岡山大学算数・数学教育学会誌
『パピルス』第18号（2011年）69頁～75頁

連立方程式をより深く考えるための教材

平井安久＊

研究の要約

連立方程式の応用問題として課題解決的な要素を含む教材を作成した．連立二元一次方程式を用いる場面から始まり，予想外の解が得られる場面，解の真値を推測する場面，一次関数のグラフとの対応を考える場面などを通して，解の真値とのズレができる理由を考える内容とした．この教材を実際に中学生対象に授業実践することにより，教材としての有効性を考えた．

key-words：連立方程式，一次関数のグラフ，真値

1．はじめに

連立方程式は中学校第２学年で扱われる内容である．ただし，場面と式の関係をはじめ，一次関数のグラフとの対応まで理解して使いこなせるには，単元内だけでは扱いにくい面もある．本研究では，連立方程式の応用問題として課題解決的な要素を含む教材を考える．ヒントとなった話題は Szydlik(2009)にある．そこでは，チョコレートのケースに表記されている栄養成分表の情報をもとに，連立三元一次方程式を作り，そこから予想外の解が算出される場面等を扱い，いろいろな議論へ発展している．この教材そのものは大学レベルの線形代数学の演習問題として用意されたものであるが，話題の意外性や問題の解決場面のおもしろさ等については，中学生対象の教材としても構成可能であろうと考えた．本研究では，新たに連立二元一次方程式を用いる場面を用意し，展開方法を工夫した教材を作成し，実際に中学生対象に授業を実践することにより，教材としての有効性を考えた．

2．目的および方法

この話題の目的は，連立方程式の応用場面で，課題学習的な題材を与え，グラフ表示を対応させながら問題解決へ導くことである．

実際に考案した教材を中学校で授業実践してみることでその効果を見ようと試みた．

授業実施について

対象は岡山市内の県立中学校の第３学年 120名であった．2009 年 12 月に（および１年後の2010年12月にも，その年度の第３学年を対象に）実施した．時間は１単位時間であった．「本当はいくら？」という話題名で平井が授業をおこなった．当日は１時間のみの授業であった．授業展開については次節に述べるが，事前に別途１単位時間かけて担当の先生より，「電卓による連立方程式の解法の練習」として以下のような内容の説明と計算練習を済ませている．

連立方程式の解を求める公式

x と y の連立方程式 $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ の解は，

$$\begin{cases} x=\dfrac{de-bf}{ad-bc} \\ y=\dfrac{af-ce}{ad-bc} \end{cases}$$

で求められます．ただし，$ad-bc\neq 0$ の場合に限ります．

例１．$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 4x+y=9 \end{cases}$ の解は，

$$x=\frac{de-bf}{ad-bc}=\frac{1\times 7-3\times 9}{2\times 1-3\times 4}=\frac{-20}{-10}=2$$

$$y=\frac{af-ce}{ad-bc}=\frac{2\times 9-4\times 7}{2\times 1-3\times 4}=\frac{-10}{-10}=1$$

（以下は省略）

連立方程式の解を求める計算については，中学生のカリキュラムでは手計算が普通である．しかし，ここでは解に小数値が含まれるために，手計算で求めると余計な手間がかかり，話題での興味を持たせたい場面への関心が薄れることになる．そのため，未習の一般公式を用いて電卓で数値を

＊岡山大学大学院教育学研究科

計算することにした.

3. 授業の展開

以下のような学習活動である. ここでは, 授業者の発問や説明のみを列挙し, 生徒の反応は別に次節で述べたい.

学習活動1. 解を求め, 結果（解）が様々になることに気づく.

学習活動2. 解の真値を推測し, 計算結果を評価する.

学習活動3. 各計算結果と一次関数のグラフを対応させる.

学習活動4. 解の真値とのズレができた理由を考える.

学習活動5. まとめ

以下, 課題提示を含めて, 個々の提示内容や細かい指示文章はすべてスクリーン上に表示した.

学習活動1. 解を求め, 結果（解）が様々になることに気づく.

まず, ワークシートを配布した上で課題提示をする. ワークシートの内容は以下の通りである：

課 題「本当はいくら？」

6人の客が, ガソリン（レギュラー）と軽油の両方を購入しました. それぞれの客が購入した量と支払った合計金額は表の通りです. ガソリン1ﾘｯﾄﾙ当たりの値段と軽油1ﾘｯﾄﾙ当たりの値段はそれぞれいくらだったのでしょうか？

実は, 合計金額は正確な数値ですが, ガソリンの購入量と軽油の購入量の数値は, 小数第1位を四捨五入した値なのだそうです.

