

# 整数の分割の母関数と組合せ論

安東雅訓 (稚内北星学園大学)

## 1 はじめに

本論文では整数の分割とその母関数, 組合せ論を主に扱う. 代数的な背景のある結果も多いのだが, そこにはあえて深くは触れず筆者にとってのさわりの部分である組合せ論の話として見ることにする. 級数の式に関してもあくまでも母関数として見るため, 収束半径には触れていない. 複雑そうな式変形は 5 章の公式集の中でまとめて証明している. 2 章では整数の分割に関する用語を定義し, 代表的な例とそれに関する基本的な命題を紹介する. 3 章では整数の分割の組合せ論のモデルであるヤング図形とその用語を定義する. 4 章で母関数と呼ばれる「組合せ論的な対象の情報を保存した式」を導入し, その考え方, 扱い方を見る. 6 章では  $p$ -コアと呼ばれる分割とその生成の中で使われる  $p$ -アバカスについて見る. 7,8,9 章で自身の結果を述べている. 有名でないフック長公式, グレイシャー対応に関するウエイトの積の一致, 内村型  $q$ -恒等式の一般化がそれぞれの章で主結果となる.

## 2 整数の分割

ある整数を自然数の和として書く方法のことを整数の分割と呼ぶ. ここでの自然数には 0 は含んでおらず, 和の順番の違いは考えない. つまり,  $1+2$  と  $2+1$  は同じ 3 の分割を表しているものとする. 簡単のため, 和の記号を省略した自然数の減少列  $\lambda = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\ell)$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell \geq 1$  で分割  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\ell$  を表すこととする.  $\lambda$  の成分の個数  $\ell$  を  $\lambda$  の長さと呼び  $\ell(\lambda)$  で表す.  $\lambda$  が  $n$  の分割であるとき,  $|\lambda| = n$  と表す. すなわち  $|\lambda|$  は表示ではなく,  $\lambda$  の計算結果  $\sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i$  を表す. 分割全体の集合を  $\mathcal{P}$ ,  $n$  の分割全体の集合を  $\mathcal{P}(n)$  で表す. また  $\mathcal{P}(n)$  の位数を  $p(n)$  で表し,  $n$  の分割数と呼ぶ.

例.  $n = 5$  について,

$$\mathcal{P}(5) = \{(5), (41), (32), (311), (221), (2111), (11111)\}$$

であり, 従って  $p(5) = 7$  である.

大きな分割を扱えば表示が長くなる. そのため, 分割  $\lambda$  が与えられたとき,  $\lambda$  の成分  $k$  の個数を

$m_k(\lambda)$  で表し, これを用いた  $(1^{m_1(\lambda)}2^{m_2(\lambda)}\dots n^{m_n(\lambda)})$  の形の表示も  $\lambda$  を表すものとする. このとき,  $m_k = 1$  の  $m_k$ ,  $m_k = 0$  の  $k$  については表示を省略する.

例.  $n = 5$  について,

$$\mathcal{P}(5) = \{(5), (14), (23), (1^23), (12^2), (1^32), (1^5)\}.$$

命題 2.1. 分割  $\lambda = (1^{m_1}2^{m_2}\dots)$  に対し,  $|\lambda| = \sum_k km_k, \ell(\lambda) = \sum_k m_k$  である.

ここまで整数の分割といいながら自然数の分割しか考えていなかった. 負の整数に関しては, 自然数の和として表すことは不可能だ. しかし 0 であれば, 成分を持たない分割  $\lambda = ()$  を 0 の分割だと思えることができるので,  $\mathcal{P}(0) = \{()\}, p(0) = 1$  と定義することにする.\*<sup>1</sup>

分割の中である条件を満たすものに注目する場合がある. 代表的な例に成分が相異なる相異分割, 成分が全て奇数である奇分割がある. 相異分割全体の集合を  $SP$ ,  $n$  の相異分割全体の集合を  $SP(n)$  で表す. 同様に奇分割全体の集合を  $OP$ ,  $n$  の奇分割全体の集合を  $OP(n)$  で表す.

命題 2.2. 分割  $\lambda$  に対し, 任意の自然数  $k$  で  $m_k(\lambda) < 2$  であることと  $\lambda$  が相異分割であることは同値である.

命題 2.3. 分割  $\lambda$  に対し, 任意の自然数  $k$  で  $m_{2k}(\lambda) = 0$  であることと  $\lambda$  が奇分割であることは同値である.

オイラーによる次の定理が知られている.

定理 2.4. 任意の自然数  $n$  に対し,  $|SP(n)| = |OP(n)|$  が成り立つ.

このような制限された分割の個数に関する恒等式を分割恒等式と呼ぶ. 本論文中での分割恒等式の証明は, 母関数と呼ばれる道具を用いた方法と, 集合の間の具体的な写像を構成する全単射法, 他に漸化式を用いての数学的帰納法の 3 種類を扱う. ただし, 「恒等式的全単射による単純な証明こそ, なぜそれが成り立つのかについての最も深い理解をもたらすものだ」[3] という考え方に基づき母関数の式変形についても間の組合せ論が想像できないものはできるだけ避けることにする.

証明. 奇分割に対し, 大きさの同じ相異分割を対応させる全単射写像を構成すればよい. 奇分割  $\lambda$  が与えられたとき,  $\lambda$  に同じ大きさの成分があればその内の 2 つを結合し, 大きさ 2 倍の一つの成分にする. この操作を同じ大きさの成分が現れなくなるまで, すなわち相異分割となるまで続けるという写像を考える\*<sup>2</sup>. 得られた相異分割を  $\tilde{\lambda}$  で表すこととする. 各操作での分割の大きさは不変であるため, 得られる相異分割は元の奇分割と同じ大きさである. また逆写像は, 大きさ偶数の成分  $2k$  が存在すれば大きさ  $k$  の成分二つに分解する, という操作を偶数成分がなくなる, すなわち奇分割となるまで続けたものとして得られ, 全単射写像であることが分かる. □

\*<sup>1</sup>  $p(0) = 1$  は一般的だが 0 の分割として  $()$  の表示はそう一般的ではない.

\*<sup>2</sup> 写像の well-defined 性について, 実際には操作の順番によらず対応が決まるが, 気になるようであれば小さい成分から順に結合と決めてしまえばよい.

例.  $n = 5$  に対し,  $\mathcal{OP}(5) = \{(5), (1^23), (1^5)\}$ ,  $\mathcal{SP}(5) = \{(5), (14), (23)\}$  であり,

$$\begin{aligned} (5) &= (\tilde{5}) \\ (1^5) &\mapsto (1^32) \mapsto (12^2) \mapsto (14) = (\tilde{1}^5) \\ (1^23) &\mapsto (23) = (1\tilde{2}3) \end{aligned}$$

ここで,  $(5)$  は自身に移っている.

このオイラーの恒等式には様々な一般化, 精密化が知られている. その内でも自然なものとして次の分割に関する定理がある.

**定義 2.5.** 分割  $\lambda = (1^{m_1}2^{m_2} \dots n^{m_n})$ , 自然数  $p$  に対し, 任意の自然数  $k$  で  $m_k < p$  であるとき,  $\lambda$  は  $p$ -正則である, 任意の自然数  $k$  で  $m_{pk} = 0$  であるとき,  $\lambda$  は  $p$ -類正則であるという.  $n$  の  $p$ -正則な分割全体の集合を  $\mathcal{P}^{(p)}(n)$ ,  $p$ -類正則な分割全体の集合を  $\mathcal{P}_{(p)}(n)$  で表す. また一般の分割の場合と同様にそれぞれの個数を  $p^{(p)}(n), p_{(p)}(n)$  で表す.

$p = 2$  とした場合に, それぞれ相異分割, 奇分割であり一般化となっている. これに対し,

**定理 2.6.** 任意の自然数  $n, p$  に対し,  $p^{(p)}(n) = p_{(p)}(n)$  が成り立つ.

このことが先の写像の一般化であるグレイシャー対応と呼ばれる写像を用いた全単射法により証明される.

**証明.**  $p$ -類正則な分割  $\lambda$  が与えられたとき, 同じ大きさの成分が  $p$  個以上存在すれば, その内の  $p$  個を結合し大きさ  $p$  倍の一つの成分とする. この操作を同じ大きさの成分が  $p$  個以下となるまで続けられれば,  $p$ -正則な分割が得られる. これを  $\tilde{\lambda}$  で表す\*<sup>3</sup>. 逆写像は大きさ  $pk$  の成分があれば大きさ  $k$  の成分  $p$  個に分解する. □

例.  $\lambda = (1^42^64^27) \in \mathcal{P}_{(3)}(31)$  に対し,

$$\lambda = (1^42^64^27) \mapsto (12^634^27) \mapsto (12^334^267) \mapsto (134^26^27) = \tilde{\lambda}.$$

集合全体での対応は先ほどの  $p = 2$  の場合の例を見て欲しい. 実験する場合には  $n = 31$  という大きな数字はお勧めしない. また,  $p$  の値が  $n$  の値に比べて大きい場合もいい例にはならない.

他にも様々な種類の分割が存在し, 条件を変えればいくらかでも作ることができるが, 本論文で扱うものはこのくらいなのでひとまず次の章に移ろう. 章の最後に記号を一つ定義をしておく. これは整数の分割と直接の関連はないのだが  $p$ -類正則な分割と何かと相性が良いためここに置かせてもらう.

**定義 2.7.** 自然数  $n, p$  に対し,  $m$  を  $p^m$  が  $n$  を割り切る最大の正整数とする. このとき  $(n)_p := p^m, (n)_{p'} := \frac{n}{p^m}$  と置き, それぞれ  $n$  の  $p$ -部分,  $p'$ -部分と呼ぶ.

\*<sup>3</sup> グレイシャー対応による対応先  $\tilde{\lambda}$  の表示に  $p$  の情報がないことに注意. 考えている集合で判断する.

### 3 ヤング図形

定義 3.1. 分割  $\lambda = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_l)$  に対してヤング図形  $Y(\lambda)$  を次で定義する.

$$Y(\lambda) := \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

また,  $\lambda$  の角の集合  $C(\lambda)$  を,

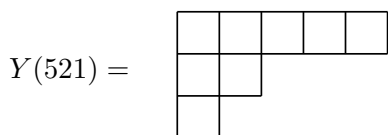
$$C(\lambda) := \{(i, j) \in Y(\lambda) \mid (i+1, j), (i, j+1) \notin Y(\lambda)\}.$$

で定義し, その個数を  $c(\lambda)$  で表す.

上の定義ではヤング図形を座標の集合として定義したが, 図としては座標平面の第 4 象限左上に詰めた箱の集合として表す. すなわち,

例.  $\lambda = (521)$  のヤング図形は,

図 1.



と表される.

定義 3.2. 分割  $\lambda$  に対し, その共役な分割  $\lambda'$  を

$$Y(\lambda') = \{(i, j) \mid (j, i) \in Y(\lambda)\}$$

を満たす分割として定義する.

分割の共役はヤング図形を対角線で折り返す操作なので, 任意の分割  $\lambda$  に対し,  $\lambda'' = \lambda$  が成り立つことが分かる. ヤング図形の各箱の中に数字を入れたもの, つまりはヤング図形から整数の集合への写像をヤング盤と呼ぶ. 入る数字の代表的な例としてフック長と呼ばれる数がある.

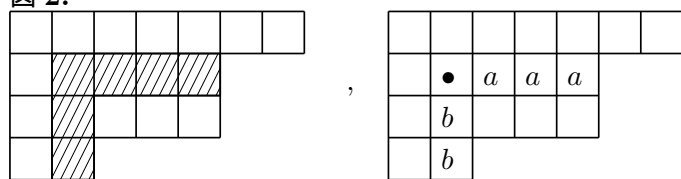
定義 3.3. 分割  $\lambda = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_l)$  と  $(i, j) \in Y(\lambda)$  について,

$$H_{ij}(\lambda) := \{(i', j') \in Y(\lambda) \mid i' = i, j' \geq j \text{ または } j' = j, i' \geq i\}.$$

を  $\lambda$  の  $(i, j)$ -フックと呼び,  $h_{ij}(\lambda) := \#H_{ij}(\lambda)$  を  $\lambda$  の  $(i, j)$ -フック長という. また,  $a_{ij}(\lambda) := \lambda_i - j$  を  $\lambda$  の  $(i, j)$ -腕長,  $b_{ij}(\lambda) := \lambda'_j - i$  を  $\lambda$  の  $(i, j)$ -脚長という. これらを使ってフック長を  $h_{ij}(\lambda) = a_{ij}(\lambda) + b_{ij}(\lambda) + 1$  と表すことができる.

例.  $\lambda = (7552)$  について,

図 2.



斜線部が  $H_{22}(7552)$  であり,  $h_{22}(\lambda) = 6$ . また,  $a, b, \bullet$  がそれぞれ腕, 脚, 胴にあたり<sup>\*4</sup>,  $a_{22}(\lambda) = 3, b_{22}(\lambda) = 2$  である. 各マス目に対応するフック長を入れた盤は次の通り.

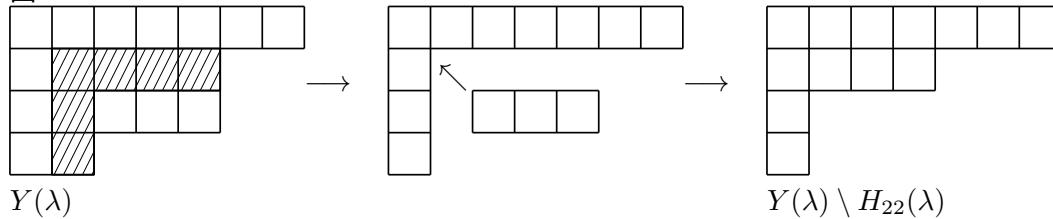
図 3.

10	9	7	6	5	2	1
7	6	4	3	2		
6	5	3	2	1		
2	1					

ヤング図形とそのフックに関しては色々面白い話が知られている [ ]. その中にフックを抜くという操作があり, 単なる集合の引き算とは違うので例で見よう.

例. 先の例でフックを抜いた結果は次の形となる.

図 4.



離れを左上に詰めるといって操作がされていて, 出来上がりの形はヤング図形となっている. ここに再びフック長を入れた盤を考えれば,

図 5.

10	7	6	5	3	2	1
6	3	2	1			
2						
1						

となる. 一列目のフック長の変化を見たときに気づくことはないだろうか<sup>\*5</sup>. このことに関する定理を 6 章で扱う.

定義 3.4.  $\lambda$  を  $n$  の分割とする.  $Y(\lambda)$  において,  $(i, j) \in Y(\lambda)$  で,  $(i+1, j+1) \notin Y(\lambda)$  である点の集合を  $\lambda$  の湾岸道路と呼び  $\partial(\lambda)$  で表す. 同様に,  $(i, j) \notin Y(\lambda)$  で,  $(i-1, j), (i, j-1), (i-1, j-1)$  の少なくともどれか一つが  $Y(\lambda)$  の点であるものの集合を  $\lambda$  の海岸線と呼び,  $\bar{\partial}(\lambda)$  で表す.

定義 3.5.  $\lambda$  を  $n$  の分割とする.  $(i, j) \in Y(\lambda)$  について,  $(i, j)$ -リム  $R_{ij}(\lambda)$  を次で定義する.

$$R_{ij}(\lambda) := \{(i', j') \in \partial(\lambda) \mid i' \geq i, j' \geq j\}$$

$(i, j)$ -リムの長さは  $(i, j)$ -フック長に等しい.

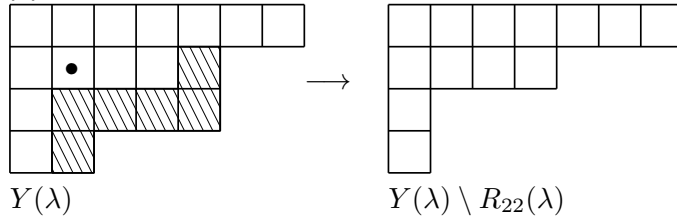
リムを除く操作をこちらは単なる集合の引き算として定義する.

<sup>\*4</sup> 定義していない.

<sup>\*5</sup> 気付いたことがあれば, 一行目でも同じことがいえるか確認しよう (共役).

例.  $\lambda = (7552)$  について,  $(2, 2)$ -リムを斜線で表す.

図 6.



$(i, j)$ -フックを抜く操作と  $(i, j)$ -リムを除く操作で, 出来上がりの分割は同じであることが見て取れる. このことを証明しよう.

定理 3.6. 任意の分割  $\lambda$  とそのヤング図形の任意のマス目  $(i, j)$  について,  $Y(\lambda) \setminus H_{ij}(\lambda) = Y(\lambda) \setminus R_{ij}(\lambda)$  が成り立つ.

証明. 定義から,  $(i, j)$ -フックを抜く操作,  $(i, j)$ -リムを除く操作で  $(i, j)$  の上側の行と左側の列は変化しないことがわかる. 従って  $(i, j) = (1, 1)$  の場合に証明すれば十分.  $R_{11}(\lambda)$  は  $\partial(\lambda)$  に等しく, 左下にマス目がないこと,  $(i+1, j+1) \notin Y(\lambda)$  が  $\partial(\lambda)$  の定義だった.  $(1, 1)$ -フックのマス目をヤング図形上で右下に詰めることで  $(1, 1)$ -リムが得られ, 特にヤング図形から除くことで得られる図形の形は等しい. このことがフックを抜く操作の中で, 離れを左上に詰めることと対応する.  $\square$

## 4 母関数

数列  $\{a_n\}$  に対し,  $a_n$  を  $x^n$  の係数とする多項式, 級数を  $\{a_n\}$  の母関数と呼ぶ. 本論文ではこの定義よりもう少し広い意味で, 「組合せ論的な対象に関する情報を保存した式」を母関数と呼ぶことにする.

