最小２乗推定計算の論理について

藤　本　利　躬

Ｉ　は　じ　め　に

単１方程式モデルにおける構造パラメータの 最小２乗推定値計算の標準的手順については，たとえばクライン〔３〕にその詳細を見出すことができる。<1> それは，周知のようにあらかじめ作成した対称積率行列と説明変数の個数に等しい次元の単位行列に対して消去法を 規則的に反復適用することにより回帰係数の推定値と積率逆行列とを，同時に算出するシステマチックな機械的計算プロセスであって，その後の新しい標準的テキストにおいてもこれと同じかあるいはこれを基本線とし，枝葉末節についていくつかの改良を加えた計算手順が解説されるというのが普通である。しかるに「アメリカ農務省でフリードマンやフートなどの学者が開発した方法」<2> として川勝昭平氏が紹介されているものは，かような通常の方法とは趣きをかなり異にしており，積率逆行列や「パラメータの推定値のみならず，分析結果の判断に必要なすべての検定用統計量を一度に算出する」<2> という点で，この計算方法のエレガントなまでの手際のよさはまことに印象的である。ただ，川勝氏の紹介には文字通り計算手順そのものの解説しか与えられておらず，それを正当化し基礎づけるための論理的証明が皆無なので，なぜそういう計算手順構成になるのかが不明であるとの意味において，そのままでは多かれ少なかれ消化不良の憾みなしとしない。またその典処も指示されていないので，さしあたっては独断でこの方法の論理的コンシステンシーを 追求するほかはないのである。かような次第で，本稿の目的はフリードマン・フート法の計算手順構成に厳密な論証を与えることにある。あわせて通常の方法との相違点を必要最小限

＜１＞　クライン〔３〕173－189ページ。
＜２＞　川勝〔１〕，207ページ。

において指摘することによりフリードマン・フート法の 特徴をうき彫りして行くことにしょう。

II　一 般 原 理

はじめに，計量経済学のイロハに相当することであるが，以下の議論の出発点を確定する意味において線型単1方程式確率モデル（ショック・モデル）の構造推定への最小2乗法の適用原理を最もコンパクトに要約しておく必要がある。<3> いま関連する多重回帰方程式を

(1)　$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \cdots + \beta_K X_{tK} + u_t$

とする。Yは被説明変数，X_i は第i説明変数（i＝1，…，K），β_i は第i偏回帰係数（i＝1，…，K），uは撹乱項（確率変数），β_0 は定数項である。標本サイズをNとし，

(2)　$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_N \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} 1 & X_{11} & \cdots X_{1K} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{N1} & \cdots X_{NK} \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_K \end{pmatrix},\ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$

と定義すれば，(1)は

(3)　$Y = X\beta + u$

となる。さらにuの分布について規定

(4)　$E(u) = 0$,<4>　　　　(5)　$E(uu') = \sigma^2 I_N$<5>

をおき，標本サイズについては（K＋1）＜N，確定変数 X_i と確率変数uについては $E(X_i u) = 0$ (i＝1…K)，を仮定する。

任意の標本に対する係数パラメータの最小2乗推定量を $\hat{\beta}$ とし，eをuの最小2乗推定量としてのいわゆる残差と定義すれば，$\hat{\beta}$ は

(6)　$Y = X\hat{\beta} + e$

<3>　ジョンストン〔2〕，104―132ページ。
<4>　Eは，もちろん，期待値演算を意味する。
<5>　u'はuの転置を意味する。I_N はN次単位行列，σ_2 は確率変数 u_t の母分散である。かくて(5)はuの独立性と斉一分散との周知の複合規定である。

(7)　$\min(e'e)=(Y-X\hat{\beta})'(Y-X\hat{\beta})$

を充たすはずである。(7)の１階条件としての正規方程式，

(8)　$X'X\hat{\beta}=X'Y$

より，次の係数パラメータ推定式

(9)　$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'Y$

が得られる。

つぎに(9)の Y について(3)を代入すれば

(10)　$\hat{\beta}=\beta+(X'X)^{-1}X'u$

となるから，$\hat{\beta}$ の不偏性が(10)(4)から

(11)　$E(\hat{\beta})=\beta+(X'X)^{-1}X'E(u)=\beta$

として示される。

また $\hat{\beta}$ の分散・共分散行列 $\sigma^2_{\hat{\beta}}$ は，(10)より $\hat{\beta}-\beta=(X'X)^{-1}X'u$　であるから，(5)も使って

(12)　$\sigma^2_{\hat{\beta}}=E[(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)']=\sigma^2(X'X)^{-1}$

と計算される。つまり，$\hat{\beta}$ は平均(11)，分散(12)の同時分布をする確率変数である。

残差の分散を求めよう。(6)(9)(3)から

(13)　$e=[I_N-X(X'X)^{-1}X']u$

となるから，$I_N-X(X'X)^{-1}X'=A$ とすれば，

$\sigma^2_e=E(e'e)=E(u'A'Au)$

であるが，$A'A=I_N-2X(X'X)^{-1}X'+X(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}X'=I_N-X(X'X)^{-1}X'=A$ であるから，