ガソリン(レギュラー)の購入量	軽油の購入量	合計金額
45 ﾘｯﾄﾙ	10 ﾘｯﾄﾙ	6738 円
11 ﾘｯﾄﾙ	47 ﾘｯﾄﾙ	6128円
40 ﾘｯﾄﾙ	10 ﾘｯﾄﾙ	6118円
10 ﾘｯﾄﾙ	61 ﾘｯﾄﾙ	7418円
42 ﾘｯﾄﾙ	12 ﾘｯﾄﾙ	6466円
46 ﾘｯﾄﾙ	8 ﾘｯﾄﾙ	6675円

ガソリン1ﾘｯﾄﾙ当たりの値段(円)と軽油1ﾘｯﾄﾙ当たりの値段(円)を求めよう.

①式： $45x+10y=6738$

②式： $11x+47y=6128$

③式： $40x+10y=6118$

④式： $10x+61y=7418$

⑤式： $42x+12y=6466$

⑥式： $46x+8y=6675$

（この後に続いて, 連立方程式の解を記入する箇所もあるが省略する.）

生徒全体を6グループに分けて以下のような組み合わせで分担して電卓を使用して答えを求めるよう指示する.「計算結果は, 小数第2位を四捨五入して小数第1位までを求めてください. x=123.45 のときは, x=123.5.」と指示する.

第1グループの連立方程式：

①式： $45x+10y=6738$

②式： $11x+47y=6128$

$x=\quad ,y=$

第2グループの連立方程式：

①式： $45x+10y=6738$

⑤式： $42x+12y=6466$

$x=\quad ,y=$

第3グループの連立方程式：

⑤式： $42x+12y=6466$

⑥式： $46x+8y=6675$

$x=\quad ,y=$

第4グループの連立方程式：

①式： $45x+10y=6738$

③式： $40x+10y=6118$

$x=\quad ,y=$

第5グループの連立方程式：

③式： $40x+10y=6118$

⑤式： $42x+12y=6466$

$x=\quad ,y=$

第6グループの連立方程式：

①式： $45x+10y=6738$

④式： $10x+61y=7418$

$x=\quad ,y=$

学習活動２．解の真値を推測し，計算結果を評価する．

答え合わせ風に，各グループの計算結果を確認する．

第１グループについて，

①式と②式の組み合わせでは，

$x=127.4,\quad y=100.6$

第２グループについて，

①式と⑤式の組み合わせでは，

$x=135.0\quad ,y=66.5$

第３グループについて，

⑤式と⑥式の組み合わせでは，

$x=131.3\quad ,y=79.2$

第４グループについて，

①式と③式の組み合わせでは，

$x=124.0\quad ,y=115.9$

第５グループについて，

③式と⑤式の組み合わせでは，

$x=145.9\quad ,y=28.1$

第６グループについて，

①式と④式の組み合わせでは，

$x=127.3\quad ,y=100.7$

グループによって解の値にかなり違いが見られることを確認する．

続いて，「実際の値段はどれくらいかな？街角で調べてみよう．」と言って，実際に市内のガソリンスタンド７店で撮影した価格表示板の写真（計７枚）を見せる．それに続いて，それらの価格の一覧表も提示する．

(レギュラー)ガソリンの値段 円/ℓ	軽油の値段 円/ℓ
125	104
123	101
125	102
125	102
127	106
123	101
125	102

授業者は，「たぶん，今回もこれくらいの値段だろう．でも，本当の値段はわからない!! だいたい，ガソリンは125円前後で，軽油は100円ちょっとという感じかな．」と表の読み方を説明した上で，「では，さきほど手分けして求めた「解 x，y の値」を評価してみよう．どれが「本当の値段」に近いだろうか？」と進める．

上述の各組み合わせを１つずつ見ていきながらで，x，y の値が「本当の値段」に近いかどうかを生徒とともに確認しながら判断する．生徒たちの判断は，市内のガソリンスタンド店での価格を判断基準としている．結果的に，以下のように分けられる．