例. 二項係数  ${}_m C_n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$  は,  $m$  を固定して  $n$  に関する数列とみなすことができる. ではこの二項係数の母関数が何であるかを考えれば,

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k = (1+x)^m.$$

すなわち, 二項定理<sup>\*6</sup> は  $(1+x)^m$  が二項係数の母関数である<sup>\*7</sup> という式だと思えることができる. 二項定理の両辺は多項式だが, 無限数列を考えればその母関数は級数となる. 分割数  $p(n)$  についてその母関数を考えよう.

命題 4.1. 次が成り立つ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} q^{|\lambda|} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k}.$$

<sup>\*6</sup> 二項定理そのものの証明は行わない. 後で出てくる  $q$ -二項定理の特殊化として証明できる.

<sup>\*7</sup>  $(1+x)^m$  がと書いたが, 左辺も当然二項係数の母関数である. 「母関数を考える」といった場合にはこの  $(1+x)^m$  にあたる上手い表示を考えている.

証明. 左が分割数の母関数の定義式, 真ん中は分割という組合せ論的な対象についてその大きさを保存した式だ. これらは分割数の定義から一致することが分かる. 変数が  $x$  から  $q$  に代わっているが, 本論文の意味づけにおいて分割の大きさの情報を持つ変数には  $q$  を使う. つまり  $q$  一つがヤング図形のマス目一つに対応する. 問題は右辺だが, 総積の中身  $\frac{1}{1-q^k}$  を次のように展開する.

$$\frac{1}{1-q^k} = 1 + q^k + q^{2k} + q^{3k} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} q^{mk}$$

すなわち,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k} = \prod_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{\infty} q^{mk} \right)$$

ここで多項式の積の計算方法を思い出すと, 括弧毎に一つずつ項を選び積をとったものの和として計算できた. この  $k$  の括弧から  $q^{mk}$  の項を選ぶことが分割の成分  $k$  の個数と対応すると考えれば, 積をとることで, 分割の各成分の個数が決定する\*8.

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{\infty} q^{mk} \right) = \sum_{(m_1, m_2, \dots) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\infty}} q^{m_1 + m_2 2 + m_3 3 + \dots}$$

$\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n})$  の表示で考えると分かりやすいが, 出来上がりの分割は項の選び方が違えば別の分割であるし, 全ての分割が現れている. □

この  $\prod_k \frac{1}{1-q^k}$  の形は今後もよく現れるので, 簡略化のための表示を準備する.

$$(a; b)_n := \prod_{k=1}^n (1 - ab^{k-1}).$$

と定義しよう. この表示を使えば分割数の母関数は次のように表される.

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k} = \frac{1}{(q; q)_{\infty}}.$$

既に出てきた分割についてもその母関数を求めよう.

命題 4.2. 任意の自然数  $p$  に対して次が成り立つ.

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}(p)} q^{|\lambda|} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_{(p)}} q^{|\lambda|} = \frac{(q^p; q^p)_{\infty}}{(q; q)_{\infty}}.$$

証明. この命題は大きさ  $n$  の  $p$ -正則な分割の個数と  $p$ -類正則な分割の個数が一致することの別証明にもなっている. まず  $p$ -正則な分割は同じ大きさの成分が高々  $p-1$  個の分割であり, 先ほどの

---

\*8 項を選ぶことが分割の成分の個数と対応すると書いたが, あくまでこう思うというだけだということに注意.  $q$  一つがマス目一つに対応するとしたことに矛盾してはいない.

証明の中では成分の個数と項を選ぶことが対応していたので,

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}(p)} q^{|\lambda|} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^k + q^{2k} + \cdots + q^{(p-1)k}).$$

であることが分かる. ここで総積の中身を初項 1, 公比  $q^k$  の等比数列の第  $p$  項までの和だと思えば, 和の公式から,

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}(p)} q^{|\lambda|} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - q^{pk}}{1 - q^k} = \frac{(q^p; q^p)_{\infty}}{(q; q)_{\infty}}.$$

一方  $p$ -類正則な分割は  $p$  の倍数の成分を持たない分割であり,

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}_{(p)}} q^{|\lambda|} = \prod_{k, p \nmid k} \frac{1}{(1 - q^k)} = \prod_{k, p \nmid k} \frac{1}{(1 - q^k)} \times \frac{(q^p; q^p)_{\infty}}{(q^p; q^p)_{\infty}} = \frac{(q^p; q^p)_{\infty}}{(q; q)_{\infty}}.$$

従って命題の式が証明された. □

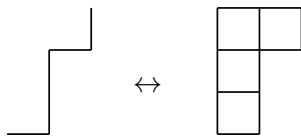
相異分割, 奇分割の母関数がこの命題の特殊化として得られる.

系 4.3. 次が成り立つ.

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{SP}} q^{|\lambda|} = \sum_{\lambda \in \mathcal{OP}} q^{|\lambda|} = \frac{(q^2; q^2)_{\infty}}{(q; q)_{\infty}} = (-q; q)_{\infty}.$$

ここまでに出てきた分割の母関数は分割数の母関数なので, 数列の母関数以外の例<sup>\*9</sup> を挙げよう. 二項係数の組合せ論的な理解はいくつかあるが, ここでは  $\binom{m+n}{n}$  を点  $(0, -n)$  から点  $(m, 0)$  への格子路の個数として理解する. 二項定理の  $(1+x)^m$  の展開の際に 1 を選ぶことが,  $x$  を選ぶことが の移動と対応する. この場合, 各格子路に対し, 格子路と  $x$  軸  $y$  軸で囲まれる図形はヤング図形になっている.

例.  $m = 2, n = 3$  に対し,  $(0, -3)$  から  $(2, 0)$  への格子路として例えば「」を考えれば,  
図 7.



よって, ヤング図形  $Y(211)$  が対応する.

このヤング図形の大きさを情報として持たせた式を考えよう. 「 $(0, -n)$  から  $(m, 0)$  への格子路」という条件を対応するヤング図形の条件に読み替えれば, 「成分  $m$  以下, 長さ  $n$  以下の分割のヤング図形」となる. すなわち考えるべき母関数は,

$$\sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{P} \\ \lambda_1 \leq m, \ell(\lambda) \leq n}} q^{|\lambda|}.$$

<sup>\*9</sup> 数列の母関数以外と書いたが, 母関数の係数として定まる数列の母関数とすればトートロジー的に数列の母関数にはなる.



これは  $q$ -二項係数と呼ばれるものであり,  $\begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix}$  で表される.

命題 4.4. 任意の自然数  $m, n$  に対し,  $q = 1$  と置けば

$$\begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix} = \binom{m+n}{n}.$$

が成り立つ.

証明.  $\begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix} = \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{P} \\ \lambda_1 \leq m, \ell(\lambda) \leq n}} q^{|\lambda|}$  の表示で考えたときに,  $q = 1$  と置けば  $q^{|\lambda|} = 1$  となり, 成分  $m$  以下, 長さ  $n$  以下の分割を数えていることになる. 先の議論からこれは  $(0, -n)$  から  $(m, 0)$  への格子路と対応し, 二項係数  $\binom{m+n}{n}$  となる.  $\square$

命題の示すことは,  $q$ -二項係数は名前の通り先の二項係数にあたるものだけということだ. つまり,  $q$ -二項定理と呼ぶべき式が  $q$ -二項係数の母関数にあたるものとして存在する. そのための準備として, ひとまず  $q$ -二項係数の上手い表示を考えることをしよう.

命題 4.5. 任意の自然数  $m, n$  に対し,

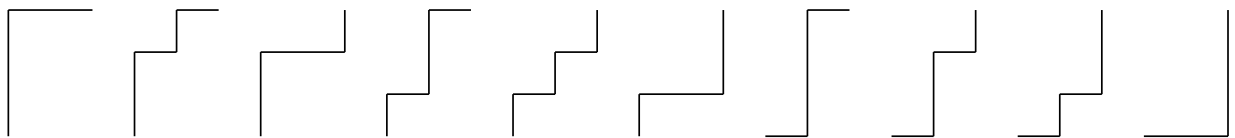
$$\begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix} = \frac{(q; q)_{m+n}}{(q; q)_m (q; q)_n}.$$

が成り立つ.

一見すれば成立どころか割り切れるかどうかも怪しい式だ. 証明の前に小さい例で実験しておこう.

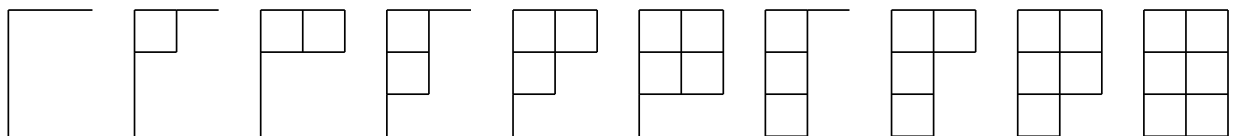
例.  $m = 2, n = 3$  について, 二項係数  $\binom{2+3}{3} = 10$  である.  $(0, -3)$  から  $(2, 0)$  への格子路 10 通りを辞書式に\*10 全て挙げれば,

図 8.



ヤング図形の見える形にすれば,

図 9.



従って,  $q$ -二項係数が各ヤング図形の大きさをの情報をベキに持つ  $q$ -多項式として表され,

$$\begin{bmatrix} 3+2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 + q + q^2 + q^2 + q^3 + q^4 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 = 1 + q + 2q^2 + 2q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6,$$

\*10 を優先とした.

が分かる。一方,

$$\frac{(q; q)_5}{(q; q)_3(q; q)_2} = \frac{(1 - q^5)(1 - q^4)}{(1 - q^2)(1 - q)} = (1 + q^2)(1 + q + q^2 + q^3 + q^4) = 1 + q + 2q^2 + 2q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6,$$

となり, この場合に一致することが確認できた。一般の証明は双方が満たす漸化式を与えることで行う。基となるものは二項係数が満たす次の式だ。

命題 4.6. 任意の自然数  $m, n$  に対し次が成り立つ。

$$\binom{m+n}{n} = \binom{m+n-1}{n-1} + \binom{m+n-1}{n}.$$

パスカルの三角形を二項係数の定義とした場合には当たり前前の性質であるのでここでの証明は行わない<sup>\*11</sup>。まず  $q$ -二項係数の側で漸化式を準備する。

命題 4.7. 任意の自然数  $m, n$  に対し次が成り立つ。

$$\left[ \begin{matrix} m+n \\ n \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} m+n-1 \\ n-1 \end{matrix} \right] + q^n \left[ \begin{matrix} m+n-1 \\ n \end{matrix} \right] = q^m \left[ \begin{matrix} m+n-1 \\ n-1 \end{matrix} \right] + \left[ \begin{matrix} m+n-1 \\ n \end{matrix} \right].$$

証明. 二つ目の等号は  $m$  と  $n$  の役割を入れ替えただけなので, 一つ目の等号のみ証明する。分割の母関数として考えよう。左辺は成分  $m$  以下, 長さ  $n$  以下の分割の母関数だったので, これを長さ  $n$  の分割と長さ  $n-1$  以下の分割に分ける。このとき, 長さ  $n-1$  以下の側は  $q$ -二項係数  $\left[ \begin{matrix} m+n-1 \\ n-1 \end{matrix} \right]$  として表せる。一方長さ  $n$  の側も全ての成分を 1 だけ小さくすれば, 元から 1 であった成分は消えてしまい長さ  $n$  以下とできる。ここで成分の大きさは 1 小さくなって  $m-1$  以下であり,  $\left[ \begin{matrix} m+n-1 \\ n \end{matrix} \right]$  で表される。小さくした分を補ってやれば, 求める式が得られる。□

命題 4.3. の証明 命題の右辺が同じ漸化式を満たすこと, すなわち,

$$\frac{(q; q)_{m+n}}{(q; q)_m(q; q)_n} = \frac{(q; q)_{m+n-1}}{(q; q)_m(q; q)_{n-1}} + q^n \frac{(q; q)_{m+n-1}}{(q; q)_{m-1}(q; q)_n}.$$

を式変形で示す。

$$\begin{aligned} \frac{(q; q)_{m+n-1}}{(q; q)_m(q; q)_{n-1}} + q^n \frac{(q; q)_{m+n-1}}{(q; q)_{m-1}(q; q)_n} &= \frac{(q; q)_{m+n-1}}{(q; q)_{m-1}(q; q)_{n-1}} \left( \frac{1}{1 - q^m} + \frac{q^n}{1 - q^n} \right) \\ &= \frac{(q; q)_{m+n-1}}{(q; q)_{m-1}(q; q)_{n-1}} \frac{1 - q^n + q^n(1 - q^m)}{(1 - q^m)(1 - q^n)} \\ &= \frac{(q; q)_{m+n-1}}{(q; q)_{m-1}(q; q)_{n-1}} \frac{1 - q^{m+n}}{(1 - q^m)(1 - q^n)} \\ &= \frac{(q; q)_{m+n}}{(q; q)_m(q; q)_n}. \end{aligned}$$

<sup>\*11</sup>  $q$ -二項係数での漸化式成立の証明を  $q = 1$  に特殊化すれば証明できる。

あとは初期値を確認すればよいが,  $m \geq 0$  について,

$$\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} = 1 = \frac{(q; q)_m}{(q; q)_m (q; q)_0} = \frac{(q; q)_m}{(q; q)_0 (q; q)_m}.$$

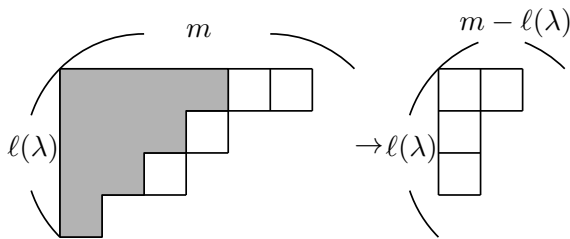
従って帰納的に一致することが示せた. □

続いては  $q$ -二項定理だ.  $(1+x)^m$  にあたるものとしてその  $q$ -類似,  $(-xq; q)_m = \prod_{k=1}^m (1+xq^k)$  を考えよう. 二項定理と同じ組合せ論の理解を付けたいところだが, 直接格子路と対応させるのは上手くない. 例えば, の様な格子路は対応するヤング図形の大きさが 0 となったが, の移動と  $x$  の付いた項を選ぶことが対応していたので, この時点で  $q$  のべき指数が 0 を超えてしまう. なので, ひとまずヤング図形の母関数として理解した上で格子路の話へつなげることにする. どういったヤング図形の母関数として理解するのだが, 今まで見た中で相異分割の母関数が比較的形に近い.  $k$  の範囲を制限したことは成分大きさの制限と対応し, また新しい変数  $x$  が入ることで大きさ以外の情報も持った式になっていると予想できる. 分割の母関数の理解は 1 でない項と成分を対応させていた. ここでは各成分に変数  $x$  が一つずつ付いてくることになり, 結果  $x$  のべき指数は成分の個数, 分割の長さを表している. すなわち,

$$(-xq; q)_m = \sum_{\substack{\lambda \in SP \\ \lambda_1 \leq m}} x^{|\lambda|} q^{|\lambda|}.$$

さて, 格子路と対応する分割に相異などという制限はなかったのでその点の調整が必要だ. 相異分割を一般の分割に移すための常套手段として次の操作がある.

図 10.



これは相異分割  $\lambda$  の各成分を  $\lambda_1 \rightarrow \lambda_1 - \ell(\lambda), \lambda_2 \rightarrow \lambda_2 - \ell(\lambda) + 1, \dots$  と階段状に減らす操作だ. この操作により成分の間の大小関係の逆転はおこらず, 成分  $m - \ell(\lambda)$  以下, 長さ  $\ell(\lambda)$  以下の分割に移している. <sup>\*12</sup> これで  $q$ -二項係数で扱える形になったわけだが, 先の漸化式の証明と同様に減らした分のマス目の情報は持たせる必要がある. 従って,

$$(-xq; q)_m = \sum_{k=0}^m x^k \sum_{\substack{\lambda \in SP \\ \lambda_1 \leq m, \ell(\lambda)=k}} q^{|\lambda|} = \sum_{k=0}^m x^k q^{\frac{k(k+1)}{2}} \sum_{\substack{\lambda \in P \\ \lambda_1 \leq m-k, \ell(\lambda) \leq k}} q^{|\lambda|} = \sum_{k=0}^m q^{\frac{k(k+1)}{2}} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

<sup>\*12</sup> 図で見るように  $\ell(\lambda)$  段の階段を引いた形だが,  $\ell(\lambda) - 1$  段の階段を引くことで分割の長さを変えない操作もよく使われる.

