

二次元非線形浸透流解析

吉 武 美 孝・渡 辺 忠

(構築工学研究室)

Received November 1, 1975

Two Dimensional Analysis of Non-Darcy Flow

Yoshitaka YOSHITAKE and Tadashi WATANABE

(Laboratory of Construction Engineering)

In the present paper, we proposed the two-dimensional finite element method of Non-Darcy flow and showed the characteristic of the confined flow in case of a dam with sheet pile in the middle of a dam bed.

We adopted the Forchheimer's law and carried out the computer simulation. As the result, the smaller the parameter a became or the larger the parameter b became, the larger difference between Non-Darcy flow and linear flow was observed.

Moreover, we showed that the discharge of linear flow was larger than that of the Non-Darcy flow, but in regard to the uplift pressure, the relationship was reversed.

緒 言

浸透流の抵抗則として従来多くの問題に適用されてきた Darcy 則だけでは浸透流の問題を十分解明できない。特に水利構造物止水壁先端部では特異点となり流速が無限大になるような解が得られたりする。流速の大きい領域では Darcy 則の不成立が予想されることから線形計算で得られる解析結果は必ずしも十分現象を説明しているとはいえない。本研究では、Darcy 則のかわりに浸透領域内の乱流状態ないし遷移状態の流れに対して成立するといわれ、かつ実験的にも理論的にもその実用性が裏付けられている Forchheimer 則を用いて拘束流問題を取り扱い、その有限要素法による一般的解法の確立およびダム底中央に矢板がある場合の浸透特性を明らかにする。

基礎方程式および解析法

Forchheimer 形の抵抗則は1901年に Forchheimer により発見されたもので次式に示すように全抵抗は流速の一次と二次の項の和で表わされる非線形抵抗則である。

$$-\frac{\Delta h}{\Delta x} = aV + bV^2 \quad (1)$$

ここに、 $\Delta h/\Delta x$; 動水こう配, V ; 流速, a ; 定数 ($L^{-1}T$), b ; 定数 ($L^{-2}T^2$)

(1) 式をベクトル表示すると,

$$-\text{grad}h = (a + b |V|)V \quad (2)$$

となる。 S を流れ方向の単位ベクトルとすると,

$$-\text{grad}h = -\frac{\partial h}{\partial s}S \quad (3)$$

である。また、 i, j を x, y 方向の単位ベクトルとすると、(4)、(5) 式が成立する。

$$-\frac{\partial h}{\partial s} \mathbf{S} = -\frac{\partial h}{\partial x} i - \frac{\partial h}{\partial y} j \quad (4)$$

$$-\frac{\partial h}{\partial s} \mathbf{S} = (a+b|\mathbf{V}|)\mathbf{V} = (a+b|\mathbf{V}|)(u\mathbf{i}+v\mathbf{j}) \quad (5)$$

ここに, u, v はそれぞれ x, y 方向の流速である. (4), (5) 式より次式を得る.

$$-\frac{\partial h}{\partial x} = (a+b|\mathbf{V}|)u \quad (6)$$

$$-\frac{\partial h}{\partial y} = (a+b|\mathbf{V}|)v \quad (7)$$

したがって (4) 式から単位ベクトル $\mathbf{S}$ は次式のようになる.

$$\mathbf{S} = \frac{\partial h/\partial x}{\partial h/\partial s} i + \frac{\partial h/\partial y}{\partial h/\partial s} j \quad (8)$$

また, $u\mathbf{i}+v\mathbf{j}=\mathbf{V}\mathbf{S}$ であるから,

$$u = V \frac{\partial h/\partial x}{\partial h/\partial s} \quad v = V \frac{\partial h/\partial y}{\partial h/\partial s} \quad (9)$$

となり, V と $\partial h/\partial s$ は異符号であるので,

$$\frac{V}{\partial h/\partial s} = -\frac{|\mathbf{V}|}{|\partial h/\partial s|} \quad (10)$$