・「本当の値段」に近いもの：

①式と②式から得られた $x=127.4, y=100.6$

①式と④式から得られた $x=127.3, y=100.7$

・「本当の値段」から離れているもの：

①式と⑤式から得られた $x=135.0, y=66.5$

⑤式と⑥式から得られた $x=131.3, y=79.2$

①式と③式から得られた $x=124.0, y=115.9$

③式と⑤式から得られた $x=145.9, y=28.1$

学習活動３．各計算結果と一次関数のグラフを対応させる．

授業者は以下のように説明を進める：

２年生で習ったように，連立方程式の解は２本のグラフの交点の座標として求められます．６つの各場合について，２つの式を２本のグラフで表現してみましょう．例えば，

①式： $45x+10y=6738$

②式： $11x+47y=6128$

$x=127.4,\quad y=100.6$

の場合は，２つの式を表す一次関数のグラフ（および交点）は図１のようになります．

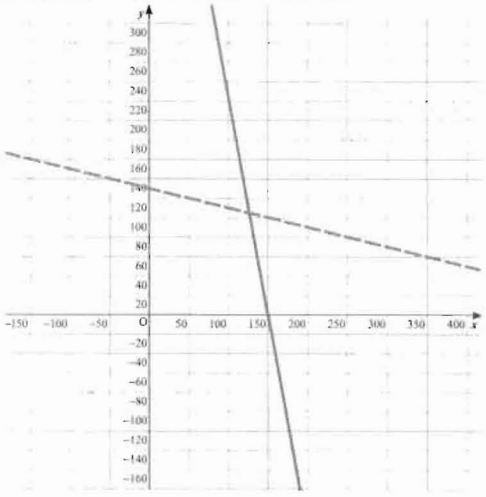

図１．四捨五入後の①式と②式のグラフ

さらに，

①式： $45x+10y=6738$

⑤式： $42x+12y=6466$

$x=135.0\quad ,y=66.5$

の場合は，２つの式を表す一次関数のグラフ（および交点）は図２のようになります．

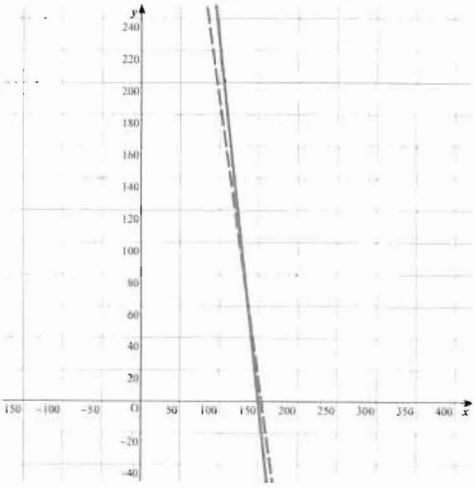

図２．四捨五入後の①式と⑤式のグラフ

授業者は，残る４つの場合についても同様に，一次関数のグラフおよび交点を提示する．

この後，授業者は「何か気づきましたか？」と問いかける．最終的に「どうやら，２本のグラフの傾きが関係しているらしい．」と話を進める．生徒に視覚的に気づかせるためである．

学習活動４．解の真値とのズレができた理由を考える．

授業者は「x，y の係数を四捨五入する前の一次関数のグラフと，四捨五入した後の一次関数のグラフとでは，位置がずれているらしいのです．では，どのくらいずれるのでしょうか？」と続け，以下のように説明する．

「実は，先生は，最初の問題の x，y の係数の本当の値を知っています．①式と②式の場合 x，y の係数に本当の値を使った場合は，２つの式を表す一次関数のグラフ（および交点）は図３のようになります．

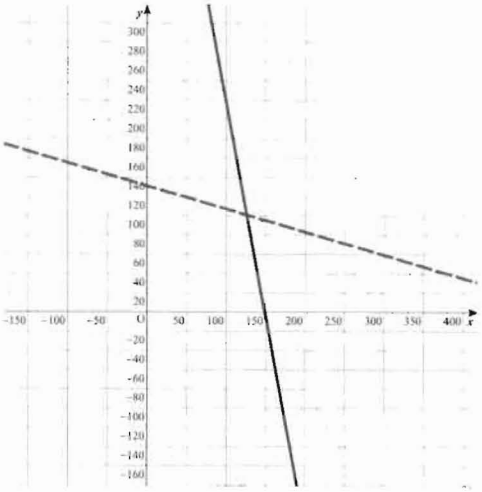

図３．四捨五入前の①式と②式のグラフ

これを「四捨五入する前のグラフ」とよびましょう．では，「四捨五入した後のグラフ」（図１）を並べてみましょう．左右に並べた後で，２枚の図を（図３と図１を）重ねて見せる．すると図４のようになり，「四捨五入する前のグラフ」での交点の位置と「四捨五入した後のグラフ」での交点の位置がほとんど同じであることがわかります．」