定理 4.8 ( $q$ -二項定理). 任意の自然数  $m$  に対して次が成り立つ.

$$\sum_{k=0}^m q^{\frac{k(k+1)}{2}} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} x^k = (-qx; q)_m.$$

$q$ -二項定理が得られただけだが, 議論の過程で  $q^{\frac{k(k+1)}{2}}$  というオマケが付いてしまったため  $q$ -二項係数の母関数とは少し思いにくい. 式の形に釣られて相異分割から考え始めた点を改め, 一般の分割に対して成分を制限し長さの情報を持たせた式を考える. 先と同じ様に考えれば, 成分の大きさの制限は総積の範囲の制限であり, 各成分に  $x$  を付ければ長さの情報が得られたので,

$$\frac{1}{(xq; q)_m} = \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{P} \\ \lambda_1 \leq m}} x^{\ell(\lambda)} q^{|\lambda|} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{P} \\ \lambda_1 \leq m, \ell(\lambda)=k}} q^{|\lambda|}.$$

先の  $q$ -二項定理での同様の变形との違いとして,  $k$  の範囲が無限となっている点がある. これは相異分割であれば最大の成分を制限すれば自然と長さも制限されるが, 一般の分割だとそれがないためだ.  $q$ -二項係数に持ち込むために「長さ  $k$  以下」の形にしたい. そのためには漸化式の証明の中でも使った各成分を 1 ずつ減らす操作をすればよい. ここでも減らしたマス目の個数は覚えておく. すると,

$$\frac{1}{(xq; q)_m} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k q^k \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{P} \\ \lambda_1 \leq m-1, \ell(\lambda) \leq k}} q^{|\lambda|} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k q^k \begin{bmatrix} m+k-1 \\ k \end{bmatrix}.$$

ここでもまだ  $q^k$  がオマケとしてついているが, 先ほどの違いは  $x$  のべき指数と一致している点だ. 従って  $xq$  を  $x$  で置き換える操作で消すことができる. すなわち,

定理 4.9 ( $q$ -二項級数定理<sup>\*13</sup>). 任意の自然数  $m$  に対し次が成り立つ.

$$\frac{1}{(x; q)_m} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \begin{bmatrix} m+k-1 \\ k \end{bmatrix}.$$

パスカルの三角形で考えれば, 二項定理が行に現れる二項係数の母関数であったのに対して, 二項級数定理はナナメに見た数列の母関数となっている.  $m$  を動かすことで二項級数定理の側にもすべての二項係数が現れる.

## 5 公式集

$q$ -級数の式について, よく使う式変形をまとめておく. 式変形とはいっても間に母関数をはさんでいたり, 話の流れの都合で母関数の式そのものが命題として現れることもある. 前章が母関数の導入だったのに対してその応用といった意味合いが強い.

\*13 置き換える前のものを  $q$ -二項級数定理と呼ぶ場合もある.

命題 5.1. 任意の自然数  $n$  に対して,

$$(q^{2n}; q^{2n})_{\infty} = (q^n; q^n)_{\infty} (-q^n; q^n)_{\infty}.$$

証明.  $n = 1$  の場合に証明すれば十分である.

$$(q; q)_{\infty} (-q; q)_{\infty} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)(1 + q^k) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k}) = (q^2; q^2)_{\infty}.$$

となり示せた. 式の両辺を  $(q; q)_{\infty}$  で割った形を見ればそれぞれ奇分割, 相異分割の母関数になっている. □

命題 5.2. 次が成り立つ.

$$\frac{q}{(1 - q)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kq^k.$$

証明. まず  $\frac{1}{(1 - q)^2} = (1 + q + q^2 + \dots)^2$  の  $q^n$  の係数を考えると, 正整数二つの和で  $n$  を表す方法であり<sup>\*14</sup>,  $0 + n, 1 + (n - 1), \dots, n + 0$  の  $n + 1$  通り. 全体に  $q$  を掛けてずらすことで指数と係数が一致する. □

命題 5.3. 次が成り立つ.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{(1 - q^k)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kq^k}{1 - q^k}.$$

証明. 両辺の  $k$  は意味が違うことに注意<sup>\*15</sup>. 上の命題で  $q$  を  $q^m$  で置き換えたものの  $m$  についての総和を考える. このとき, 左辺は  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^m}{(1 - q^m)^2}$  となり, 命題の左辺と一致する. 一方右辺は,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} kq^{mk} = \sum_{k=1}^{\infty} kq^k \sum_{m=1}^{\infty} q^{(m-1)k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kq^k}{1 - q^k}.$$

命題の右辺と一致したので示せた. □

命題 5.4. 次が成り立つ.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_1(k)q^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{(1 - q^k)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kq^k}{1 - q^k}.$$

先ほどの式が  $\sigma_1$  なる数列の母関数であるという命題だ. この  $\sigma_1$  は約数関数と呼ばれるもので, 次の一般化した形で定義される.

定義 5.5. 任意の自然数  $n$  について, 約数関数  $\sigma_m$  を次のように定義する.

$$\sigma_m(n) := \sum_{d, d|n} d^m = \sum_{d, d|n} \left(\frac{n}{d}\right)^m.$$

<sup>\*14</sup> ここでは和の順番が違えば別物として考えている.

<sup>\*15</sup> あくまで本論文の理解では違う意味だということ. 同じ意味を与える上手い理解の仕方もあるかもしれない.

すなわち自然数  $n$  に対してその約数の  $m$  乗の総和を与えるのが  $\sigma_m$  だ. 特に  $\sigma_1$  であれば約数そのものの総和を,  $\sigma_0$  であれば約数の個数を与えていることになる.

証明. 真ん中の式は考えず,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_1(k)q^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kq^k}{1-q^k}.$$

の形で見よう. 右辺を変形すれば,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kq^k}{1-q^k} = \sum_{k=1}^{\infty} (kq^k + kq^{2k} + kq^{3k} + \dots).$$

である.  $q^n$  の係数を考えよう.  $k$  が  $n$  の約数でない場合,  $k$  の括弧の中には  $q^n$  の項は現れない. 一方  $k$  が  $n$  の約数であれば,  $k$  の括弧の中に  $q^n$  の項は一度だけ現れその係数は  $k$  である. 従って総和をとった際の  $q^n$  の係数は,  $n$  の約数  $k$  についてその総和であり  $\sigma_1(n)$  となる.  $\square$

証明を見れば,  $n$  の約数  $k$  について  $q^k$  の係数の和が  $q^n$  の係数になっている. 約数関数の定義との対応を考えれば一般の約数関数の母関数は同様に証明できる.

命題 5.6. 任意の自然数  $m$  に対し, 次が成り立つ.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_m(k)q^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^m q^k}{1-q^k}.$$

特に  $\sigma_0$  の母関数は,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_0(k)q^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1-q^k}.$$

で与えられる. この右辺をヤング図形の母関数として理解しよう. これまで分割の母関数は総積の形で出てきていたので様子は違うが, 各  $\frac{q^k}{1-q^k}$  の理解に重複がなければ良しとする.

命題 5.7. 次が成り立つ.

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}, c(\lambda)=1} q^{|\lambda|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1-q^k}.$$

証明. 左辺の表示はどう書こうか迷ったが,  $c(\lambda)$  を定義していたことを思い出したので簡潔な表示にした<sup>\*16</sup>. 角が一つのヤング図形, すなわち長方形型のヤング図形の母関数であることを示す. 右辺の各  $\frac{q^k}{1-q^k}$  を展開すれば,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1-q^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q^{mk}.$$

となった.  $k$  の係数  $m$  と成分  $k$  の個数が対応するというのが定石だったのでそれに従おう. ただし, 総和であるので成分  $k$  の個数を決めてそこで終わり. すなわち,  $q^{mk}$  の項は  $(k^m)$  という分割

<sup>\*16</sup> 他の条件の候補としては,  $\lambda_1 = \lambda_{\ell(\lambda)}$  や,  $\lambda = (k^m)$  と表示して  $k, m$  での総和 (証明そのまま) などがある.

と対応する。これは長方形型の分割であり、 $k, m$  が縦横に対応する。 $k, m$  に関する総和を考えているため、任意の長方形が一度ずつ現れることになる。□

少しずつ分割の話にシフトしてきた。本論文中での母関数とは組合せ論的な対象についてその情報を保存した式を言った。分割についての情報というのは  $c(\lambda)$  もそうだが、2章、3章でいくつか出てきている。今のところ母関数に現れた情報は大きさ  $|\lambda|$  と長さ  $\ell(\lambda)$  だけなので他のものについても少し見ていこう。まずは、長さ大きさの両方と関連する数だった成分  $k$  の個数  $m_k(\lambda)$  についてみよう。長さの情報を持たせた母関数は  $\frac{1}{1-q^k}$  を  $\frac{1}{1-xq^k}$  で置き換えることで得られた。この際には総積の中のすべての  $k$  に対しての置き換えを行ったのだが、一つの  $k$  だけに限定することで  $m_k$  の情報が得られる。もしくは、全ての  $k$  にそれぞれ違う変数を持たせること（色づけ）で全ての  $m_k$  の情報を同時に保存することもできる。

命題 5.8. 任意の自然数  $k$  に対し、次が成り立つ。

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} q^{|\lambda|} x^{m_k(\lambda)} = \frac{(1-q^k)}{(q; q)_\infty (1-xq^k)}, \quad (1)$$

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} q^{|\lambda|} \prod_{i=1}^{\infty} x_i^{m_i(\lambda)} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty} (1-x_i q^i)}. \quad (2)$$

二つ目の式が変数を変えた場合だが、ここで  $x = x_1 = x_2 = \dots$  と同じ変数にすれば長さの情報を持たせた母関数に戻る。式の左辺の側で理解しても、 $m_i$  たちの総和が得られることになり、 $\ell(\lambda) = \sum_i m_i(\lambda)$  を再確認できる<sup>\*17</sup>。

どうも今までやったことの繰り返しの感があり面白みに欠ける。母関数の情報の保存先に指数以外のものは考えられないだろうか。わざとらしいが、実は先ほどの約数関数の式が  $m_i$  の情報を係数に持たせた式と関連している。

命題 5.9. 任意の自然数  $k$  に対して、次が成り立つ。

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} m_k(\lambda) q^{|\lambda|} = \frac{1}{(q; q)_\infty} \frac{q^k}{1-q^k}.$$

証明. 右辺は一般の分割の母関数,

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} q^{|\lambda|} = \frac{1}{(q; q)_\infty} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^i}.$$

この式の  $\frac{1}{1-q^k}$  だけを  $\frac{q^k}{(1-q^k)^2}$  で置き換えたものとみることができる。命題 5.2. によれば、

$$\frac{q^k}{(1-q^k)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} m q^{mk}.$$

<sup>\*17</sup> 厳密には総和をとっているため少し弱い式であり、再確認にはならない。

だった。  $q^{mk}$  の項を選ぶことが成分  $k$  の個数を決めることと対応していたが、これは  $q^{mk}$  のオマケで  $m$  が付いてくる。従って、成分  $k$  の個数が  $m_k$  個の分割には  $m_k$  が係数として現れる。  $\square$

系 5.10. 次が成り立つ。

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \ell(\lambda) q^{|\lambda|} = \frac{1}{(q; q)_\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1 - q^k}.$$

証明. 右辺を見れば先ほどの式を  $k$  について総和を取った形になっている。その場合、左辺分割  $\lambda$  の係数には  $m_k(\lambda)$  の総和が現れるわけだが、それは長さに他ならない。  $\square$

係数に情報を持たせることをしてきたが、種明かしをすれば指数にあったものを係数に移すためには微分をすればいいわけだ。証明した命題が実際に微分で得られることを確認する。命題 5.8. の (1) 式を  $x$  で微分しよう。

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} m_k q^{|\lambda|} x^{m_k - 1} = \frac{1 - q^k}{(q; q)_\infty} \cdot \left( \frac{1}{1 - xq^k} \right)' = \frac{1 - q^k}{(q; q)_\infty} \frac{q^k}{(1 - xq^k)^2}.$$

ここで  $x = 1$  と置けば命題 5.9. の式が得られる。系 5.10. に関しても同様に微分で作ることができるのでやってみるとよい。積の微分が総和に化ける。使うまでもない対数微分をあえて使うのもお勧めだ。

分割についての情報を母関数に持たせるという話に戻るのが自然な流れかと思うがここで打ち止めだ。フック長に関しては 7 章でその積についての公式を扱う。  $c(\lambda)$  の情報を持った式は 9 章で扱う。一般の分割で行ってきた話を制限された分割にも応用しよう。  $p$ -正則な分割と  $p$ -類正則な分割の母関数は同じものだったが、  $m_k(\lambda)$  や  $\ell(\lambda)$  の情報を持たせると違いが出る。

命題 5.11. 任意の自然数  $k, p$  について次が成り立つ。

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}(p)} x^{m_k(\lambda)} q^{|\lambda|} = \frac{1 - x^p q^{kp}}{1 - xq^k} \prod_{i, i \neq k} \frac{1 - q^{ip}}{1 - q^i}, \quad \sum_{\mu \in \mathcal{P}(p)} x^{m_k(\mu)} q^{|\mu|} = \frac{1}{1 - xq^k} \prod_{i, i \neq k, p \nmid i} \frac{1}{1 - q^i}.$$

ただし、二つ目の類正則な分割についての式では  $k$  は  $p$  の倍数でない。

証明.  $p$ -正則な分割と  $p$ -類正則な分割は同じ式で与えられたが、何を成分  $k$  と思うかには違いがあった。  $p$ -正則では、

$$\frac{(q^p; q^p)_\infty}{(q; q)_\infty} = \prod_{i \geq 1} \frac{1 - q^{ip}}{1 - q^i} = \prod_{i \geq 1} (1 + q^i + q^{2i} + \cdots + q^{(p-1)i}).$$

この形に変形した際の  $q^{mk}$  を  $m$  個の成分  $k$  と思い、一方  $p$ -類正則では、

$$\frac{(q^p; q^p)_\infty}{(q; q)_\infty} = \prod_{i, p \nmid i} \frac{1}{1 - q^i} = \prod_{i, p \nmid i} (1 + q^i + q^{2i} + \cdots + q^{(p-1)i}).$$

この  $q^{mk}$  を同じく  $m$  個の成分  $k$  と思っていた。成分  $k$  と対応する部分を個数  $m_k$  の情報を持たせた式に置き換えたものが命題の式だ。  $\square$



成分  $k$  と対応する部分だけを置き換えたものが命題 5.11 だが, 全ての  $i$  で置き換えを行えば長さの情報を持った母関数になった.

命題 5.12. 任意の自然数  $p$  について次が成り立つ.

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}(p)} x^{\ell(\lambda)} q^{|\lambda|} = \frac{(x^p q^p; q^p)_\infty}{(xq; q)_\infty}, \quad \sum_{\mu \in \mathcal{P}(p)} x^{\ell(\mu)} q^{|\mu|} = \frac{(xq^p; q^p)_\infty}{(xq; q)_\infty}.$$

長さの式の方は何が違うのかが一目で分からない.  $m_k$  の方では見えているどこで約分したかの違いが, 積を取ることで上手く隠れている. 後で使うので  $m_k$  を係数に置いた式も準備しておく. 直接証明してもいいし, 先ほどと同様に命題 5.11 の式を微分することでも得られる.

命題 5.13. 任意の自然数  $k, p$  について次が成り立つ.

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}(p)} m_k(\lambda) q^{|\lambda|} = \left( \frac{q^k}{1 - q^k} - \frac{pq^{kp}}{1 - q^{kp}} \right) \frac{(q^p; q^p)_\infty}{(q; q)_\infty}, \quad \sum_{\mu \in \mathcal{P}(p)} m_k(\mu) q^{|\mu|} = \frac{q^k}{1 - q^k} \frac{(q^p; q^p)_\infty}{(q; q)_\infty}.$$

こちらも類正則な分割についての式では  $k$  は  $p$  の倍数でないとする.

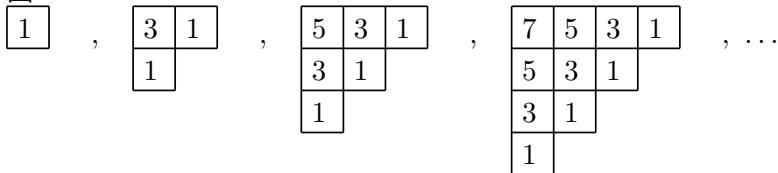
## 6 コアな分割

本章の内容は [6] で学んだ内容だ. 詳しい話や発展的な内容はそちらに任せるとして, 章題のコアよりもむしろそれを扱うアバカスという道具の導入が中心となる. ヤング図形にフック長を入れた盤を考える話があった.

定義 6.1. 任意の自然数  $p$  に対し, 長さ  $p$  のフックを持たない分割を  $p$ -コアな分割と呼ぶ.  $p$ -コアな分割全体のなす集合を  $\mathcal{C}(p, n)$  で表す.

例. 階段型の分割は 2-コアである.

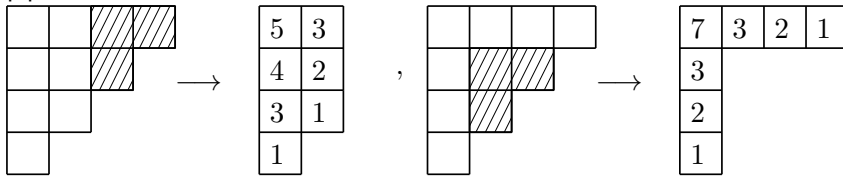
図 11.



実際は階段型以外の 2-コアな分割は存在せず, 三角数以外の  $n$  については  $\mathcal{C}(2, n)$  は空集合となる.

一般の分割が与えられたとき, ヤング図形から長さ  $p$  のフックを抜く操作を続けることで最終的に  $p$ -コアな分割を得ることができる. この操作自体を  $p$ -コアをとると呼び, 出来上がりの分割を元の分割の  $p$ -コアと呼ぶ. しかし, これが写像になっているかということは初めてみる人にとっては大変に疑わしいものだと思う. 例えば上の例で長さ 3 のフックを抜くことを考えよう.