となる. これを (9) 式に代入して,

$$u = -\frac{\partial h}{\partial x} \frac{|\mathbf{V}|}{|\partial h/\partial s|} \quad v = -\frac{\partial h}{\partial y} \frac{|\mathbf{V}|}{|\partial h/\partial s|} \quad (11)$$

となる. (5) 式より,

$$\left| \frac{\partial h}{\partial s} \right| = (a+b|\mathbf{V}|)V \quad (12)$$

であるから, これを $|\mathbf{V}|$ について解くと,

$$|\mathbf{V}| = -\frac{a}{2b} + \sqrt{\left(\frac{a}{2b}\right)^2 + \frac{|\partial h/\partial s|}{b}} \quad (13)$$

となりこれを (11) 式に代入して次式を得る.

$$u = \left\{ -\frac{a}{2b} + \sqrt{\left(\frac{a}{2b}\right)^2 + \frac{|\partial h/\partial s|}{b}} \right\} \left(-\frac{\partial h/\partial x}{|\partial h/\partial s|} \right) \quad (14)$$

$$v = \left\{ -\frac{a}{2b} + \sqrt{\left(\frac{a}{2b}\right)^2 + \frac{|\partial h/\partial s|}{b}} \right\} \left(-\frac{\partial h/\partial y}{|\partial h/\partial s|} \right) \quad (15)$$

したがって, 連続の条件式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left\{ -\frac{a}{2b} + \sqrt{\left(\frac{a}{2b}\right)^2 + \frac{|\partial h/\partial s|}{b}} \right\} \left(-\frac{\partial h/\partial x}{|\partial h/\partial s|} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\left\{ -\frac{a}{2b} + \sqrt{\left(\frac{a}{2b}\right)^2 + \frac{|\partial h/\partial s|}{b}} \right\} \left(-\frac{\partial h/\partial y}{|\partial h/\partial s|} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

となり非線形である. (16) 式を有限要素法を用いて解くためには汎関数を求め, 変分原理を用いて解く方法がある¹⁾. この場合の汎関数は次式である.

$$\Omega(h) = \int_R \left[-\frac{a}{2b} \left| \frac{\partial h}{\partial s} \right| + \frac{2}{3} b \left\{ \left(\frac{a}{2b}\right)^2 + \frac{|\partial h/\partial s|}{b} \right\}^{\frac{3}{2}} \right] dR \quad (17)$$

積分領域 R は浸透領域である. この汎関数の第一変分をとることにより, EULER の方程式として式(16)が求まる. (17)式を変分原理を用いて解く手法はかなり繁雑となる. ここでは,

非線形応力解析に用いられている反復法を応用して解くことを考える。反復法であれば指数形抵抗則の成立する場合も同様に解析可能である。反復法の手順は以下のである。

- (i) $i_x = -\partial h / \partial x$, $i_y = -\partial h / \partial y$ とし初期透水係数として定数 a の逆数を用いて線形計算を行ない, その時の $u^{(1)}$, $i_x^{(1)}$ ($v^{(1)}$, $i_y^{(1)}$) を求めると Fig. 1 の P_1' となる。
- (ii) (12) 式より $\partial h / \partial s$ を求め (14), (15) 式から $u^{(1)}$, $v^{(1)}$ を求めると同図の P_1 が求まる。
- (iii) 許容誤差を ε として $\bar{P}_1 \bar{P}_1' = \varepsilon_1 \leq \varepsilon$ が x , y 方向に関して全要素について成立すれば, FORCHHEIMER 則は満足されかつ連続の条件も満足されたとする。
- (iv) 許容誤差 ε 内になれば, P_1 と原点を結ぶこう配の逆数を透水係数として上記 (i) ~ (iii) を繰り返す。

