear seepage discharge Q_L with the nonlinear that Q_N

以上、線形浸透流解析、非線形浸透流解析を行いその浸透流特性の相違を明らかにしたが、特に非線形抵抗則に従う浸透流の場合は自由水面が上昇することおよび下流側法面に近づくに従って線形流とした場合よりも動水勾配が大きくなることは注意を要することと思われる。なぜなら、フィルダム堤体内における浸透領域の増大あるいは動水勾配が大きくなることはダムの安定上最も好ましくないことだからである。

なお、Fig. 5 に線形浸透流で異方性を考慮した場合の浸出点の位置も示しているが、この図より浸透流速が速くなり Forchheimer 則が成立するようになって浸出点の位置が高くなる影響よりも、盛土の異方性の影響の方が浸出点の位置の上昇に関しては大きいといえる。したがって、異方性を生じないような施工方法を採用することは重要なことである。また、水平ドレーンあるいは鉛直ドレーンなどの自由水面の位置を低下せしめるような設計施工法を採用することが必要となる。

摘 要

本論文においては Forchheimer 則に従う浸透流解析に対する有限要素法の適用方法を示した。そして、フィルダムを設定して解析を行い数値解析上の問題点について論じた。次に Forchheimer 則の定数 a 、 b による浸透流特性の変化およびポテンシャル流との比較を行い、フィルダムの非線形浸透流特性を明らかにした。

文 献

- 1) AHMED, N., SUNADA, D. K. : Proc. ASCE, J. HY Dn., 95, HY6, 1847-1857 (1969)
- 2) TYAGI, A. K., TODD, D. K. : Proc. ASCE, J. HY Dn., 96, HY8, 1734-1738 (1970)
- 3) VOIKER, R. E. : Proc. ASCE, J. IR Dn., 101, IR1, 53-56 (1975)
- 4) 吉武美孝・渡辺 忠 : 岡山大農学報 47, 75-80 (1976)