図 12.



フックを抜くことでヤング図形の形が変わるため、他の長さ 3 のフックがさっきあったところにある保証がないのだ。オマケに抜いたフックの位置が違えば残りのフック長の面子も変わってくる。well-defined であることを見るために、まずフックを抜く操作で他のフック長がどう変化するかを調べよう。フックを抜く操作のところで触れたように、一列目のフック長の変化には規則性がある。そして、実は一列目のフック長が分かればすべてのフック長も分かることが知られている。このことの証明の前に少し説明をすると、適当な例で一列目のフック長を見てもらえばこれが狭義の減少列、すなわち相異分割になっていることが分かる。相異分割と一般の分割の対応が、まさに今見た階段型の分割の足し引きで与えられたわけだが、一列目に現れるフック長はまさにこれによって考えている分割と対応する相異分割である。従って一列目のフック長に逆操作を施せば考えている分割が得られ、分割は当然すべてのフック長の情報を持っている。<sup>\*18</sup> まずは分割と対応する相異分割にあたる  $\beta$ -集合というものを定義する。これはマヤ図形とも呼ばれるものであり、0 を成分として持つことを許しているため、相異分割より少し一般的なものだ。

**定義 6.2.** 正整数の狭義減少列  $X = \{h_1, h_2, \dots, h_t\}$ , ( $h_1 > h_2 > \dots > h_t \geq 0$ ) を  $\beta$ -集合と呼ぶ。 $\beta$ -集合  $X$  に対して、 $P^*(X) = (h_1 - t + 1, h_2 - t + 2, \dots, h_t)$  は整数の分割である。ここで  $P^*(X)$  に現れる 0 は無視している。 $P^*(X) = \lambda$  であるとき、 $X$  は  $\lambda$  と対応する  $\beta$ -集合であるという。

**定義 6.3.**  $\beta$ -集合  $X = \{h_1, h_2, \dots, h_t\}$  に対し、 $\beta$ -集合  $X^{+1}$  を

$$X^{+1} = \{h_1 + 1, h_2 + 1, \dots, h_t + 1, 0\}$$

すなわち、全ての成分を 1 だけ大きくし、新たに成分 0 を加えたものとして定義する。また、2 以上の自然数  $s$  に対しては  $X^s = (X^{s-1})^{+1}$  と帰納的に定義する。

例.  $\beta$ -集合  $X = \{5, 2, 1\}$  について、

$$X^{+1} = \{6, 3, 2, 0\}, X^{+4} = \{9, 6, 5, 3, 2, 1, 0\},$$

$$P^*(X) = (311), P^*(X^{+1}) = (3110), P^*(X^{+4}) = (3110000).$$

$P^*(X)$  の定義と比べれば、 $P^*(X) = P^*(X^{+1})$  であることが分かり、従って任意の自然数  $s$  に対して、 $P^*(X) = P^*(X^{+s})$  である。一列目のフックから元の分割を得る方法は分かったので次は他のフック長の出し方だ。

<sup>\*18</sup> ここまでで実は少しミスリードをしている。何かといえば一列目のフックを抜く操作、すなわち分割の成分の個数の変わる操作をまだ見ていない。そのためこの時点で規則性が見当がついていてもおそらくは若干のひねりが必要になるだろう。

命題 6.4 (Frame, Robinson, Thrall). 分割  $\lambda$  に対し, その一列目のフック長の集合を  $X = \{h_{11}, h_{21}, \dots, h_{\ell(\lambda)1}\}$  と置く. このとき,  $\lambda$  の  $k$  行目のマス目に長さ  $h$  のフックがあるための必要十分条件が次で与えられる.

$$h \in \{h_{kj}(\lambda) \mid 1 \leq j \leq \lambda_k\} \Leftrightarrow 1 \leq h \leq h_{k1} \wedge \forall i > k, h \neq h_{k1} - h_{i1}.$$

例.  $\lambda = (631)$  について,

図 13.

8	6	5	3	2	1
4					
1					

一行目のフック長  $\{8, 6, 5, 3, 2, 1\}$  の抜けである  $7, 4$  は一列目のフック長  $\{8, 4, 1\}$  を用いて  $7 = 8 - 1, 4 = 8 - 4$  と表される.

すなわち,  $k$  行目のフック長は  $1$  から  $h_{k1}$  までの数字から  $h_{k1} - h_{(k+1)1}, h_{k1} - h_{(k+2)1}, \dots, h_{k1} - h_{\ell(\lambda)1}$  の  $\ell(\lambda) - k$  個すなわち  $b_{k1}(\lambda)$  個の数字を除いたものだという命題だ. 個数の勘定は合うので証明を見よう.

証明. まず,  $h_{k1} = h_{k1}(\lambda)$  が分かっているため,  $\lambda$  の  $k$  行目のフック長は  $h_{k1}$  から始まる減少列だ. 上でいったように個数の勘定は合うため,  $h_{k1} - h_{i1}$  のフック長を持たないことを言えば十分である. さらに,  $k$  行目のフックを見るのに  $k - 1$  までの行は関係ないため,  $k = 1$  の場合で証明すればよい. リムの長さとはフック長は一致していた. 証明が見やすいのでリムの方で話をする.  $(1, 1)$ -リムに次の様に数字を入れる.

図 14.

				3	2	1
				4		
	8	7	6	5		
10	9					

, 

				8	9	10
				7		
	3	4	5	6		
1	2					

, 

10						
7						
6						
2						

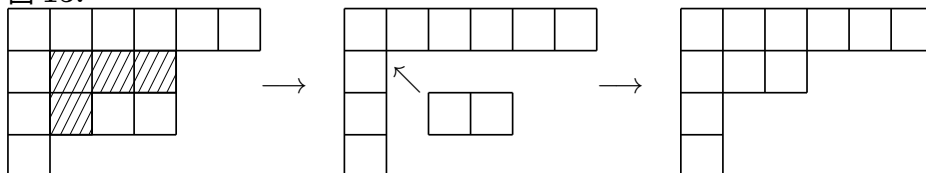
左の図は右上から, 中央の図は左下から順に,  $1$  から  $h_{11}(\lambda)$  までの数字をリムに入れたもの, 右の図は一列目にフック長を入れた図だ. 中央と右の図を比べれば, 中央の図の右端に各行の一列目のフック長が現れていることが分かる. このことはリムとフックの長さの一致から成り立ち, 同様に考えれば左の図の下側には一行目のフック長が現れる. 現れなかった数字すなわち自身の下にマス目を持つ数字が  $h_{11} - h_{i1}$  の形に表示されればよい. 左の図で自身の下にマス目を持つ数字と, 一つ下のマス目の中央での数字とを足し合わせれば, 右上と左下の両側からリムを数えたことになり,  $h_{11}$  が得られる. すなわち  $h_{11}$  から一つ下のマス目の中央での数字を引けば元の数字が得られるわけだが, 中央の図で一つ下のマス目に入る数字は先ほど見たように一列目のフック長だった.  $\square$

それではフックを抜いたときの一行目のフック長の変化を定理として書こう. 正確にはフックを抜いたときの対応する  $\beta$ -集合の変化だ.

命題 6.5. 分割  $\lambda$  と対応する  $\beta$ -集合が  $X = \{h_1, h_2, \dots, h_t\}$  で表されるとき,  $\lambda$  から  $(i, j)$ -フックを抜いた分割の  $\beta$ -集合は  $\{h_1, h_2, \dots, h_i - h_{ij}(\lambda), \dots, h_t\}$  で与えられる.

証明. フックを抜くことで分割の成分がどう変わるかを考える.  $\lambda = (\lambda_1 \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$  と置く. もう一度フックを抜く操作を思い出そう.

図 15.

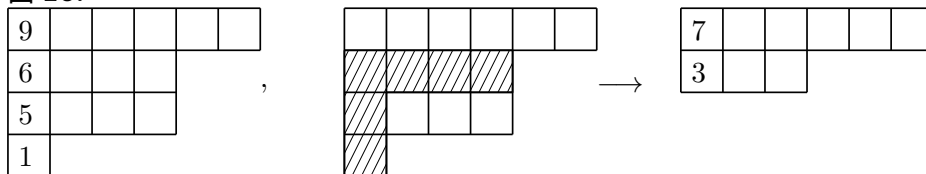


集合の引き算の後に左上に詰めていたように見えていたが, まず左に詰めた上で大小関係が合うように成分の順序を入れ替えていると思うこともできる. ここで大小関係の入れ替えが起こる所がどこか, すなわち  $\lambda_i$  がどこまで下がるのかということ, 脚長  $b_{ij}(\lambda)$  分までしか下がらない. 図を見ても分かる通り, 脚の届いていない所の成分は  $\lambda_i$  から腕と胴体を抜いたものよりも小さいからだ.  $\beta$ -集合がどうなるかだが簡単のため入れ替え後のフック長がどうなるのかだけで話をする.  $(i-1)$  行目以前と  $(i+b_{ij}(\lambda)+1)$  行目以降は図で見て変化がないことが分かる.  $(i+1)$  行目から  $(i+b_{ij}(\lambda))$  行目は成分が 1 小さくなった分, 行が一つ繰り上がっているためこれも変化なし.  $i$  行目だけが, 成分が  $a_{ij}(\lambda)+1$  小さくなり, 脚の長さも  $b_{ij}(\lambda)$  短くなったため, 合計  $h_{ij}(\lambda)$  減少している.  $\square$

証明でごまかした部分\*<sup>19</sup>, フックを抜くことで行の長さが変わる場合について例で見よう.

例.  $\lambda = (6441)$  の  $(2, 1)$ -フックを抜く場合を考える.

図 16.



一列目のフック長が  $\{9, 6, 5, 1\}$  のヤング図形から二行目の長さ 6 のフックを抜いたため, 出来上がりはのヤング図形の一列目には  $\{9, 5, 1, 0\}$  が現れて欲しいが実際には違う. しかし  $\beta$ -集合として見たとき  $\{9, 5, 1, 0\} = (\{7, 3\})^{+2}$  であり対応する分割は等しい.

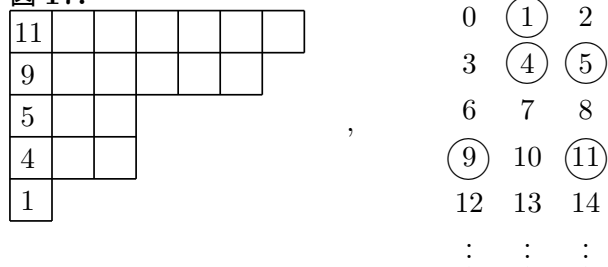
長さ  $p$  のフックを抜く操作が  $\beta$ -集合で数字を  $p$  小さくする操作と対応することが分かった. この時点で「従って一般の分割から  $p$ -コアな分割を得る操作は well-defined だ」と言ってもいいのかもしれないが,  $p$ -アバカス (算盤) というものを導入することでさらに考えやすくなる.

定義 6.6. 自然数  $p$  に対し,  $p$  本の軸を持つ算盤を  $p$ -アバカスと呼ぶ. 各軸は左から  $p$  を法として  $0, 1, 2, \dots, p-1$  と合同な数と対応し, 珠が置かれる位置には上から順にそれらの数が並んでいるものとする. 分割  $\lambda$  に対し対応する  $\beta$ -集合の位置に珠を置いた  $p$ -アバカスを  $\lambda$  の  $p$ -アバカスと呼ぶ.

\*<sup>19</sup>  $\beta$  集合に対応する分割に 0 が現れていたことを考慮してフックを抜いたときの分割の成分と比べればよい. 難しくはないのだが表示がうるさいためここでは省略した.

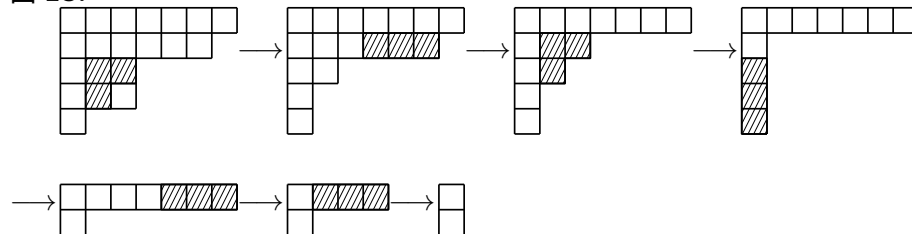
例.  $\lambda = (76331)$  に対し, その 3-アバカスは次で表される.

図 17.



対応する  $\beta$ -集合として一列目のフック長の集合を使っているが, 他の  $\beta$ -集合で考えてもよい. さて, 長さ  $p$  のフックを抜くことが  $\beta$ -集合の数字を  $p$  小さくすることに対応していたわけだが,  $p$ -アバカス上で考えればこのことは珠を一つ上に弾くことに対応する. 従って, 最終的に得られる  $p$ -コアな分割を考えるには珠を上詰めにすればよく, これは操作の過程によらず軸上の珠の個数で決定する<sup>\*20</sup>. 例の場合に珠を上詰めにすれば珠の位置は左の軸から  $0, 1, 4, 2, 5$  となり,  $\beta$ -集合  $X = \{5, 4, 2, 1, 0\}$  に対して  $P^*(X) = (11000) = (11)$  の分割に対応する. 実際に適当な操作<sup>\*21</sup> で長さ 3 のフックを抜いていけば,

図 18.



となり,  $p$ -コアな分割  $(11)$  が得られる.

この後に続く  $p$ -商や  $p$ -コアな分割の母関数の話も楽しいのだが, アバカスの導入を目的としていたのでこの章での話はここまでとする. アバカスは次章での証明の主役になり, ?章でも類似の  $H$ -アバカス ( $\bar{4}$ -アバカス) が登場する.

## 7 ヤング図形のフック長の積

対称群  $S_n$  の元  $\sigma$  を相異なる数字の巡回置換の積で表すことができ, その巡回置換の長さを並べたものを  $\sigma$  の巡回型と呼んだ. 長さ 1 の巡回置換を省略しなければ, この巡回型を  $n$  の分割と考えることができる. 今  $\sigma$  の巡回型を  $\rho = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n}) \in \mathcal{P}(n)$  とすると, 中心化群の大きさは巡回型によって決定し,

$$z_\rho = 1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n} \times m_1! m_2! \dots m_n!$$

<sup>\*20</sup> 算盤を上詰りに傾けてしまえばよい.

<sup>\*21</sup> ここでの適当は正しくない方の意味. 上手い操作を考える必要はない.

と書ける. この前半部分を  $a_\rho$ 、後半を  $b_\rho$  とすると, これらをそれぞれ共役類の代表元で積をとったものは等しくなる. このことを母関数を用いて証明することで, 自然に  $n$  の全ての分割の全てのフック長の積を考えることができる. 命題 7.1 は [7] に, 定理 7.8 は [5] に演習問題として載っているため論文にしていなかった. しかし最近見返したところ, 命題 7.1 を  $p$ -類正則な分割へ制限した結果である定理 7.9 はまた別の物であると気付いた.

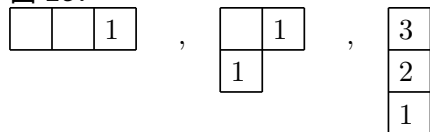
命題 7.1.

$$\prod_{\lambda=(1^{m_1}2^{m_2}\dots n^{m_n})\in\mathcal{P}(n)} 1^{m_1}2^{m_2}\dots n^{m_n} = \prod_{\lambda=(1^{m_1}2^{m_2}\dots n^{m_n})\in\mathcal{P}(n)} m_1!m_2!\dots m_n!$$

証明の前に式を少し眺めよう. 左辺は分割の表示として形式的に使っていた指数  $m$  を  $m$  乗の計算だと勘違いした上で分割全体での積を取った式だ. 一方右辺はこの指数の階乗だ. 前章ではヤング図形の一行目のフック長に注目したが, この指数の階乗は実はヤング図形の右端のフック長として現れる.

例.  $n = 3$  に対し,  $\mathcal{P}(3) = \{(3^1), (1^12^1), (1^3)\}$  だ. 指数が 1 の場合は省略するとしたがここではあえて表示している. これに対し各ヤング図形の右端のフック長を見れば,

図 19.



式としては,

$$(3^1) \times (1^12^1) \times (1^3) = 1!1!1!3! = 6.$$

であり, 正しい.

命題よりも強い結果だが,  $n$  の分割全体での右端の長さ  $k$  のフックの個数が成分  $k$  の個数と一致し, このことを証明する. この右端に現れるフックを特別なフックとして定義しておこう.

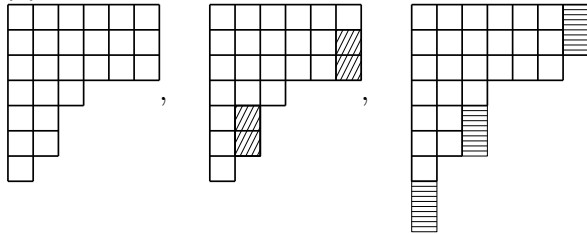
定義 7.2. 長さ  $k$ , 腕長 0 のフックを  $k$ -可除なフックと呼ぶ. また, ヤング図形の外側の角で, 長さ  $k$ , 腕長 0 のフックを加えてもヤング図形の形を保つものを  $k$ -可加なフック<sup>\*22</sup> と呼ぶ. 分割  $\lambda$  の  $k$ -可加なフックの個数を  $a_k(\lambda)$ ,  $k$ -可除なフックの個数を  $b_k(\lambda)$  で表す.