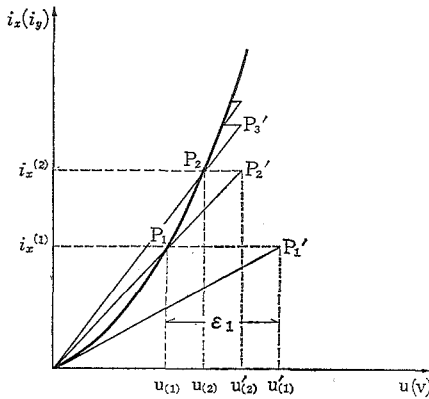


Fig. 1 Iterative method

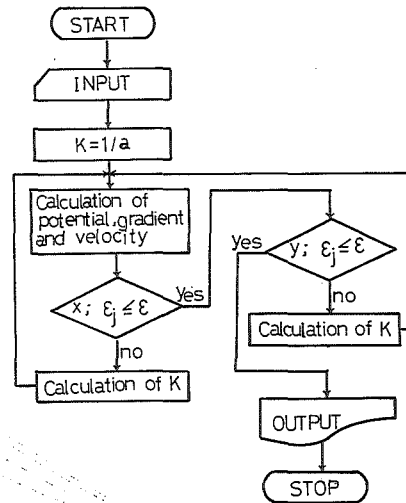


Fig. 2 Flow chart

以上のフローチャートを示すと Fig. 2 となる。

上述の反復法は有限要素法に適している。すなわち, 各要素毎に透水係数が変化することの線形計算用プログラムに手を加えることにより容易に繰り返し計算を行うことができる。

解析結果および考察

Fig. 3 に示すような浸透領域を考える。矢板に関して水頭分布は対称であるので計算は上流側のみを行う。収束判定としては, (18) 式の

$$\varepsilon_x = \sqrt{\sum \varepsilon_{xi}^2 / \sum u_i^2} \quad \varepsilon_y = \sqrt{\sum \varepsilon_{yi}^2 / \sum v_i^2} \quad (18)$$

ε_x , ε_y がともに $\varepsilon = 0.005$ より小さくなった場合に収束したものとみなした。また, 定数 a , b に関しては種々の実験値¹⁾ があるがここでは $a = 20, 30, 40$ (sec/m), $b = 1500, 2000, 2500, 3000$ (sec²/m²) を用いた。

動水勾配一流速関係の一例を Fig. 4 に示す。

また, 水頭分布の一例を Fig. 5 に示す。流れの様相を明らかにするために, 流入面および矢板直下の断面における流速分布を調べてみると Fig. 6 のようになる。これは各線形流 (透水係数を定数 a の逆数にとる) とした場合の各断面における平均流速 V_m に対する各場合の流速 V の比 V/V_m を縦軸にとっている。 a の値が減少する程, また, b の値が増大す

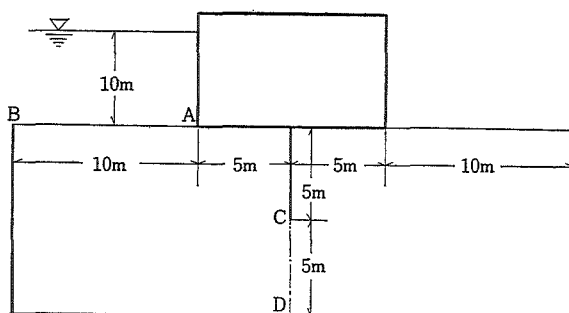
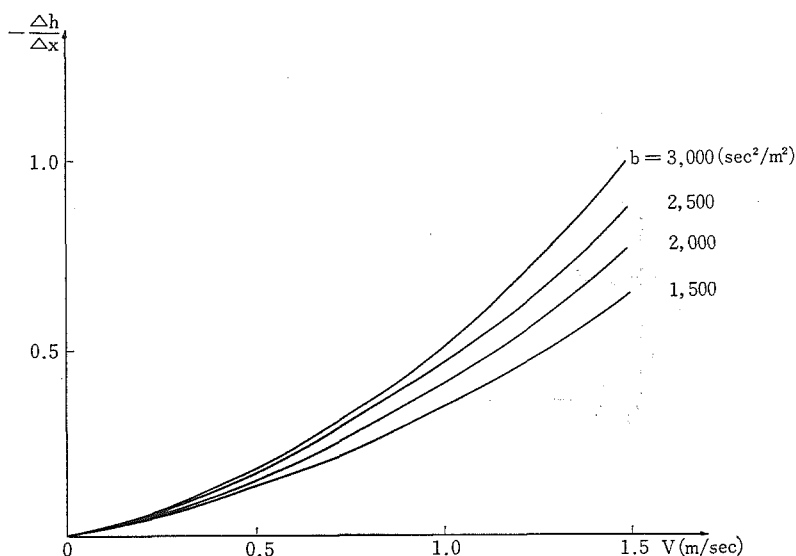


