

氏名	小野 舞子		
授与した学位	博士		
専攻分野の名称	理学		
学位授与番号	博甲第	5817	号
学位授与の日付	平成30年 9月27日		
学位授与の要件	自然科学研究科 数理物理学専攻 (学位規則第4条第1項該当)		
学位論文の題目	An Auslander-Reiten principle and a lifting problem over commutative DG algebras (Auslander-Reiten 原理と可換 DG 代数上の lifting の問題)		
論文審査委員	教授 吉野 雄二	教授 橋本 光靖	教授 石川 雅雄

学位論文内容の要旨

1950年代に Cartan-Eilenberg によりホモロジー代数の基盤の整備が行われた。今日では, Grothendick-Verdier により導入された導来圏を用いることで, 従来のホモロジー代数をより統一的に取り扱うことが可能となった。本学位論文では, (圏論的)ホモロジー代数を用いた可換環論の異なる2つのテーマに関する研究が行われている。特に, 前半では既存の定理を導来圏の中で捉え直し, それらの原理に相当するものを構成することを目指した。また, 後半では可換微分次数付き(DG)代数上の DG 加群の lifting の問題を考察した。

本論文は以下で構成されている。

第1章では, 導来圏を用いた Auslander-Reiten(AR)双対定理の一般化の研究を行う。AR 双対定理は極大 Cohen-Macaulay 表現論の根本をなす定理である。本論文では, まず AR 双対定理の基本原理(AR 原理と呼ぶ)となるものを可換 Noether 環上の加群圏の導来圏の中で構成を行う。その後 AR 原理を応用することで, AR 双対定理が従うことを示す。また, Iyama-Wemyss により一般化された AR 双対定理も AR 原理から自然と現れることを示す。さらに, 一般には有限生成とは限らない big Cohen-Macaulay 加群に対しても, AR 原理を用いることで AR 双対型の双対が存在することが判明したので, その紹介をする。第1章の最後では, AR 原理を応用して可換環論で未解決の予想である Auslander-Reiten(AR)予想に部分的解答を与える。

第2章では, 可換 DG 代数上の DG 加群の lifting の研究を行う。本研究は AR 予想の解決に向けた研究である。可換 DG 代数上の DG 加群の lifting の問題とは, 「 $A \rightarrow B$ を可換 DG 代数の間の準同型とする。Semi-free DG B 加群 N に対して, semi-free DG A 加群の係数拡大により持ち上がる DG B 加群と N はいつ同型になるか。」をいう。本論文では, 特に次の可換 DG 代数を取り扱う。可換 DG 代数 A に対して, A の正の奇数次数のサイクル t を消すように偶数次数の変数 X を A に付け加えて得られる拡大 DG 代数 $B = A\langle X | dX = t \rangle$ と表す。この設定のもとで, 上記の lifting の問題を考察する。以下は本論文の主結果である。下に有界であるような semi-free DG B 加群 N に対して, lifting の障害類 $[\Delta_N]$ を $Ext_B^{|X|+1}(N, N)$ の元として構成を行う。ただし, $|X|$ は変数 X の次数を表す。障害類 $[\Delta_N] = 0$ であることと, N が A に liftable であることが同値であることを示す。さらに, A に liftable である semi-free DG B 加群の lifting の一意性に関する考察を行う。本論文の最後には次数1次と2次の変数を持つ拡大 DG 代数上 semi-free DG 加群の lifting の例を提示する。

論文審査結果の要旨

本論文は独立した二つの部分から構成され、それぞれが独立した内容であるが、共に代数学におけるホモロジー基本予想の一つであるAuslander-Reiten予想を可換環上で考察することを目指している点では共通の思想によるものである。

前半部分では、多元環の表現論またはCM加群の表現論においてもっとも基本的な定理であるAuslander-Reiten双対定理を導来圏におけるある種の基本原理として確立している。本来は有限生成加群に関する双対定理を、無限生成加群を含む非有界導来圏(unbounded derived category)における局所化関手による同型として表現することで、双対定理の証明を透明化した。さらには、この基本原理から様々な形のAuslander-Reiten双対定理のバリエーションを証明することができることを示した。またそれによって、特別な場合にはAuslander-Reiten予想が強い形で成立することが示されている。

後半部分は、DG加群の持ち上げ問題について考察している(DG=Differential Graded)。これは、DG環Aの上に変数Xを添加したDG環Bを考えて、B上のDG加群がいつA上のDG加群から係数拡大によって得られるかという問題である。変数Xの次数が奇数の場合はすでに知られているので、本論文では変数Xの次数が偶数の場合を考察している。実際にExt群の中に持ち上げ可能性に対する「障害」を構成して、適当なExt群の消滅が持ち上げの十分条件であることを示している。また、持ち上げの一意性についてもその十分条件を与えることに成功している。

以上本論文で得られている内容は全て新しい結果であり、Auslander-Reiten予想をはじめとするホモロジー予想への挑戦としては今後かなり有望な理論として進展する可能性を秘めたものであると認められる。したがって本論文の内容は学位論文としての価値を十分備えたものであると学位審査委員会としては判断する。