片方をフック, もう片方を角としてしまったため  $k$ -可加の定義が分かりにくいかもしれない. 大事なのはそれぞれの定義よりも個数  $a_k(\lambda), b_k(\lambda)$  の方なので, 次の例でどこを数えているのかを見て欲しい.

<sup>\*22</sup> 角としたがフックと呼ばせてもらう. イメージは例を参照.

例.  $\lambda = (12^236^3)$ ,  $k = 2$  について, そのヤング図形と 2-可除フック, 2-可加フック.

図 20.



よって  $b_2(\lambda) = 2$ ,  $a_2(\lambda) = 3$  である.  $a_k$  と  $b_k$  の個数には次の関係がある.

補題 7.3. 任意の分割  $\lambda$ , 任意の自然数  $k$  に対して,  $a_k(\lambda) = b_k(\lambda) + 1$  が成り立つ.

証明.  $k$ -可除なフックの右上には  $k$ -可加なフックが存在する. また, ヤング図形の底の外角は常に  $k$ -可加である.  $\square$

また可除なフックを抜いてできるヤング図形を考えてもらうと, 抜いた可除フックはできたヤング図形の可加フックになっていることが分かる. このことから,

補題 7.4. 任意の自然数  $n, k$  について次が成り立つ.

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}(n)} b_k(\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(n-k)} a_k(\lambda).$$

証明. (命題 7.1)

右端のフックがすなわち可除なフックなので,  $\lambda$  が  $\mathcal{P}(n)$  全体を動くときに,  $k$ -可除なフックの個数と大きさ  $k$  の成分の個数が等しいことを示せば十分だ. 成分  $k$  の個数の和の母関数は,

$$\frac{q^k}{1 - q^k} \frac{1}{(q; q)_\infty} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} m_k(\lambda) q^{|\lambda|} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(n)} m_k(\lambda) q^n.$$

であった. 一方先の補題から,  $\lambda$  が  $n$  の分割全体を動くときの  $b_k(\lambda)$  の和は,

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(n)} b_k(\lambda) &= \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(n-k)} a_k(\lambda) \\ &= \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(n-k)} (b_k(\lambda) + 1) \\ &= p(n-k) + \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(n-k)} b_k(\lambda) \\ &= \dots = p(n-k) + p(n-2k) + \dots \end{aligned}$$

これは  $\frac{q^k}{1 - q^k} \frac{1}{(q; q)_\infty} = \frac{q^k}{1 - q^k} \sum_{i=0}^{\infty} p(i) q^i$  の  $q^n$  の係数に等しい.  $\square$

この結果を一般化しよう\*23. 先ほどは腕長 0 のフックと限定したところを全てのフックで考える。ただし、定義の書きやすさと名前の都合でリムの方で考える。

定義 7.5. ヤング図形  $Y(\lambda)$  において、長さ  $k$  のリムを  $k$ -可除リムと呼ぶ。また  $Y(\lambda)$  の海岸線  $\bar{\partial}$  の位数  $k$  の連結な部分集合であって、 $Y(\lambda)$  に加えた形が再びヤング図形となるものを  $k$ -可加リムと呼ぶ。  $Y(\lambda)$  の  $k$ -可加リムの個数を  $A_k(\lambda)$ ,  $k$ -可除リムの個数を  $B_k(\lambda)$  で表す。

ヤング図形から  $k$ -可除リムを除いたものは大きさが  $k$  小さいヤング図形となり、除いた可除リムは出来上がりのヤング図形の可加リムである。このことから、先の補題 7.4 の類似はすぐに分かる。

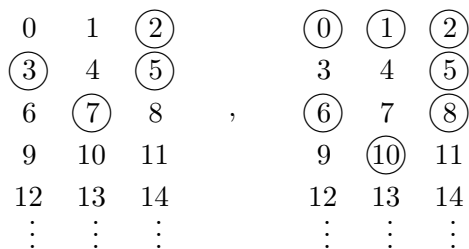
補題 7.6. 任意の自然数  $k, n$  に対し次が成り立つ。

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}(n)} B_k(\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(n-k)} A_k(\lambda).$$

問題は補題 7.3 の側だ。基になる補題を知っているため推測は容易だが、先ほどのような分かりやすい位置関係はなさそう。ここでリムを除く操作とフックを抜く操作が対応していたことを思い出そう。また長さ  $k$  のフックを抜く操作は  $k$  アバカス上で珠を一つ上に弾くことと対応していた。つまり、 $k$ -可除リムの個数は一つ上に弾くことができるすわなち一つ上の位置が空いている珠の数である。一方逆操作であるフックを挿入する操作は珠を一つ下に弾くことと対応し、 $k$ -可加リムの個数は一つ下の位置が空いている珠の個数である。これらを比べる際に一つ一つの珠や位置に注目するのではなく、各軸での空地すなわち珠の置かれていない連結した位置に注目するとよい。無限の広さを持つ底の空地を除いたすべての空地の下には珠があるわけで、この珠が上に弾くことのできる珠だ。一方、底の空地を含めたすべての空地の上には珠が存在する。ここで一番上の空地の上には珠があるとは限らないように思える。しかしそれは見えていないだけであって、 $\beta$ -集合を  $+k$  ずらすことで見えていなかった珠を見ることができる。

例.  $k = 3, X = \{7, 5, 3, 2\}$  について、

図 21.



一つ目の軸と二つ目の軸の一番上の空地には上に珠が無いように見えるが、 $X^{+3} = \{10, 8, 6, 5, 2, 1, 0\}$  を考えることで見えなかった珠が現れる。

従って  $k$ -可加リムと  $k$ -可除リムの個数は底の空地の分だけ異なる。  $k$  本の軸全てに底の空地は存在するため、補題 7.3. の類似が得られた。

\*23 証明の方針は同じだが、実は一般化ではない。



補題 7.7. 任意の分割  $\lambda$ , 自然数  $k$  に対し次が成り立つ.

$$A_k(\lambda) = B_k(\lambda) + k.$$

定理 7.8. 任意の自然数  $n$  に対し, 次が成り立つ.

$$\prod_{\lambda \in \mathcal{P}(n)} \prod_{(i,j) \in Y(\lambda)} h_{ij}(\lambda) = \prod_{\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n}) \in \mathcal{P}(n)} 1^{m_1} 2^{2m_2} \dots n^{nm_n}.$$

証明. 先ほどと同様にこれらの補題を用いれば,  $n$  の分割全体での  $k$ -可除リムすなわち長さ  $k$  のフックの個数を分割数を使って表示することができる.

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(n)} B_k(\lambda) &= \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(n-k)} A_k(\lambda) \\ &= \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(n-k)} (B_k(\lambda) + k) \\ &= kp(n-k) + \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(n-k)} B_k(\lambda) \\ &= \dots = kp(n-k) + kp(n-2k) + \dots \end{aligned}$$

従って, 先ほどの個数の  $k$  倍であり,  $n$  の分割全体での長さ  $k$  のフックの個数は  $n$  の分割全体での大きさ  $k$  の成分の個数の  $k$  倍に一致する.  $\square$

$p$ -類正則な分割からも類似の式を得ることができる. しかし  $p$ -正則の側だと, 例えば相異分割の表示に現れる指数は 1 か 0 だけであったため, 面白い式にはならない.

定理 7.9 (A.). 任意の自然数  $n, p$  に対し次が成り立つ.

$$\prod_{\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n}) \in \mathcal{P}_{(p)}(n)} \prod_{k=1}^n \prod_{i=1}^{m_k} (i)_{p'} = \prod_{\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n}) \in \mathcal{P}_{(p)}(n)} 1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n}.$$

これは命題の式の類似だ. 可除リムを除く操作で類正則性を保つことが難しいため, 定理の類似の式はまだない.

証明. 左辺の  $\prod_{i=1}^{m_k} (i)_{p'}$  が  $m_k!$  にあたるものだ.  $p$  が素数であれば  $(m_k!)_{p'}$  と表示できる.  $p$ -類正則な分割に大きさが  $p$  の倍数の成分は存在しないが, その指数の階乗には現れるためその点を調整している. ただし, 調整といっても  $p$  の倍数を飛ばして積を取っているわけではなく,  $p'$ -部分を考えている.  $p$  の倍数でない自然数  $k$  について,  $p$ -類正則な分割全体での大きさ  $k$  の成分の個数の母関数は,

$$\frac{q^k}{1 - q^k} \frac{(q^p; q^p)_\infty}{(q; q)_\infty} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_{(p)}} m_k q^{|\lambda|}$$

で与えられた. 命題の証明と同様に式より強い結果である, 階乗に現れる数字それぞれの  $p'$ -部分と成分との対応を示す.  $p$  の倍数でない自然数  $k$  を固定しよう. 一般の分割のときと同様ヤング図形

右端の可除フックと  $m_i!$  が対応し、 $m_i!$  の中に  $k$  が現れるのは  $m_i \geq k$  の場合である。そのような  $n$  の  $p$ -類正則な分割は  $n - ik$  の  $p$ -類正則な分割に成分  $i$  を  $k$  個加えることで全て得られるので、

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}_{(p)}(n)} b_k(\lambda) = \sum_{i, p \nmid i} p_{(p)}(n - ik).$$

ここで  $k$  は  $p$  の倍数でないとしたことは議論には関係ないため、一般に  $kp^j$  について、

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}_{(p)}(n)} b_{kp^j}(\lambda) = \sum_{i, p \nmid i} p_{(p)}(n - ikp^j).$$

が成り立つ。  $j$  についての総和を考えれば、

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_{(p)}(n)} b_{kp^j}(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i, p \nmid i} p_{(p)}(n - ip^j k).$$

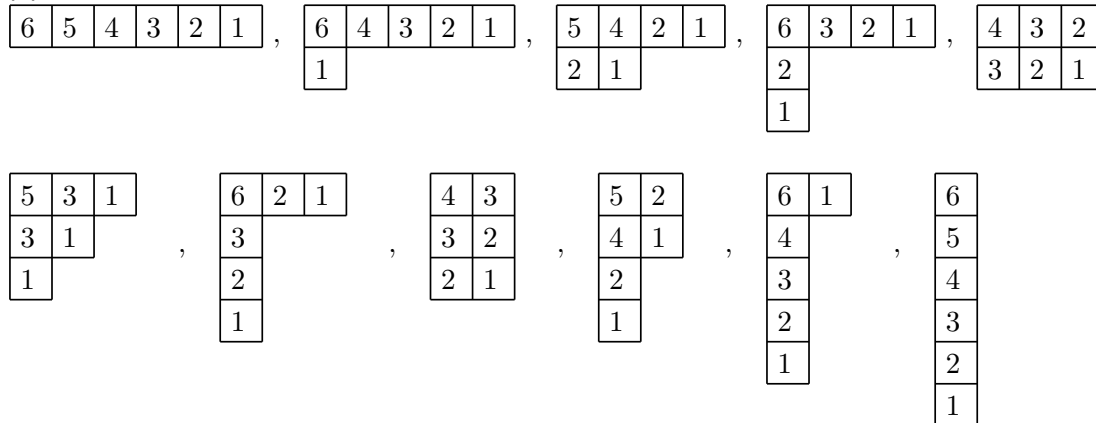
であり、左辺は大きさ  $kp^j$  の可除フック、すなわち  $p'$ -部分が  $k$  となる階乗に現れる数全体を表す。一方右辺  $ip^j$  は自然数全体を動くため、これは母関数の  $q^n$  の係数に等しい。  $\square$

$p$ -正則、 $p$ -類正則な分割での結果は十分大きい  $p$  を考えることで一般の分割での結果を系とできる。定理 7.9 であれば命題 7.1 が系となる。\*24

章の最初にも述べたが、これらの式は分割の表示を積とべき乗の計算だと勘違いしているように見える点が気に入っている。ただ実際にヤング図形に数字を入れた例も、証明で話したようにより強い結果であり捨てがたいため、それを見て次の章に進む。

例.  $n = 6$  の全ての分割のヤング図形にフック長を入れた盤を考える。

図 22.



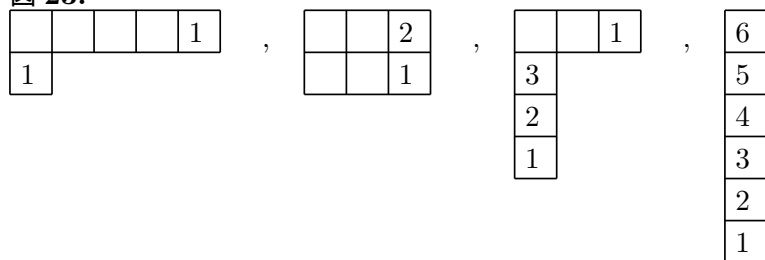
各数字が何個現れるかを数えれば、1 が 19 個、2 が 16 個、3 が 12 個、4 が 8 個、5 が 5 個、6 が 6 個となっている。定理 7.8 のいっていることは、6 の分割のうち例えば 3 を成分としてもつものは  $\{(3^2), (123), (1^33)\}$  だけであり、成分 3 の総数は 4 だ。この  $3 \times 4 = 12$  がフック長で現れる 3 の

\*24 両方が混ざった式だと系は意味のない式になることが多い。例えば定理 2.6 の式であれば  $p$  を大きくすることで両辺とも分割数となる。

個数と一致している。ちなみに、一般に長さ  $k$  のフックは  $k$  種類の形があるがそれぞれの形が同数現れる。

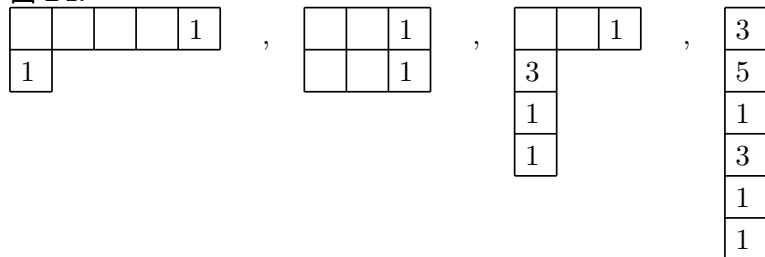
例.  $n = 6, p = 2$ . 6 の 2-類正則な分割すなわち奇分割は  $\mathcal{OP}(6) = \{(15), (3^2), (1^33)(1^6)\}$  だ. これらのヤング図形の右端にフック長を入れた盤を考える.

図 23.



ここで各数字の  $2'$ -部分を取れば,

図 24.



このとき現れる 1, 3, 5 の個数が  $\mathcal{OP}(6)$  に現れた各成分の個数と等しい。

## 8 グレイシャーウエイト

本章は岡山大学山田裕史氏, 鈴木武史氏との共同研究である [2] の内容だ. そちらのタイトルにあるように次数付きカルタン行列と呼ばれるものに関連のある結果だが, 本論文では組合せ論の結果を述べるに止める. 自然数  $n$  の  $p$ -正則な分割と  $p$ -類正則な分割の個数の一致をグレイシャー対応によって証明した. このグレイシャー対応を基にウエイトを定義し, そこでの組合せ論の結果を述べる.

グレイシャー対応の例は既に出したが, 操作の回数がある程度多い方がウエイトの例を見るのに都合が良いので, ここで改めて例を挙げる.  $p = 2$  とし,  $\lambda = (1^9 3 5^3) \in \mathcal{P}_{(2)}(27)$  とする

$$\begin{aligned} \lambda = (1^9 3 5^3) &\rightarrow (1^7 2 3 5^3) \rightarrow (1^5 2^2 3 5^3) \rightarrow (1^3 2^3 3 5^3) \rightarrow \\ &(1 2^4 3 5^3) \rightarrow (1 2^2 3 4 5^3) \rightarrow (1 3 4^2 5^3) \rightarrow (1 3 5^3 8) \rightarrow (1 3 5 8 10) = \tilde{\lambda}. \end{aligned}$$

出来上がりの  $\tilde{\lambda}$  は 2-正則, すなわち相異分割である.

次に  $\lambda \in \mathcal{P}_{(p)}(n)$  にウエイトを付ける. グレイシャー対応の  $i$  を  $p$  個合成する操作

$$(i^{m_i}) \longrightarrow (i^{m_i-p} p i)$$

に対して文字  $Q_i$  を対応させる\*25.

定義 8.1.  $p$ -類正則な分割  $\lambda$  に対して「グレイシャーウエイト」 $w_G(\lambda)$  を、グレイシャー対応の各ステップに対応する  $Q_i$  達の積と定義する.

先程の例では  $w_G(\lambda) = Q_1^4 Q_2^2 Q_4 Q_5$  となる. ここでグレイシャーウエイトと  $\lambda$  の表示の関係を考えよう.  $Q_4$  が  $w_G(\lambda)$  に現れるためには  $\lambda$  における成分  $(4)_{p'} = 1$  の個数が  $p \times (4)_p = 8$  以上である必要があることが分かり, 成分 1 の個数が  $8, 16, 24, \dots$  を超えるごとに  $w_G$  の表示の  $Q_4$  の指数も  $1, 2, 3, \dots$  と増える. ここまで例の話で  $p = 2$  だが, 一般にある  $Q_i^k$  が  $w_G(\lambda)$  に現れるためには,  $\lambda$  の成分  $(i)_{p'}$  の個数が  $kp \times (i)_p$  以上である必要がある. 従って,  $w_G$  の表示は次で与えられる.