Fig. 3 Seepage domain

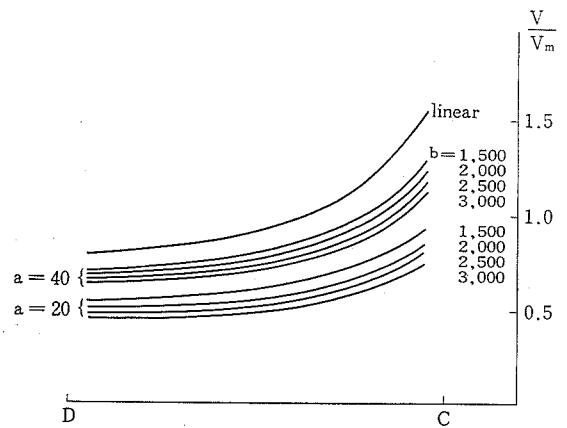
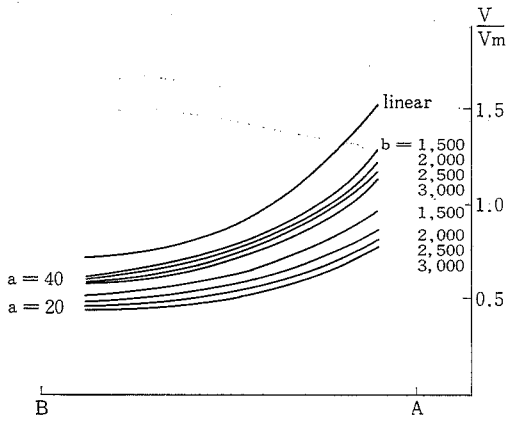
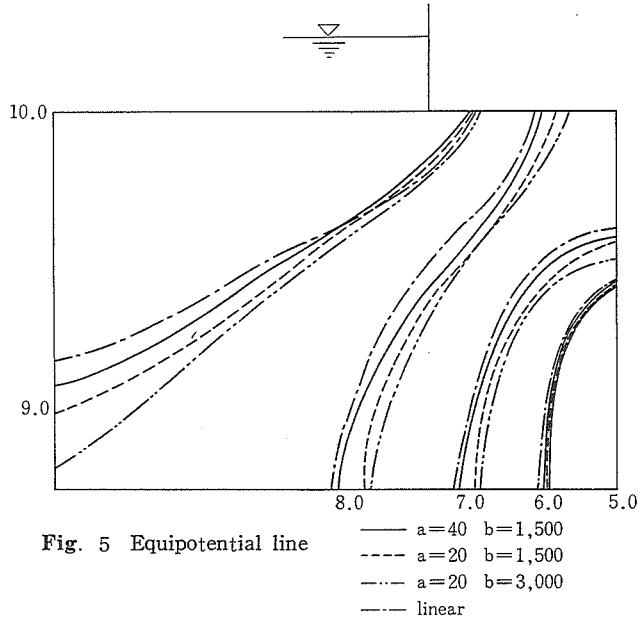
Fig. 4 Relationships between V and $(-\Delta h/\Delta x)$ ($a=20\text{sec/m}$)

る程線形流との相違が大きくなるのがわかる。また、線形流の方が矢板、あるいはダムがある為の影響を強く受ける。更に流速分布は、FORCHHEIMER 則の V^2 に比例する抵抗項の影響を強く受ける系ほど平均化されているのが認められる。各線形流の流量 Q_L に対する非線形流の流量 Q_N との比 Q_N/Q_L を求めたのが Fig. 7 である。Fig. 6 からわかるように定数 a が大きく b が小さい程、線形流に近くなるのがわかる。かつ、 a を一定にするとほぼ直線関係にある。