$=E(u'Au)=\sum A_{ij}E(u_i u_j)$

であるが，規定(5)より $i\neq j$ につき $E(u_i u_j)=0$ であるから

$=\sum A_{ii}E(u_i u_i)=\sum A_{ii}\sigma^2=\sigma^2 t_r(A)$ <6>

<6>　tr (A) は云うまでもなく A の対角要素の和としての「A のトレース」を意味する。

$$=\sigma^2 t_r[I_N-X(X'X)^{-1}X']=\sigma^2\{N-t_r[X(X'X)^{-1}X']\}=\sigma^2\{N-t_r[(X'X)^{-1}X'X]\}$$ <7>

$$=\sigma^2[N-t_r(I_{K+1})]=\sigma^2[N-(K+1)]$$

すなわち

(14) $$\sigma_e^2=\sigma^2[N-K-1]$$

したがって

(15) $$\hat{\sigma}_e^2=\frac{(e'e)}{N-K-1}$$

がσ^2の不偏推定量となる。

したがって$\hat{\beta}$の推定誤差分散は(15)を(12)に代入した

(16) $$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}^2=\frac{(e'e)}{N-K-1}(X'X)^{-1}$$

の主対角要素で与えられる。

構造パラメータの最小２乗推定の最もプリミティブな計算原理は以上のように要約することができるが，実際の計算手順が立脚する原理はこれよりもリファインされている。いま正規方程式(8)の第１式

(17) $$N\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1\sum X_{t1}+\cdots+\hat{\beta}_K\sum X_{tK}=\sum Y_t$$

に注目して，その両辺をＮで割れば

(18) $$\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1\overline{X}_1+\cdots+\hat{\beta}_K\overline{X}_K=\overline{Y}$$

(19) $$\overline{X}_i=\frac{1}{N}(\sum X_{ti}),\ (i=1\cdots K);\ \overline{Y}=\frac{1}{N}(\sum Y_t)$$

となるが，これは回帰線がかならず標本平均を通ることを意味している。この事実を利用して(8)の第２式以下の$\hat{\beta}_0$について(18)を代入して$\hat{\beta}_0$を消去する手続きを踏めば，(8)は

(19) $$\sum_i\hat{\beta}_i(\sum_t X_{tj}X_{ti}-\overline{X}_i\sum_t X_{tj})=\sum_t X_{tj}Y_t-\overline{Y}\sum_t X_{tj}\ (j=1\cdots K)$$

となるが，(19)の$\hat{\beta}_i$の係数およびその右辺は

(20) $$\sum_t X_{tj}X_{ti}-\overline{X}_i\sum_t X_{tj}=\sum_t X_{tj}X_{ti}-N\overline{X}_i\overline{X}_j=\sum_t(X_{tj}-\overline{X}_j)(X_{ti}-\overline{X}_i),$$
$(i=1\cdots K)$

＜７＞　柴山〔４〕351－２ページ。

(21) $\sum_t X_{tj}Y_t - \overline{Y}\sum_t X_{tj} = \sum_t X_{tj}Y_t - N\overline{Y}\,\overline{X}_j = \sum_t (Y_t - \overline{Y})(X_{tj} - \overline{X}_j)$

であるから,

(22) $y_t = Y_t - \overline{Y}$, $x_{ti} = X_{ti} - \overline{X}_i$, $(t=1\cdots N;\ i=1\cdots K)$

とおけば, (19)は正規方程式の縮約型

(23) $\sum_i \hat{\beta}_i \left(\sum_t x_{tj} x_{ti}\right) = \sum_t y_t x_{tj}$, $(j=1\cdots K)$

となる。これはK個の未定係数$\hat{\beta}_i$を含むK個の1次方程式の連立系であるから, いわゆる線型重合の生起しない限り, ユニークな解を結果することができる。この結果を(18)に代入すれば$\hat{\beta}_0$が決定されることになる。

ところで(23)のような正規方程式は, 明らかに, モデル

(1)′ $y_t = \sum_i \beta_i x_{ti} + (u_t - \overline{u})$

(2)′ $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_{11} \cdots x_{1K} \\ ,\cdots\cdots\cdots, \\ x_{N1} \cdots x_{NK} \end{pmatrix}$, $\beta_{)0(} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_K \end{pmatrix}$, $(u - \overline{u}) = \begin{pmatrix} u_1 - \overline{u} \\ \vdots \\ u_N - \overline{u} \end{pmatrix}$, $\overline{u} = \dfrac{\sum_t u_t}{N}$

(3)′ $y = x\beta_{)0(} + (u - \overline{u})$

(6)′ $y = x\hat{\beta}_{)0(} + e$ <8>

(7)′ $\min(e'e) = (y - x\hat{\beta}_{)0(})'(y - x\hat{\beta}_{)0(})$

について誘導されたものである。<9> 実際, (23)を行列形式に改めれば, (8)に対応する

(8)′ $x'x\hat{\beta}_{)0(} = x'y$

となるから, これより

(9)′ $\hat{\beta}_{)0(} = (x'x)^{-1}x'y$

として推定値が得られる。かような方法を簡便法とよべば, そこには推定計算に先だって原点中心のオリジナル・データを標本平均中心の偏差データに変換する加工をほどこしてから正規方程式の構成に移行するという原理が活