命題 8.2.  $p$ -類正則な分割  $\lambda$  に対し,

$$w_G(\lambda) = \prod_{a \geq 1} \prod_{b \geq 1} Q_{ap^{b-1}}^{\lfloor \frac{m_a(\lambda)}{p^b} \rfloor}.$$

が成り立つ. ここで  $\lfloor \cdot \rfloor$  はガウス記号.

もう一つのウエイトを, こちらはグレイシャー対応抜きで  $\lambda$  の表示から直接定義する. 正整数  $k$  に対して,  $(k)_{p'} = a, (k)_p = p^j$  であるとき,

$$(k)_{[p]} := Q_a Q_{ap} \cdots Q_{ap^{j-1}}$$

とおく.  $(k)_p = 1$  であれば  $(k)_{[p]} = 1$  だ. これを用いて,

定義 8.3.  $p$ -類正則な分割  $\lambda$  に対して「宇野ウエイト」 $w_U(\lambda)$  を

$$w_U(\lambda) := \prod_{i \geq 1} \prod_{k=1}^{m_i} (k)_{[p]}$$

により定義する.

先の例では  $w_U(\lambda) = Q_1^4 Q_2^2 Q_3 Q_4$  となる.

これら 2 つのウエイトの積が一致する, というものが本章の主定理だ.

定理 8.4 (A., Suzuki, Yamada). 自然数  $p \in \mathbb{Z}_{\geq 2}, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  について

$$\prod_{\lambda \in \mathcal{P}_{(p)}(n)} w_G(\lambda) = \prod_{\lambda \in \mathcal{P}_{(p)}(n)} w_U(\lambda).$$

例.  $p = 2, n = 8$  としよう.  $\mathcal{OP}(8) = \{(17), (35), (1^3 5), (1^2 3^2), (1^5 3), (1^8)\}$  の各分割に対して 2 つのウエイトを計算すれば,

\*25 実際にはここで  $Q_i$  には  $p$  の  $q$ -整数が入るのだが, 組合せ論を見るだけなら必要ない.

表 1.

$\lambda$	(17)	(35)	(1 <sup>3</sup> 5)	(1 <sup>2</sup> 3 <sup>2</sup> )	(1 <sup>5</sup> 3)	(1 <sup>8</sup> )
$w_G(\lambda)$	1	1	$Q_1$	$Q_1 Q_3$	$Q_1^2 Q_2$	$Q_1^4 Q_2^2 Q_4$
$w_U(\lambda)$	1	1	$Q_1$	$Q_1^2$	$Q_1^2 Q_2$	$Q_1^3 Q_2^2 Q_3 Q_4$

各  $\lambda$  で  $w_G(\lambda), w_U(\lambda)$  の  $Q$  についての次数は一致しており,  $w_G, w_U$  それぞれの全体での積を考えると,

$$\prod_{\lambda \in \mathcal{P}_{(2)}(8)} w_G(\lambda) = Q_1^8 Q_2^3 Q_3 Q_4 = \prod_{\lambda \in \mathcal{P}_{(2)}(8)} w_U(\lambda).$$

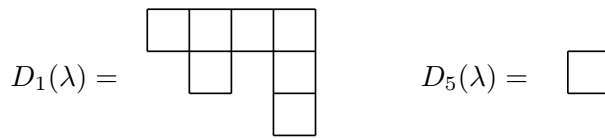
であることが見て取れる. この結果は [9] での結果の精密化でもある.

証明.  $p$ -類正則な  $n$  の分割  $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n})$  と  $i \not\equiv 0 \pmod{p}$  に対して, 図形

$$D_i(\lambda) = \left\{ (j, k) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{m_i}{p} \right\rfloor, p^j | k \right\}.$$

を用意する. 例えば  $p = 2, \lambda = (1^9 3^5)$  であれば,

図 25.



他の  $i$  に対しては  $D_i(\lambda) = \emptyset$  となる. これらのマス目の集合を

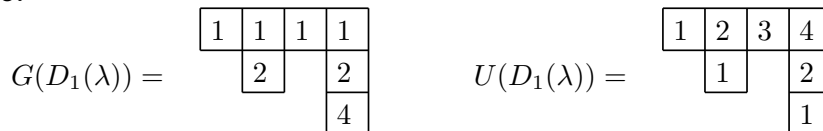
$$\mathfrak{D}(n) = \mathfrak{D}(n, p) = \{ (\lambda; i, j, k) \mid \lambda \in \mathcal{P}_{(p)}(n), i \not\equiv 0 \pmod{p}, (j, k) \in D_i(\lambda) \}.$$

とおき, その上の 2 つの盤,  $U, G$  を考える.

$$G, U : \mathfrak{D}(n) \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

$\mathfrak{D}(n)$  のマス目  $c = (\lambda; i, j, k)$  に対して,  $G(c) = ip^j, U(c) = k/p^j$  と定義する. 上の例の  $\lambda$  について,  $D_1(\lambda)$  上の盤  $G, U$  はそれぞれ,

図 26.



となる.  $G, U$  の定義からこれらは  $w_G(\lambda), w_U(\lambda)$  に対応するものである. 従って定理の式を次のように書き直すことができる.

$$\prod_{c \in \mathfrak{D}(n)} Q_{G(c)} = \prod_{c \in \mathfrak{D}(n)} Q_{U(c)}.$$

そこで

$$\theta : \mathfrak{D}(n) \longrightarrow \mathfrak{D}(n)$$

であって、 $U \circ \theta = G$  を満たす対合を構成すればよい。  $c = (\lambda; i, j, k)$  を  $\mathfrak{D}(n)$  の元とする。 仮定より、  $pk \leq m_i, p^j \mid k$  であるので、  $\lambda = \mu + (i^{pk})$  を満たす分割  $\mu$  が決まる。 ただし  $+$  は分割を成分の集合として見ての和である。  $k$  を  $k = i'p^{j+j'}$  と書き直しておこう。 ここで  $i' = (k)_{p'}$ ,  $j+j' = (k)_p$  だ。 これで、  $c$  の表示を

$$c = (\mu + i'^{ip^{j+j'}}; i, j, i'p^{j+j'})$$

と書き直したことになる。 この  $c$  に対して  $\theta$  を

$$\theta(c) = (\mu + i'^{ip^{j+j'}}; i', j', ip^{j+j'})$$

つまりは  $i$  と  $i'$ ,  $j$  と  $j'$  の入れ替えとして定義する。 このとき、  $\theta$  は  $\theta^2 = id$  を満たし、  $U(\theta(c)) = ip^j = G(c)$  となる。 よって定理が証明できた。  $\square$

さて、実はこの定理を組合せ論として一般化することが可能だ。 しかしその際にそれぞれのウェイトを分割の組上のウェイトへと一般化するため、先に進むことはせずこの周りで遊ぶことにしよう。 定理は  $w_G, w_U$  それぞれの積が一致するというものだったが、各  $Q_\ell$  の指数に注目することで同値な次の式が得られる。

系 8.5.  $n, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,  $(\ell)_{p'} = a$ ,  $(\ell)_p = p^{b-1}$  とする。 このとき、

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}_{(p)}(n)} \left\lfloor \frac{m_a(\lambda)}{p^b} \right\rfloor = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_{(p)}(n)} \sum_{i \geq 1} o_p \left( \left\lfloor \frac{m_i(\lambda)}{\ell} \right\rfloor \right).$$

ここで  $o_p(k)$  は  $k$  を  $p$ -進表示したときの桁数を表す。

証明。 毎度のことだが、指数の話なので総積が総和に化ける。 左辺は  $w_G$  の表示にあった指数そのままだ。 右辺は  $o_p$  が初めて出てきたこともあり少し分かりづらいかもしれない。  $w_U$  での  $Q_\ell$  の指数に注目しているわけだが、表示式よりも、定理の証明中に出てきた  $U$  の盤で考える方が分かりやすい。 簡単のため  $\ell = 1$  で話をすると、 $1$  は  $U$  盤各行の一番左のマス目に入り、他のマス目には現れない。 そして各  $D_i$  の行数は  $m_i$  の  $p$ -進表示の桁数である。  $\square$

こちらは先の定理の直接の系ではないが、似たような式がもう一つ。

命題 8.6.  $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,  $p \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$  とする。 このとき、

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}(n)} m_k(\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(n)} \sum_{i, p \nmid i} o_p \left( \left\lfloor \frac{m_i(\lambda)}{k} \right\rfloor \right)$$

こちらの式にいたっては左辺に  $p$  が出てこない。 系 8.5 は定理 8.4 と同値なのでこちらの例を見よう。  $n = 5, k = 1$  とし、 $p = 2, 3$  の場合に表を描けば、

表 2.

$\lambda$	(5)	(14)	(23)	(1 <sup>2</sup> 3)	(12 <sup>2</sup> )	(1 <sup>3</sup> 2)	(1 <sup>5</sup> )	計
$m_1$	0	1	0	2	1	3	5	12
$\sum_{i, 2 \nmid i} o_2(m_i)$	1	1 + -	- + 1	2 + 1	1 + -	2 + -	3	12
$\sum_{i, 3 \nmid i} o_3(m_i)$	1	1 + 1	1 + -	1 + -	1 + 1	2 + 1	2	12

表の - の部分は  $i$  が  $p$  の倍数になる「足さない」部分だ.  $p$  は素数である必要はないため,  $p = 10$  の 10-進法の桁数で考えてもよい.

証明. 左辺は見たことのある形だ. 母関数を思い出せば,

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} m_k(\lambda) q^{|\lambda|} = \frac{q^k}{1 - q^k} \frac{1}{(q; q)_\infty}.$$

であった. 右辺も母関数を考える. まずはそのまま書けば,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(n)} \sum_{i, p \nmid i} o_p \left( \left\lfloor \frac{m_i(\lambda)}{k} \right\rfloor \right) q^n = \sum_{i, p \nmid i} \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} o_p \left( \left\lfloor \frac{m_i(\lambda)}{k} \right\rfloor \right) q^{|\lambda|}.$$

よって  $i$  を止めた所で  $q^{|\lambda|}$  の係数に  $o_p \left( \left\lfloor \frac{m_i(\lambda)}{k} \right\rfloor \right)$  を出す方法を考えるが,  $\left( \left\lfloor \frac{m_i(\lambda)}{k} \right\rfloor \right)$  の  $p$ -進表示の桁数が増えるたびに係数が 1 増えればよいので,  $\frac{1}{1 - q^i}$  を

$$q^{ki} + q^{(k+1)i} + \dots + q^{(p^k-1)i} + 2q^{pki} + \dots + 2q^{(p^2k-1)i} + 3q^{p^2ki} + \dots$$

で置き換えればよい. ここで,

$$\begin{aligned} & q^{ki} + q^{(k+1)i} + \dots + q^{(p^k-1)i} + 2q^{pki} + \dots + 2q^{(p^2k-1)i} + 3q^{p^2ki} + \dots \\ &= q^{ki} \frac{1}{1 - q^i} + q^{pki} \frac{1}{1 - q^i} + q^{p^2ki} \frac{1}{1 - q^i} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - q^i} \sum_{\ell \geq 0} q^{p^\ell ki}. \end{aligned}$$

従って置き換える必要はなく  $\sum_{\ell \geq 0} q^{p^\ell ki}$  を掛ける操作をすればよい.

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} o_p \left( \left\lfloor \frac{m_i(\lambda)}{k} \right\rfloor \right) q^{|\lambda|} = \frac{1}{(q; q)_\infty} \sum_{\ell \geq 0} q^{p^\ell ki}.$$

であり,

$$\sum_{i, p \nmid i} \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} o_p \left( \left\lfloor \frac{m_i(\lambda)}{k} \right\rfloor \right) q^{|\lambda|} = \frac{1}{(q; q)_\infty} \sum_{i, p \nmid i} \sum_{\ell \geq 0} q^{p^\ell ki}.$$

ここで  $p^\ell ki$  は  $k$  の倍数すべてを動かため,

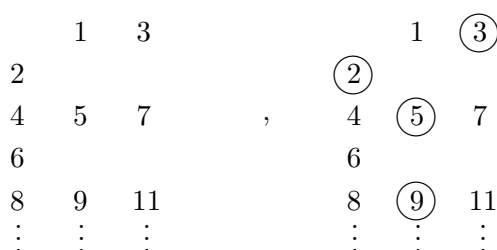
$$\sum_{i, p \nmid i} \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} o_p \left( \left\lfloor \frac{m_i(\lambda)}{k} \right\rfloor \right) q^{|\lambda|} = \frac{1}{(q; q)_\infty} \frac{q^k}{1 - q^k}.$$

となり母関数が一致する. 従ってが命題が示せた. □

さて、主定理の一般化は行わないといったが、 $p = 2$  の場合の精密化は行うことにしよう。奇分割を分類したもう少し狭い範囲毎に積が一致するわけだが、その分類にコアを使う。ただしここでのコアは6章で出てきたものとは少し違う  $H$ -コアと呼ばれるものだ。 $H$ -コアは相異分割に対して定義されるものなので、グレイシャー対応で移した先で考えよう。相異分割は同じ大きさの成分を持たないためそのままアバカス上の対応する位置に珠を置けばよいのだが、アバカスも  $H$ -アバカスと呼ばれるものを使い、6章とは少し様子が違ってくる。 $p = 2$  のため軸は2本かと思いきや、奇数軸を図のようにさらに分割する。<sup>\*26</sup>

例. 空の  $H$ -アバカスと  $\lambda = (9532)$  の  $H$ -アバカス.

図 27.



$p$ -アバカスではコアを出すための操作は珠を上へ弾くことだったが、 $H$ -アバカスでは新たに珠を取り去る操作が加わる。許される操作は次の通りだ。

- (1) 珠を一つ上に弾く
- (2) 偶数軸の 2 の位置にある珠を取り去る。
- (3) 奇数軸の 1, 3 の位置の珠を同時に取り去る。

これらの操作をできる操作が無くなるまで続けるため、最終的な形は奇数軸のどちらか一方のみに珠が残る（上に詰めた）形、もしくはアバカス上に珠が存在しない形となる。残った珠の位置から相異分割を復元したものが  $\lambda$  の  $H$ -コア  $\lambda^H$  だ。例での  $\lambda = (9532)$  であれば、1 の位置だけに珠が残り  $\lambda^H = (1)$  となる。<sup>\*27</sup> 従って  $H$ -コアな分割全体の集合を考えれば、

$$HC = \{(), (4m + 1 \ 4m - 3 \ \dots \ 5 \ 1), (4m + 3 \ 4m - 1 \ \dots \ 7 \ 3) \mid m \geq 0\}.$$

となる。ここで各分割の大きさに注目しよう。小さい方から見ると、

$$|()| = 0, |(1)| = 1, |(3)| = 3, |(51)| = 6, |(73)| = 10, |(951)| = 15, \dots$$

となり、三角数  $\frac{k(k+1)}{2}$  が現れることが分かる。三角数には階段型のヤング図形が自然に対応するが階段型のヤング図形は 2-コアな分割のヤング図形だった。すなわち、 $H$ -コアな分割と 2-コアな分割の間には大きさを変えない全単射が唯一つ存在する。

<sup>\*26</sup> 奇数軸 2 本が一つのマヤ図形と対応する。

<sup>\*27</sup> アバカス上の操作のみでフックの話は消えてしまったように見えるが、実際には相異分割上にパーフックというものを定義し、その 4-コアを考えている。



定理 8.7 (A., Suzuki, Yamada). 任意の自然数  $n$  と  $H$ -コア  $\mu$  に対し次が成り立つ.

$$\prod_{\lambda \in \mathcal{P}_{(p)}(n), \tilde{\lambda}^H = \mu} w_G(\lambda) = \prod_{\lambda \in \mathcal{P}_{(p)}(n), \tilde{\lambda}^H = \mu} w_U(\lambda).$$

証明. 主定理の全単射証明に用いた写像  $\theta$  で  $H$ -コアが変わらないことを示す.  $\theta$  は  $\mathfrak{D}(n)$  上の写像であったのでここで変わらないといっているのは,

$$c = (\mu + i^{i'p^{j+j'}}; i, j, i'p^{j+j'}) \in \mathfrak{D}(n), \theta(c) = (\mu + i^{i'p^{j+j'}}; i', j', ip^{j+j'})$$

について,  $\lambda = \mu + i^{i'p^{j+j'}}$  と  $\theta(\lambda) = \mu + i^{i'p^{j+j'}}$  をグレイシャー対応で移した先の  $H$ -コアだ.  $\theta$  を  $H$ -コアが同じ盤上の写像に制限できることになり, 定理が精密化される. 今  $p = 2$  であり,  $\mathfrak{D}(n)$  の定義から  $j + j' \geq 1$  であった. 従って  $\lambda$  の  $i^{i'2^{j+j'}}$  は成分  $i$  偶数個であり, グレイシャー対応で移したときに偶数に移る部分だ. そして偶数軸のどこに珠があろうと  $H$ -コアには関係なかったため,  $\tilde{\lambda}^H = \tilde{\mu}^H$  となる. 同様に  $\theta(\tilde{\lambda})^H = \tilde{\mu}^H$  も成り立つので,  $\tilde{\lambda}^H = \theta(\tilde{\lambda})^H$  が示せた.  $\square$

## 9 約数関数の $q$ -恒等式

本章は [1] で報告した内容のまとめとなっている. 前章は組合せ論の内容に限定をして話をしたが, こちらはもともと組合せ論だけの内容だ. 内村型  $q$ -恒等式と呼ばれる  $q$ -級数の式 [8] があり, それに関して現在も新たな結果が研究, 報告されている. 報告される結果の証明は式変形, 超幾何級数の特殊化等が主であるが, ここでは母関数の式だと思い組合せ論として証明を行う. 基となるものは次の式だ.