次に矢板およびダム底面に及ぼす浸透水圧の関係を調べるために、流量の場合と同様に各線形流の場合に対する比をとる。Fig. 8 に示すように流速、流量関係とは逆に非線形流の場合が大きくなる。その影響の度合は a が小さくなり、かつ b が大きくなる程顕著になる。

以上述べてきた現象は V の二乗の項による水頭損失が大きいことを示すものであって、線形流とした場合に比して流速は減少するが動水勾配は増大することになる。これは、FORCHHEIMER 則の一つの特徴である。したがって矢板のパイピングに対する安定性は線形流に比して低下することになる。

尚、非線形計算のための反復回数は10回程度であった。



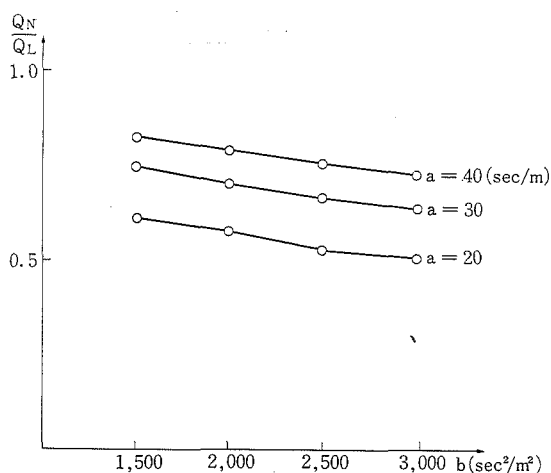


Fig. 7 Discharge ratio

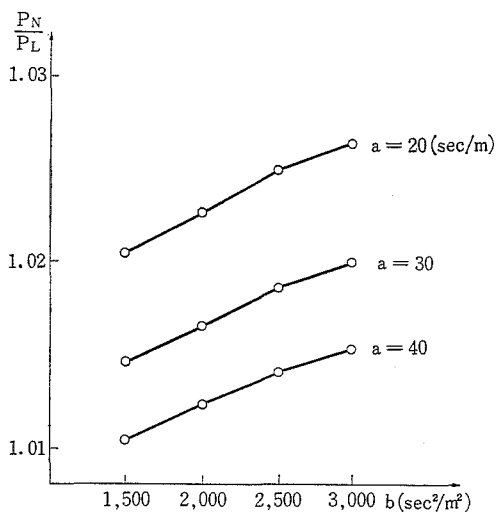


Fig. 8 (a) Uplift ratio (Sheet pile)

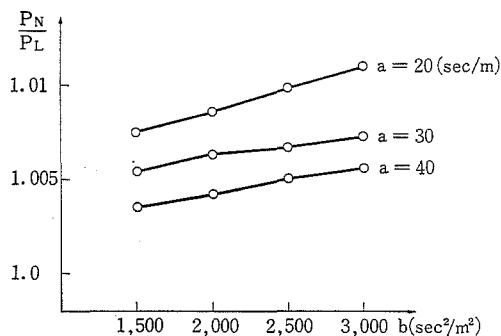


Fig. 8 (b) Uplift ratio (Dam)

摘 要

二次元非線形浸透流の有限要素法による解析法およびダム底中央に矢板が存在する場合の浸透特性を示した。FORCHHEIMER 則の場合は定数 a が小さい程、また、 b が大きい程線形流との相違が大きくなることを示した。

この解法は自由水面を有する場合にも容易に応用することが可能である。現在応力計算における材料特性、すなわち、応力—ひずみ関係が問題にされているように、浸透流解析においても動水勾配—流速関係のデータの更なる蓄積が急がれるものである。

文 献

- 1) 岡本太郎：京大防災研年報 12, 401—410 (1970)
- 2) VOLKER, R. E. : Proc. ASCE. 95 (HY 6), 2093—2114 (1969)