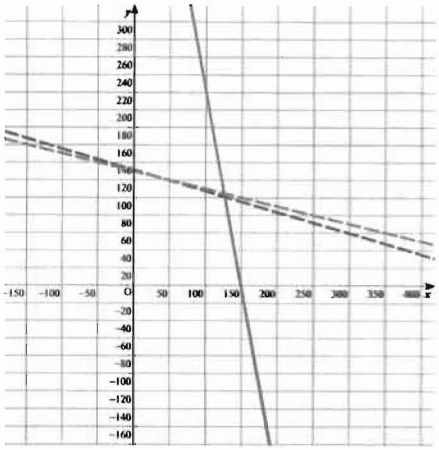

図4．四捨五入前と後の①式と②式のグラフ．
２つの交点の位置は近い．

さらに，授業者は①式と⑤式の場合についても，以下のように説明する．

「同様に，①式と⑤式の場合ではx，yの係数に本当の値を使った場合は，　２つの式を表す一次関数のグラフ（および交点）は図５のようになります．

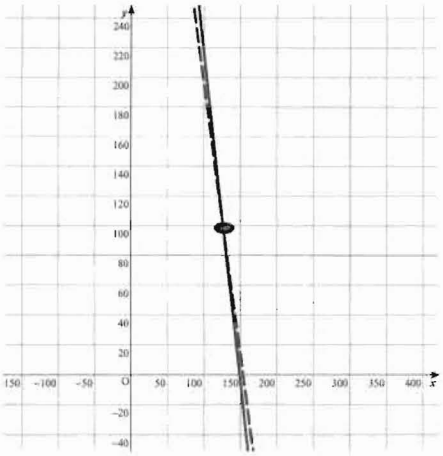

図5．四捨五入前の①式と⑤式のグラフ

「四捨五入した後のグラフ」（図２）を並べてみましょう．左右に並べた後で，２枚の図を（図５と図２を）重ねて見せる．すると図６のようになり，「四捨五入する前のグラフ」での交点の位置と「四捨五入した後のグラフ」での交点の位置が大きくずれていることがわかります．」

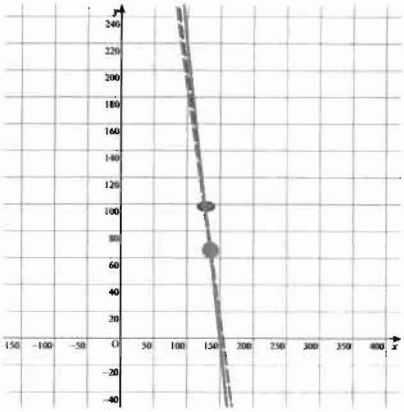

図6．四捨五入前と後の①式と⑤式のグラフ．
２つの交点の位置が離れている．

この後，以下のようにまとめる．

・２つの直線の傾きが似ているとき
「本当の値段」に近いもの：
・２つの直線の傾きが異なるとき
「本当の値段」から離れているもの：
ということがわかる．言い換えると，
・２つの直線の傾きが似ているとき
　→解はあやしい！！
・２つの直線の傾きが異なるとき
　→解は本当の値に近い！！
言い換えると，
・２つの直線の傾きが似ているとき
直線の位置が少しずれると解のズレは大きい!!
・２つの直線の傾きが異なるとき
直線の位置が少しずれても解のズレは小さい!!

学習活動５．まとめ

最後に授業者は以下のようにまとめる．

正確な値に近い解を得るには，
・「傾き」の異なる方程式を選んでペアにするとよい．
・「本当の解の値は不明なまま」だけど，近い値が得られる．
・今日の話は，将来
　「近似解」・・・近似計算
　「丸め誤差」・・・数値計算
などの話題に関係します．

4．生徒たちの反応

学習活動１（解を求め，結果（解）が様々になることに気づく）では，生徒たちは６つのグループに分かれて，電卓を使用して計算結果を出した．事前の計算練習が功を奏したためか，解を求める作業はほとんど支障なく進んだ．そして，各グループの計算結果（x，yの値）どうしが互いに異なる様子を見て驚いていた．ここでは，真の値との隔たりではなく，グループごとに求めたx，yの値の間に大きな差異があったことに驚いたのである．

学習活動２（解の真値を推測し，計算結果を評価する）では，実際の市内のガソリンスタンドの価格表示板の写真に興味をひかれていた．現実の店の価格もすこしずつ異なるが，授業者は「だいたい，ガソリンは 125 円前後で，軽油は 100 円ちょっとという感じかな．」という表現をした．この推測値（推測値という表現は使用していない）が提示課題の真の解に近い値だろうという気持ちは生徒たちにも伝わった様子であった．続いて，各グループの計算結果（x，yの値）が「本当の値段」に近いかどうかを，解の推測値と比べることで順番に判断してもらった．推測値に近い場合は，”スマイルマーク”を付し，推測値に近くない場合は，”がっかりマーク”を付した．計６つの場合の計算結果の判断では，生徒たちに意見の食い違いは見られなかった．