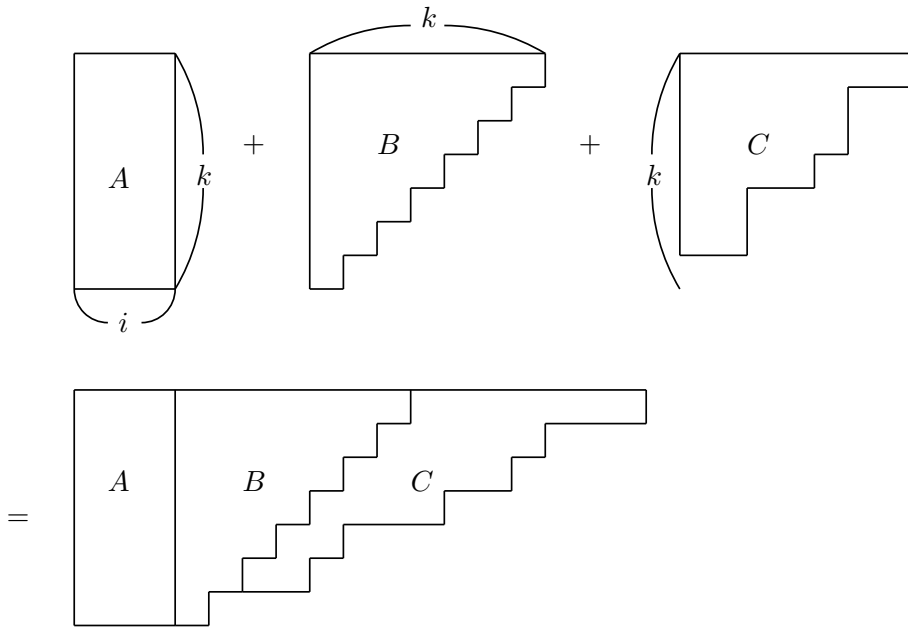
定理 9.1 (Uchimura).

$$\sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{q^{\frac{k(k+1)}{2}}}{(q; q)_k (1 - q^k)} = \sum_{k \geq 1} \frac{q^k}{1 - q^k}.$$

この式をヤング図形の話に直して組合せ論的に証明する. 右辺は 5 章で定義した約数関数  $\sigma_0(n)$  の母関数だ. 左辺は次の図で理解する. まず  $q^{\frac{k(k+1)}{2}}$  は図での  $B$  のような階段だと思う.  $\frac{1}{(q; q)_k}$  はこれまで成分が  $k$  以下の分割の母関数だと思ってきたが, ここではその共役を考え,  $C$  の長さ  $k$  以下の分割の母関数だということにする. 何度か見た階段を抜く操作の逆操作で積は相異分割になる. 残った  $\frac{1}{1 - q^k}$  は図の  $A$ . 縦の長さ  $k$  の長方形 (横の長さは 0 も許す) の母関数だ. 母関数の積をとることがどういうことかは 4, 5 章で触れなかったが,  $q$  の指数とヤング図形の大きさを対応させており, 積をとることで指数の足し算が起こる\*28. この 3 つを図のようにくっつけて符号  $(-1)^{k-1}$  をつけたものを式の左辺を展開した各項と思うこととする.

\*28 分割の足し算は何種類かあるのだがここでは成分の大きさの和をとっている. 分割を多重集合と見ての和集合をとる前章で出てきたものもよく使われる.

図 28.



さて、合体してできた分割  $\lambda$  を固定して、それを作る A,B,C の組を数えよう. 真ん中の階段を動かせば左右の分割は決まる. そして階段を動かせる範囲は  $\lambda_k, k = \ell(\lambda)$  であることが分かる. 階段を動かしても  $\ell(\lambda)$  は変わらないので、符号の同じ  $\lambda$  が  $\lambda_{\ell(\lambda)}$  コでくる. よって式を書き直せば,

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{SP}} (-1)^{\ell(\lambda)-1} \lambda_{\ell(\lambda)} q^{|\lambda|} = \sum_{n \geq 1} \sigma_0(n) q^n.$$

となることが分かる. 5 章でも見たが、約数の個数を分割を使って数えようとすれば一番自然なのは長方形を数えることだ. つまり、成分が一種類の分割と同じ成分を持たない分割とが等号で結ばれていることになる.

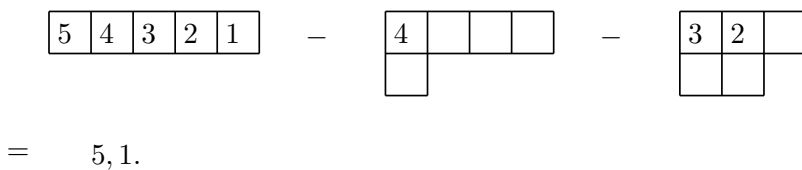
定理 9.2 (A.). 任意の自然数  $n, k$  に対して

$$\begin{aligned} & \#\{\lambda \in \mathcal{SP}(n) \mid \lambda_1 \geq k > \lambda_1 - \lambda_\ell, \ell = \ell(\lambda) : \text{奇数}\} \\ & - \#\{\lambda \in \mathcal{SP}(n) \mid \lambda_1 \geq k > \lambda_1 - \lambda_\ell, \ell = \ell(\lambda) : \text{偶数}\} \\ & = \begin{cases} 1 & (k \mid n) \\ 0 & (k \nmid n) \end{cases} \end{aligned}$$

$a_{1,i}(\lambda) + 1, (i \leq \lambda_\ell)$  の値が  $k$  となる  $\lambda \in \mathcal{SP}(n)$  を符号付きで数えていると思うことができる.

例.  $n = 5$  であれば,

図 29.



= 5, 1.

大きさ 5 の相異分割のヤング図形を用意し、「底」のある 1 行目のマス目に腕長 +1 の値を入れたもの。数字を記号だと思い、分割の長さで符号を付けての和をとれば 5 の約数のみが残る。この腕長 +1 は今後も出てくるため、 $a'_{ij}(\lambda) := a_{ij}(\lambda) + 1$  を  $\lambda$  の  $(i, j)$ -座高と呼ぶことにする。

証明. まず一行目の  $\lambda_{\ell(\lambda)}$  列目までに腕長が  $k$  となるマス目を持つ相異分割の集合を考える。

$$\mathfrak{D}(n, k) = \{\lambda \in \mathcal{SP}(n) \mid \lambda_1 - \lambda_l < k \leq \lambda_1\}.$$

自身の論文と記号を合わせた結果ややこしくなってしまうただけであり、前章の  $\mathfrak{D}(n)$  とは関係ないので注意してほしい。ただこの後することは少し似ていて、 $\mathfrak{D}(n, k)$  上の写像を考える。前章との違いは対合ではなく対合モドキだということだ。まずは  $\mathfrak{D}(n, k)$  の元を次のように分類\*29 する。

$$A = \{\lambda \in \mathfrak{D}(n, k) \mid \forall i \leq \ell(\lambda), k \nmid \lambda_i\}, B = \{\lambda \in \mathfrak{D}(n, k) \mid \exists i \leq \ell(\lambda), k \mid \lambda_i\}$$

$A, B$  の間の写像で分割の長さを 1 だけ変えるものを構成しよう。定義域と値域が異なるためそもそも対合にはなりようがないが、どうモドキなのかの説明は証明後にする。

$$\begin{array}{ccc} \alpha_k : & A & \longrightarrow & B \\ & \cup & & \cup \\ & \lambda & \longmapsto & \alpha_k(\lambda) \end{array}$$

ここで  $\alpha_k(\lambda)$  を作る操作は次の通り。

- (ステップ 1)  $\lambda$  を集合と見て、元  $\lambda_{\ell+1} = 0$  を加えた  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell, \lambda_{\ell+1}\}$  の集合を作る。
- (ステップ 2) できた集合の最大元を  $k$  小さくし、最小元を  $k$  大きくする。
- (ステップ 3) ステップ 2 を最大元と最小元の差が  $k$  未満となるまで繰り返す。
- (ステップ 4) 出来上がった集合の元を成分とする分割を  $\alpha_k(\lambda)$  とする。

ステップ 2 での最小限は常に  $k$  の倍数であり、逆の操作は  $k$  の倍数の成分を  $k$  ずつ小さくしていき、小さくした分を他の成分に割り振ることで得られる。従って  $\alpha_k$  は単射。また定義から  $\ell(\alpha_k(\lambda)) = \ell(\lambda) + 1$  であり、長さの偶奇が異なる分割を対応させることができた。ただし、 $n$  が  $k$  の倍数の場合の  $\mu = (n) \in B$  には  $\alpha_k$  で対応する  $A$  の分割が存在しない。逆操作を行おうにも小さくした分を割り振る他の成分がないのだ。□

写像の例を見ておこう。  $n = 13, k = 4$  について、

$$\mathfrak{D}(13, 4) = \{(13), (8\ 5)(7\ 6), (6\ 4\ 3)\}.$$

でありこれを分類すれば、

$$A = \{(13), (7\ 6)\}, B = \{(8\ 5), (6\ 4\ 3)\}.$$

\*29 定理の式での分類とは違うところがミソだ。

となる.  $A$  の分割を  $\alpha_k$  で移せば,

$$\begin{aligned} (13) &\rightarrow \{13, 0\} \rightarrow \{9, 4\} \rightarrow \{5, 8\} \rightarrow (8\ 5) = \alpha_4(13), \\ (7\ 6) &\rightarrow \{7, 6, 0\} \rightarrow \{3, 6, 4\} \rightarrow (6\ 4\ 3) = \alpha_4(7\ 6). \end{aligned}$$

従って  $\alpha_k$  は  $A$  と  $B$  の間の全単射だ. 証明とするために少しややこしい操作で考えているが, 証明の発想自体は単純であり, そちらが対合モドキの意味でもある. 同じ  $\mathfrak{D}(13, 4)$  で, 分割の成分を  $k$  を法として見れば,

$$\mathfrak{D}(13, 4) \equiv \{(1), (0\ 1), (3\ 2), (2\ 0\ 3)\}(\text{mod } 4).$$

であり, 0 の付け外しにより  $k$  を法として 0 となる成分を含む分割とそうでない分割とに自然な対応が付く. この 0 の付け外しを写像と考えて対合モドキと呼んでいたのだ. モドキの意味がまだだが, それは  $k$  が  $n$  を割り切る場合. 例えば  $n = 12, k = 4$  であれば,

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(12, 4) &= \{(12), (7\ 5), (5\ 4\ 3)\}. \\ \mathfrak{D}(12, 4) &\equiv \{(0), (3\ 1), (1\ 0\ 3)\}(\text{mod } 4). \end{aligned}$$

となり,  $k$  の倍数 1 つだけからなる分割については 0 を外すことができないため, 写像にならない.

証明. (定理 9.1)

定理 9.2 の式を  $k$  について和をれば,

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} (\text{左辺}) &= \sum_{k \geq 1} \#\{\lambda \in \mathcal{SP}(n) \mid \lambda_1 \geq k > \lambda_1 - \lambda_\ell, \ell = \ell(\lambda) : \text{奇数}\} \\ &\quad - \sum_{k \geq 1} \#\{\lambda \in \mathcal{SP}(n) \mid \lambda_1 \geq k > \lambda_1 - \lambda_\ell, \ell = \ell(\lambda) : \text{偶数}\} \\ &= \sum_{\lambda \in \mathcal{SP}(n)} (-1)^{\ell(\lambda)-1} \lambda_{\ell(\lambda)}, \\ \sum_{k \geq 1} (\text{右辺}) &= \sigma_0(n). \end{aligned}$$

となり, これは定理 9.1 の式での  $q^n$  の係数である. □

定理 9.2 の  $k$  についての総和が定理 9.1 になったが,  $m$  以下の  $k$  についての和をとれば定理 9.1 の精密化 [10] が得られる.

定理 9.3 (Van Hamme). 任意の自然数  $m$  に対し次の式が成り立つ.

$$\sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{\frac{k(k+1)}{2}}}{1-q^k} = \sum_{k=1}^m \frac{q^k}{1-q^k}.$$

証明. 実際の計算は先ほどと同様なので省略するが, 定理 9.2 の有限和を計算した後の「比べもの」であるこの式の組合せ論への読替えはしておく. 定理 9.1 の読替えに使った図 28 とほとんど同じ図で説明できるため, そちらを見て欲しい. 式の違いは長さ  $k$  以下の分割の母関数とした  $\frac{1}{(q; q)_k}$  が

$q$ -二項係数  $\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}$  に変わっている点だ。これは長さ  $k$  以下に加えて成分の大きさ  $m - k$  以下の制限がかかった分割の母関数であった。従って図では  $C$  の一行目に  $m - k$  以下の情報を加えればよい。 $C$  の制限により、各相異分割  $\lambda$  を固定した時の重複度であった階段の動かせる範囲が変わる。新しい重複度は  $\min\{\lambda_{\ell(\lambda)}, m - (\lambda_1 - \lambda_{\ell(\lambda)})\}$  だ\*<sup>30</sup>。従って定理 9.2 を意識して式を読み替えれば、

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{SP}} \sum_{i \in \mathbb{N}, \lambda_1 - m < i \leq \lambda_{\ell(\lambda)}} (-1)^{\ell(\lambda) - 1} q^{|\lambda|} = \sum_{n \geq 1} \sum_{d \leq m, d|n} q^n.$$

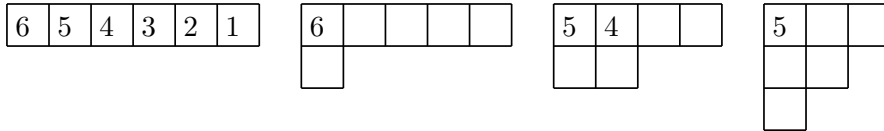
□

系 9.4.  $n = 2(2m + 1)$  について、

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{SP}(n)} \#\{h_{1i}(\lambda) \mid i \leq \lambda_{\ell(\lambda)}, \text{ 奇数}\} = \sum_{\lambda \in \mathcal{SP}(n)} \#\{h_{1i}(\lambda) \mid i \leq \lambda_{\ell(\lambda)}, \text{ 偶数}\}.$$

例.  $n = 6$ .

図 30.



定理 3.2 の例と同じ場所にフック長をいれたもの。偶数と奇数の個数が等しい。

証明. 定理では座高が一致するマス目を対応させていたが、座高にさらに脚長を足せばフック長となる。底のあるマス目を考えていたため脚長は分割の長さ  $-1$  であり、結果フック長の偶奇が異なるマス目を対応させたことになる。対応のない約数の部分について、奇数を 2 倍した数の約数は偶数と奇数が同数となる。 □

定理 9.1, 9.2 の一般化の内 Dilcher によるもの [4] を含む形に組合せ論の側を一般化する。

定理 9.5 (Dilcher). 任意の自然数  $m$  に対して、

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{q^{\frac{k(k-1)}{2} + mk}}{(q; q)_k (1 - q^k)^m} = \sum_{j_1=1}^{\infty} \frac{q^{j_1}}{1 - q^{j_1}} \sum_{j_2=1}^{j_1} \frac{q^{j_2}}{1 - q^{j_2}} \cdots \sum_{j_m=1}^{j_{m-1}} \frac{q^{j_m}}{1 - q^{j_m}}.$$

定理 9.6 (Dilcher). 任意の自然数  $n, m$  に対して、

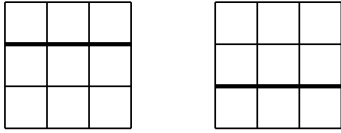
$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{q^{\frac{k(k-1)}{2} + mk}}{(1 - q^k)^m} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{j_1=1}^n \frac{q^{j_1}}{1 - q^{j_1}} \sum_{j_2=1}^{j_1} \frac{q^{j_2}}{1 - q^{j_2}} \cdots \sum_{j_m=1}^{j_{m-1}} \frac{q^{j_m}}{1 - q^{j_m}}.$$

右辺のシグマそれぞれは長方形だった。それをだんだん細くなるよう積をとっているのだから、長方形を縦に  $m$  個並べた形のヤング図形を数えている。ただし、例えば  $3 \times 2$  の長方形と  $3 \times 1$  の長方形

\*<sup>30</sup>  $m \geq \lambda_1$  の場合は自由に動かせるが  $m < \lambda_1$  の場合はその動かせる範囲が狭くなると思えばよい。

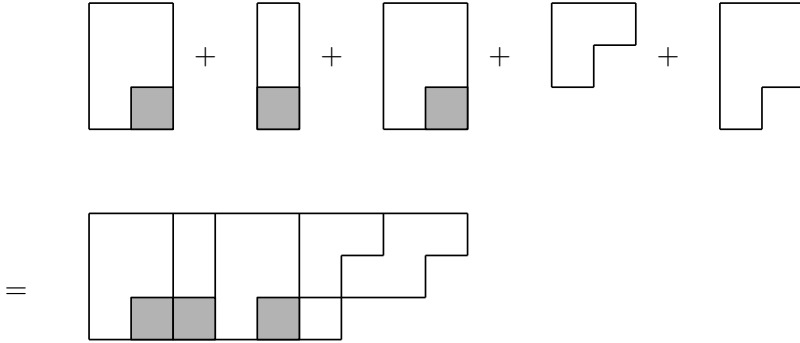
とを縦に並べたヤング図形とその逆  $3 \times 1$  の長方形と  $3 \times 2$  とを並べたヤング図形は同じ形であるが別物として数えている。

図 31.



