氏　　　　名	吉田　耕平
授与した学位	博　士
専攻分野の名称	理　学
学位授与番号	博乙第４４２０号
学位授与の日付	平成２６年　３月２５日
学位授与の要件	博士の学位論文提出者 （学位規則第５条第２項該当）
学位論文の題目	On the construction of generalized homology –cohomology theories by using bivariant functors （双変関手による一般ホモロジー・コホモロジー論の構成について）
論文審査委員	教授　島川　和久　　教授　森本　雅治　　准教授　鳥居　　猛

学位論文内容の要旨

本研究の目的は次の２つである。
（１）　デカルト閉性を満たす位相空間の圏NGを定義し，微分空間を対象とする圏 Diff との関係を述べる。
（２）　双変関手$F: NG_0^{op} \times NG_0 \to NG_0$により一般ホモロジー・コホモロジーを構成する方法を述べる。さらに具体例として，特異ホモロジー・コホモロジー群やスティーンロッドホモロジー・チェックコホモロジー群を双変関手により構成する。

§１　位相空間の圏NG

定義　X, Yを位相空間とする。次の条件を満たす写像$f: X \to Y$を数値的連続写像とよぶ。
条件　　任意の連続写像$\sigma: \Delta^n \to X$に対して，合成写像$f \circ \sigma: \Delta^n \to X$は連続である。

位相空間を対象とし，数値的連続写像を射とする圏をSTOPとする。また，基点付き空間と基点を保つ数値的連続写像からなる圏を$STOP_0$と表す。任意の写像$\sigma: \Delta^n \to X$に対して，写像$\sigma^*: smap(X, Y) \to map(\Delta^n, Y)$を$\sigma^*(f) = f \circ \sigma$で定義し，$smap(X, Y) = hom_{STOP}(X, Y)$に$\{\{\sigma^*\}^{-1}(U) | U$ は $map(\Delta^n, Y)$の開基$\}$で生成される位相を与える。ただし，$map(\sigma^n, Y)$の位相はコンパクト開位相とする。言いかえれば，smapの位相は，$\sigma: \Delta^n \to X$を連続写像，をΔ^nのコンパクト部分集合，をの開集合としたとき，$W(\sigma, L, U) = \{f | f(\sigma(L)) \subset U\}$で生成される。位相空間を対象とし，連続写像を射とする圏をTOPで表す。包含関手$TOP \to STOP$の左随伴$\mu: STOP \to TOP$を次のように定義する。位相空間に対して，μXは集合に，すべての特異単体$\sigma: \Delta^n \to X$が連続写像となるようなもっとも密な位相を導入した空間とする。このときμXの位相の入れ方より，条件「$f: X \to Y$が数値的連続写像である」と条件「$f: \mu X \to Y$が連続写像である」は同値である。また，$\mu f: \mu X \to \mu Y$は連続写像になり，関手$\mu: STOP \to TOP$が得られる。

定義１　自然な写像$X \to \mu X$が同相写像であるような位相空間を，数値的生成空間とよぶ。数値的生成空間からなるTOPの充満部分圏をNGとかく。また基点付き数値的生成空間を対象と基点を保つ連続写像からなる圏をNG_0とかく。$\mu(\mu X) \cong \mu X$が成り立つので，$\mu: STOP \to TOP$は，関手$\mu: STOP \to NG$を誘導する。

定理　Diffを微分空間と滑らかな写像からなるカテゴリーとする。圏NGは圏Diffの充満部分圏と同型である。

§２　ホモロジー・コホモロジーの構成

圏NGCを対象をコンパクト距離空間とする圏NGの充満部分圏とする。

主定理１ 関手Tを完全連続関手とする。双変関手$NG_0^{op} \times NGC_0 \to NG_0$を

$$\check{F}(X, Y) = \lim_{\to\lambda} map_0(X_\lambda,\ holim_{\leftarrow\gamma} T(Y^C{}_\gamma))$$

と定義する。ただし，X_λをXの開被覆λに対する Vietoris 腹体とし，Y_γ^CをYの開被覆γに対するチェック腹体とする。このとき$\check{F}$は完全連続双変関手である。

主定理２　空間をコンパクト距離空間とする。このとき$h_n(X, \check{F})$はスペクトラム$S = \{T(S^k)\}$を係数とするスティーンロッドホモロジー群と一致する。

ここで，完全連続関手T を AGとし，その関手を$C: NG_0^{op} \times NGC_0 \to NG_0$とすると，

主定理３ $h^n(X, C)$はチェックコホモロジー群と一致する。がコンパクト距離空間のとき，$h_n(X, C)$は，スティーンロッドホモロジー群と一致する。

論文審査結果の要旨

本研究の目標は以下の二つである。

（１）デカルト閉性を満たす基点付き位相空間の充満部分圏NG_0を構成し，NG_0上で定義される双変関手を用いて一般ホモロジー・コホモロジーを導入する。

（２）上記の構成法を用いて，特異ホモロジー・コホモロジー群やスティーンロッドホモロジー・チェックコホモロジー群を与える双変関手を具体的に構成する。

これらの内，前者は島川・吉田・原口の共著論文【K. Shimakawa, K, Yoshida and T. Haraguchi, Homology and cohomology associated with a bivariant functor, arXiv:1010.3336】（投稿中）の内容であり，後者は申請者による参考論文【K. Yoshida, Steenrod-Cech homology-cohomology theories associated with bivariant functors, to appear in Mathematical Journal of Okayama University】の主結果である。

本学位論文の概要は以下の通りである。第１章では，研究結果を記述するために必要なCW複体，チェックコホモロジー，スティーンロッドホモロジー等の基本的概念について概観する。第２章では，論文 [Shimakawa-Yoshida-Haraguchi] の内容に沿って, 数値的生成空間からなるTOP_0の充満部分圏NG_0の基本的性質を述べ,次いで，NG_0上の双変完全関手が，ホモトピー群をとることにより，一般ホモロジー・コホモロジー理論を誘導することを示す。最終第３章は，申請者の主要な研究成果である参考論文 [Yoshida] の結果を詳述したものである。ここで，申請者はヴィートリス腹体およびチェック腹体の概念を巧みに組み合わせて完全連続双変関手を構成し，それから定まるホモロジーおよびコホモロジーが各々，スティーンロッドホモロジーおよびチェックコホモロジーに一致することを証明する。ただし，前者については空間をコンパクト距離空間に制限するものとする。

本論文はスペクトラムの代わりに連続関手の概念を用いて一般ホモロジー・コホモロジーを構成する方法の具体的な適用例を与えるものであり，それ自体も非常に興味深いものである。以上の理由により，本論文は学位論文に相応しい内容を備えるものと判断する。