学習活動３（各計算結果と一次関数のグラフを対応させる）では，本時の生徒は３年生なので，連立方程式の解が一次関数のグラフどうしの交点に対応することは抵抗なく受け入れることができた．したがって，すぐにグラフ表示も提示できた．計算作業のグループの順に一次関数のグラフ表示（図１や図２を含めて６つの場合）をスマイルマークまたはがっかりマークを付して提示した．直後に，スマイルマークの場合とがっかりマークの場合に並べかえた順に提示した．この時点で「２本のグラフの傾きとの関連性」に気づいた生徒は３名程度であった．気づいた生徒からの発言および授業者の確認によって「２本のグラフの傾きが関係している」ことに生徒たちは視覚的に気づいた様子であった．

学習活動４（解の真値とのズレができた理由を考える）

前の学習活動３で生徒たちは，２本のグラフの傾きが異なるときは，いわゆるスマイルマーク状態（計算結果が推定値に近い）であり，２本のグラフの傾きが近いときは，逆にがっかりマーク状態（計算結果が推定値から離れている）であることは，視覚的には気づいているが，そのからくりまでは見当もつかない様子であった．授業者による「四捨五入する前のグラフ」と「四捨五入した後のグラフ」を左右に並べた後で，２枚の図を重ねて見せると，生徒たちには，やや感動しているような反応が見られた．最後に授業者が「２本の直線の傾きが近いときには，１本が少しずれただけで，交点の位置はかなり動いてしまうでしょう．x，yの係数を四捨五入するということは，グラフが少しずれるということです．」という意味の説明をした．

5．考察

学習活動１では，課題提示とともに方程式が①式から⑥式まで同時に示されている．この理由は，対象生徒が３年生でもあり，立式そのものが本時のねらいではないためである．課題の場面はガソリンや軽油の値段としたが，これは参考としたSzydlik(2009)での場面（栄養成分表から連立方程式を立てる）よりもイメージしやすかったのではないだろうか．

学習活動２（解の真値の推測と計算結果の評価）では，解の真値本当の値段は最後まで提示しなかった．真値を推測する参考情報として市内のガソリンスタンドでの価格をいくつか見せる場面があるが，この後も提示課題のx，yの真値（ガソリンと軽油の正確な価格）をはっきりとは知らせない．しかし，別の進め方として，ここで真値を教えてしまうという方法も可能であろう．今回は，解がわかったら仕事が終わりという常識的なイメージを作らないために，x，yの真値は明示しないままとして，四捨五入前後のグラフを提示する時点でグラフ表現の中にx，yの真値が図的に表示されるだけとした．結果的に，生徒たちの興味を持続させることにはつながったと考える．

学習活動４（解の真値とのズレができた理由を

考える）では，２本のグラフの傾きが近いときは，がっかりマーク状態（計算結果が推定値から離れている）となる理由説明を授業者からではなく，生徒のことばによって説明してもらうという方法もあり得るであろう．生徒の理解の様子を確認するにはその方が確実かもしれない．

６．まとめと今後の課題

今回の授業は，連立方程式について一通り学習済みの生徒たちが，課題学習的に連立方程式の応用的話題を考えるものであった．時間的制約から多くの場面で自発的に考えさせたり気づくまで待つという時間を取りにくかったが，結果的に，学習活動１から４までの間に，話題の不思議さに驚いたり，グラフとの対応で理由が急に明らかになったりする点については，実現できたと考えられる．授業後の生徒からのコメントでは，以下のようなものが多かった：

・「連立方程式で，どれを組み合わせても同じだと思っていたので全然違う答えが出て，「なんで，どうして？」と驚きました．」

・「スライドに表示されたグラフのおかげで仕組みがわかりました．まさか，傾きが関係しているなんて思っていなかったので，これも驚きました．」

・「解を出した後に，それを見極める方法がグラフにすることだったので，数学はいろいろなとことでつながっているんだなあと改めて思いました．」

（すべて，一部分の抽出である．）

今後の課題としては，

・教材として難しそうに感じる点も含まれるので，生徒が活動すべき部分とそうでない部分などの区別を明確にすること．

・グラフの傾きの違いと２つの交点の隔たりの関係について，中学生にも理解できるように明確に表現すること．

などである．

参考文献

Szydlik, S. D.(2009). The problem with the snack food problem. Mathematics Teacher, 103(1), 18-25.