よって、一つのヤング図形をもととの切れ目が入っている角を含む  $m$  本の線で切ることになり、 $\binom{\ell(\lambda)-c(\lambda)}{m-c(\lambda)}$  回数えている。一方左辺は今まで出てきた式に縦  $k$  の長方形の母関数であった  $\frac{q^k}{1-q^k}$  を  $m-1$  回掛けた形だが、図 28 を次のように一般化したと思うことができる。ただし階段を一段小さくしており、その分各長方形の横幅は 1 以上となっている。

図 32.



従って出来上がりの形が相異分割であることは変わりないが、その重複度は色付きのマスの置き方であり、 $\lambda_{\ell(\lambda)}$  から  $\binom{\lambda_{\ell(\lambda)}}{m}$  に一般化されたと思える。よって式を直せば、

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{SP}} (-1)^{\ell(\lambda)-1} \binom{\lambda_{\ell(\lambda)}}{m} q^{|\lambda|} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \binom{\ell(\lambda)-c(\lambda)}{m-c(\lambda)} q^{|\lambda|}.$$

定理 9.7 (A.). 任意の自然数  $m, n, k$  に対して

$$\begin{aligned} & \#\{(\lambda; i_1, \dots, i_m) \mid \lambda \in \mathcal{SP}(n), 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq \lambda_{\ell(\lambda)}, a'_{1i_m} = k, \ell(\lambda) : \text{奇数}\} \\ & - \#\{(\lambda; i_1, \dots, i_m) \mid \lambda \in \mathcal{SP}(n), 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq \lambda_{\ell(\lambda)}, a'_{1i_m} = k, \ell(\lambda) : \text{偶数}\} \\ & = \#\{(\lambda; t_1, \dots, t_{m-c(\lambda)}) \mid \lambda \in \mathcal{P}(n), 1 \leq t_1 < \dots < t_{m-c(\lambda)} < \ell(\lambda), \lambda_1 = k, \lambda_{t_i} = \lambda_{t_i+1}\}. \end{aligned}$$

例.  $n = 5, m = 2$  について、

まずは定理 9.5 の式の読替えについて確認する。

$$\mathcal{P}(5) = \{(5), (14), (1^23), (23), (12^2), (1^32), (1^5)\}, \mathcal{SP}(5) = \{(5), (14), (23)\}$$

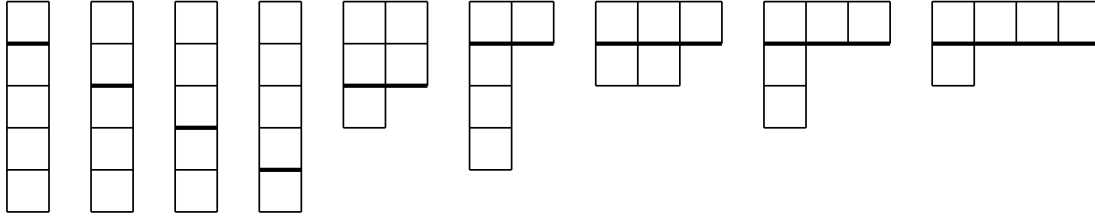
であり、

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{SP}(5)} (-1)^{\ell(\lambda)-1} \binom{\lambda_{\ell(\lambda)}}{2} = \binom{5}{2} - \binom{1}{2} - \binom{2}{2} = 10 - 0 - 1 = 9,$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(5)} \binom{\ell(\lambda) - c(\lambda)}{m - c(\lambda)} \\
&= \binom{1-1}{2-1} + \binom{2-1}{2-2} + \binom{3-1}{2-2} + \binom{2-1}{2-2} + \binom{3-1}{2-2} \binom{4-1}{2-2} + \binom{5-1}{2-1} \\
&= 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 5 = 9.
\end{aligned}$$

定理 9.7 はこの結果の精密化だ. 定理 9.2 の例で使った相異分割のヤング図形の図を見て欲しい. 各ヤング図形に現れる座高の数字のペアをとることが二項係数と対応する. (5) の分割のヤング図形でのペアは (5, 1), (4, 1), (3, 1), (2, 1), (5, 2), (4, 2), (3, 2), (5, 3), (4, 3), (5, 4) の 10 個. (14) ではペアはとれず, (23) では (3, 2) の 1 つ. 一方長方形 2 つで作られるサイズ 5 のヤング図形は,

図 33.



であり, ちょうど 9 個. とここまでだと精密化になっていないが, それは  $k$  の情報が抜けているからだ.  $k$  は数字のペアの方では小さい方の数字, 長方形を重ねたヤング図形の方では一行目の長さである. 例えば  $k = 2$  とすれば, 小さい方の数字が 2 であるペアは符号 + のヤング図形での (5, 2), (4, 2), (3, 2) から符号 - の (3, 2) を引いた 2 つ<sup>\*31</sup>. 一方長方形を重ねてできるヤング図形のうち一行目が 2 であるものは (12<sup>2</sup>), (13<sup>2</sup>) の 2 つ (重ね方も一通り) であり一致した. ここでは  $m = 2$  なのでペアを考えているが,  $m$  を 3, 4, ... と増やせば 3 つ組, 4 つ組, ... を考えることになり, その場合も最も小さい数だけが  $k$  で保存される.

証明. 定理 9.2 に帰着させるため, 与えられた  $\lambda \in SP(n), \ell(\lambda) = \ell$  と  $i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq \lambda_\ell$  に対し,  $\ell(\lambda^{(m)}) = \ell, \lambda_1^{(m)} \geq a'_{1i_1}(\lambda^{(m)}) > \lambda_1^{(m)} - \lambda_\ell^{(m)}$  を満たす  $\lambda^{(m)} \in SP$  <sup>\*32</sup> を対応させる操作を考えよう. まず  $\lambda^{(1)} := \lambda$  と置き,  $\lambda^{(h)}$  と  $i_{m-h}, i_{m-h+1}$  から  $\lambda^{(h+1)}$  を決定する.  $\mu := \lambda^{(h)}, j_h := a'_{1i_{m-h+1}}$  と置こう. このとき  $\mu_1$  を  $\mu_1 - j_h$  で置き換えることで新たな  $\mu$  を作る. この操作を  $a'_{1i_{m-h}}(\mu) \leq j_h$  を満たすまで続けて, 最終的に得られた  $\mu$  を  $\lambda^{(h+1)}$  と置き, 行った操作の回数を  $t_h$  と置く. 途中段階では  $a'_{1i_{m-h}}(\mu) > j_h$  であり,  $\mu - j_h \geq i_{m-h}$  が成り立っている. この  $\mu - j_h$  が新たな  $\mu_\ell$  となるため,  $a'_{1i_{m-h}}(\lambda^{(h+1)}) = j_{h+1} > \lambda_1^{(h+1)} - \lambda_\ell^{(h+1)}$  が成り立つ. 初期条件で  $j_h > \lambda_1^{(h)} - \lambda_\ell^{(h)}$  が成り立てば定理 9.2 の例でも見たように,  $\mu$  は  $j_h$  を法として見ても相異であるため, 得られる  $\mu$  は相異分割だ. 得られた  $\lambda^{(m)}$  を  $\alpha_{j_m}$  または  $\alpha_{j_m}^{-1}$  で移し, 逆操作で戻したものと対応させる. すなわち,  $(\lambda; i_1, i_2, \dots, i_m)$  と  $(\lambda'; i'_1, i'_2, \dots, i'_m)$  が対応するのは, 任意の  $h$  について  $j_h = j'_h, t_h = t'_h$  であり  $\alpha_{j_m}(\lambda^{(m)}) = \lambda'^{(m)}$  が成り立つときだ. <sup>\*33</sup>  $\alpha_{j_m}$  により分割の長

<sup>\*31</sup> 現時点では分かっている対応は個数だけであり, (3, 2) が「引けた」のは偶然だ.

<sup>\*32</sup> 相異性と長さは保つが大きさは保たない.

<sup>\*33</sup> ここでの ' は共役の意味ではない. 対応の分かりやすさのために使わせてもらった.

さは 1 だけ変わり, 符号の異なる組を対応させることができた. 対応が付かないものは  $\lambda^{(m)}$  が  $j_m$  で割り切れる成分一つだけからなる場合だ. このあまりの組を数えればよいが,  $j_h \times t_h$  の長方形を重ねてできるヤング図形と対応が付く. ここで  $t_m = \frac{\lambda_1^{(m)}}{j_m}$  だ.  $\square$

例.  $k = 13, m = 3, n = 70$  とし,  $\lambda = (23 \ 19 \ 16 \ 12)$ ,  $i_1 = 4, i_2 = 5, i_3 = 11$  と対応する組を求める. 証明に沿って  $\lambda^{(1)} = (23, 19, 16, 12)$ ,  $j_1 = a'_{1 \ 11}(\lambda^{(1)}) = 13$  と置く.

$$\lambda^{(1)} = (23 \ 19 \ 16 \ 12) \xrightarrow{-13} (19 \ 16 \ 12 \ 10) \xrightarrow{-13} (16 \ 12 \ 10 \ 6).$$

ここで  $a_{15}(16 \ 12 \ 10 \ 6) = 12 \leq j_1$  となったため操作を止め,  $\lambda^{(2)} = (16 \ 12 \ 10 \ 6)$ ,  $j_2 = a'_{15}(\lambda^{(2)}) = 12$  と置く.

$$\lambda^{(2)} = (16 \ 12 \ 10 \ 6) \xrightarrow{-12} (12 \ 10 \ 6 \ 4).$$

同様に  $\lambda^{(3)} = (12 \ 10 \ 6 \ 4)$ ,  $j_3 = a_{14}(\lambda^{(3)}) = 9$  であり,  $\lambda^{(3)}$  を  $\alpha_9$  で移せば,

$$\lambda^{(3)} = (12 \ 10 \ 6 \ 4) \rightarrow \{12, 10, 6, 4, 0\} \rightarrow \{3, 10, 6, 4, 9\} \rightarrow (10 \ 9 \ 6 \ 4 \ 3) = \alpha_9(\lambda^{(3)}).$$

得られた  $\alpha_9(\lambda^{(3)})$  に逆操作を行う.

$$\begin{aligned} \alpha_9(\lambda^{(3)}) &= (10 \ 9 \ 6 \ 4 \ 3) \xrightarrow{12} (15 \ 10 \ 9 \ 6 \ 4) \\ &\xrightarrow{13} (17 \ 15 \ 10 \ 9 \ 6) \xrightarrow{13} (19 \ 17 \ 15 \ 10 \ 9). \end{aligned}$$

各段階で,  $a_{12}(10 \ 9 \ 6 \ 4 \ 3)$ ,  $a_{14}(15 \ 10 \ 9 \ 6 \ 4)$ ,  $a_{17}(19 \ 17 \ 15 \ 10 \ 9)$  が  $j_3, j_2, j_1$  にそれぞれ等しいので,  $((23, 19, 16, 12); 4, 5, 11)$  と  $((19, 17, 15, 10, 9); 2, 4, 7)$  が対応する.

対応が付かない場合の例として,  $\lambda = (70)$ ,  $i_1 = 13, i_2 = 19, i_3 = 58$  を考える. まず  $\lambda^{(1)} = (70)$ ,  $j_1 = a_{1 \ 58}(\lambda^{(1)}) = 13$  と置き,

$$\lambda^{(1)} = (70) \xrightarrow{-13} (57) \xrightarrow{-13} (44) \xrightarrow{-13} (31).$$

よって  $\lambda^{(2)} = (31)$ ,  $j_2 = a_{1 \ 19}(\lambda^{(2)}) = 13$  であり,

$$\lambda^{(2)} = (31) \xrightarrow{-13} (18).$$

従って  $\lambda^{(3)} = (18)$ ,  $j_3 = a_{1 \ 13}(\lambda^{(3)}) = 6$  となる.  $\lambda^{(3)}$  が  $j_3$  で割り切れる成分一つだけの分割となってしまうため,  $((70); 13, 19, 58)$  は  $13 \times 3, 13 \times 1, 6 \times 3$  の長方形を重ねたヤング図形と対応する.

定理 9.8 (A.). 任意の自然数  $m$  に対して,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{b^k q^{\frac{k(k-1)}{2} + km}}{(bq; q)_k (1 - q^k)^m} = \sum_{j_1=1}^{\infty} \frac{b^{j_1} q^{j_1}}{1 - q^{j_1}} \sum_{j_2=1}^{j_1} \frac{q^{j_2}}{1 - q^{j_2}} \cdots \sum_{j_m=1}^{j_{m-1}} \frac{q^{j_m}}{1 - q^{j_m}}.$$



証明. 実は内村桂輔氏による定理 9.1 の証明の中で式の  $b$ -類似が出てきており, その一般化でもある<sup>\*34</sup>.  $b$  は座高の情報を持っていて, 両辺の  $b^k q^n$  の係数を見れば定理 9.7 になっている.  $\square$

この結果は定理 9.5 の  $b$ -類似であり, 定理 9.6 の  $b$ -類似は今までと同じく有限和を考えることで得られる.

定理 9.9 (A.). 任意の自然数  $m, n$  について次が成り立つ.

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{b^k q^{\frac{k(k+1)}{2} + mk}}{(1-q^k)^m} \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{q,b} = \sum_{j_1=1}^n \frac{b^{j_1} q^{j_1}}{1-q^{j_1}} \sum_{j_2=1}^{j_1} \frac{q^{j_2}}{1-q^{j_2}} \cdots \sum_{j_m=1}^{j_{m-1}} \frac{q^{j_m}}{1-q^{j_m}}.$$

ここで  $\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{q,b}$  は  $q$ -二項係数の  $b$ -類似であり,

$$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{q,b} = \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{P} \\ \lambda_1 \leq n-k, \ell(\lambda) \leq k}} b^{|\lambda|} q^{|\lambda|}.$$

で定義される.

最後に一つ Dilcher とは別の内村型  $q$ -恒等式の一般化を紹介する.

定理 9.10 (A.). 任意の自然数  $m$  に対して次が成り立つ.

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{SP}} (-1)^{\ell(\lambda)-1} \binom{\lambda_{\ell(\lambda)} + m - 1}{m} q^{|\lambda|} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \sum_{r \geq 0} \binom{\ell(\lambda) - c(\lambda)}{r} \binom{m-1}{r+c(\lambda)-1} q^{|\lambda|}.$$

似たようなやり方で証明できるのだが,  $b$ -類似の式の  $bq$  を  $b$  で置き換えて... 等で得られる式ではなく別物だ. 左辺を見れば二項係数が重複組合せの形をしているが, これは図 32 の長方形に横幅 0 を許した場合を考えている. このとき右辺の長方形を重ねたヤング図形の側でも厚さ 0 以上の長方形を考えることになるが, そちらは角には既に切れ目が入っているため少し形がややこしい. という式だ.  $m = 1$  とすれば定理 9.1 が得られる.  $q$ -恒等式としての上手い表示は検討中だ.

## 10 終わりに

本論文を書くにあたっての復習の中で, 当時は気付かなかった点もいくつか発見ができた. だが, 当時は分かっていたはずなのに今見返すと分からないこともあり, 自身の証明の不親切さに辟易した. 改善はしたつもりだが十分かどうかは分からない. 内容については, 自画自賛だがなかなか面白い数学になっていると思う. 面白いだけで終わらないよう, 今後これらの数学をより深い数学とつなげていきたい. ところで有名なフック長公式を自身の結果と組み合わせることはできるが, あの式に意味はあるのだろうか?

<sup>\*34</sup> 座高の情報を持つといっているのに  $b$  の記号を使うのはこれが理由だ. 同じく内村桂輔氏の論文に  $a$  の記号を使った類似もあるのだがそれとは別物.

## 11 謝辞

師匠である山田裕史教授には本研究を進めるにあたり様々な御指導をいただきました。この分野に引き込んでもらえていなければ今の自分はなかったと思います。ここに感謝します。また共同研究者でもあり、ほとんどのゼミ（退学後のアポ無しを含む）に参加頂き有用なコメントをいただきました鈴木武史准教授に感謝します。

## 参考文献

- [1] M. Ando, A combinatorial proof of an identity for the divisor generating function. *Electron. J. Combin.*, **20**(2) 2013. #P13
- [2] M. Ando, T. Suzuki, H.-F. Yamada, Combinatorics for graded Cartan matrices of the Iwahori-Hecke algebra of type  $A$ . *Ann. Combin.*, **17**(3), 427–442, 2013.
- [3] G. アンドリュース, K. エリクソン (佐藤文広訳), 整数の分割, 数学書房, 2006.
- [4] k. Dilcher, Some  $q$ -series identities related to divisor functions. *Discrete Math.* 145, 83–93 1995.
- [5] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials, second ed.* Oxford University Press, Oxford, 1995.
- [6] J. B. Olsson, *Combinatorics and representations of finite groups.* Vorlesungen aus dem Fachbereich Mathematik der Universität GH Essen 20, 1993.
- [7] I. Pak, Partition bijection, a survey. *Ramanujan J.*, 12, 5–75, 2006.
- [8] Uchimura, K.: An identity for the divisor generating function arising from sorting theory. *J. Comb. Theory, Ser. A* 31, 131-135, 1981.
- [9] K. Uno and H.-F. Yamada, Elementary divisors of Cartan matrices for symmetric groups, *J. Math. Soc. Japan* 58, 1031–1036, 2006.
- [10] L. Van Hamme. Advanced problem 6407. *Am. Math. Mon.*, 89, 703–704, 1982.