<8> 回帰線は既述のように標本平均点をかならず通るから$\overline{e}=0$。したがって$e - \overline{e} = e$ である。

<9> $\beta_{)0(}$はベクトルβからその第1要素β_0を除去したものを表わす。

用されるわけである。

簡便法による推定計算においても(16)に対応する $\hat{\beta}_{)0(}$ の分散・共分散の推定量 $\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_{)0(}}$ が

(16)′　$\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_{)0(}} = \dfrac{(e'e)}{N-K-1}(x'x)^{-1}$

で与えられることを示そう。簡便法の適用結果として(9)′の形で $\hat{\beta}_{)0(}$ が推定されたとする。その不偏性は，前と同様，(9)′ に(3)′ を代入して

$$\hat{\beta}_{)0(} = \beta_{)0(} + (x'x)^{-1}x'u - (x'x)^{-1}x'\bar{u}$$

を得るが，

(24)　$x'\bar{u} = \bar{u}\begin{pmatrix} \sum_t x_{t1} \\ \vdots \\ \sum_t x_{tK} \end{pmatrix} = 0$

であるから，[10] 結局

(10)′　$\hat{\beta}_{)0(} = \beta_{)0(} + (x'x)^{-1}x'u$

したがって(11)と同様に

(11)′　$E(\hat{\beta}_{)0(}) = \beta_{)0(}$

つぎに(10)′より $\hat{\beta}_{)0(} - \beta_{)0(} = (x'x)^{-1}x'u$ であるから，(12)と同様に

(12)′　$\sigma^2_{\beta_{)0(}} = \sigma^2(x'x)^{-1}$

さらに残差については，(24)を使えば

(13)′　$e = y - x\hat{\beta}_{)0(} = x\beta_{)0(} + (u-\bar{u}) - x\{(x'x)^{-1}x'[x\beta_{)0(} + (u-\bar{u})]\}$

$$= [I_N - x(x'x)^{-1}x']u - \bar{u} = Bu - \bar{u}$$

ここに B は前の A に対応し，B′B＝B の性質を保持するから，e の分散は

$$\sigma_e^2 = E(e'e) = E[(u'B' - \bar{u}')(Bu - \bar{u})] = E[u'B'Bu - u'B'\bar{u} - \bar{u}'Bu + \bar{u}'\bar{u}]$$

$$= E(u'B'Bu) - E(u'B'\bar{u}) - E(\bar{u}'Bu) + E(\bar{u}'\bar{u}) = \sigma^2(N-K) - \sigma^2 - \sigma^2 + \sigma^2$$

$$= \sigma^2(N-K-1)$$

となる。したがって残差分散の不偏推定量は(15)と同一である。$\hat{\beta}_{)0(}$ の推定誤

<10>　ジョンストン〔２〕113ページ。

差分散も

(16)′ $\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_{)0(}} = \dfrac{(e'e)}{N-K-1}(x'x)^{-1}$

の主対角要素で与えられる。(16)(16)′の対比から明らかなように，左辺における $\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}}$ から $\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_{)0(}}$ への添字の変更は右辺における X の x への変更を伴うにすぎない。

こうしてプリミティブな方法によろうと簡便法によろうと同一の推定結果が得られることが確認された。云うまでもなく，実際計算ではこの簡便法が使われる。そのことは，構造推定結果の提示において定数パラメータ $\hat{\beta}_0$ の推定標準誤差<11>を明示しないのが普通であり，それはわざと明示しないのではなく(16)′による限り直接算出されないからである，ということからも想像にかたくないだろう。

さらに，簡便法による場合，最後の重要なパラメータとしての重相関係数（ないし決定係数）の算出がより容易である。なぜなら，

(25) $\hat{y} = x\hat{\beta}_{)0(}$

とすれば，決定係数 R^2 は

(26) $R^2 = \dfrac{(y'\hat{y})^2}{(y'y)(\hat{y}'\hat{y})}$

で計算されるからである。ところで

(27) $(\hat{y}'\hat{y}) = (y'\hat{y})$

である。なぜなら，(9)′(25)から

$\hat{y}' = \hat{\beta}_{)0(}{}'x' = y'x(x'x)^{-1}x'$

であり，したがって

$(\hat{y}'\hat{y}) = y'x(x'x)^{-1}x'\hat{y} = y'x(x'x)^{-1}x'x\hat{\beta}_{)0(} = y'x\hat{\beta}_{)0(} = y'\hat{y}$

したがって

(28) $R^2 = \dfrac{(\hat{y}'\hat{y})}{(y'y)}$

<11> (16)の第1対角要素の平方根に等しい。

となる。

Ⅲ　計　算　方　法

最小2乗推定の計算手順は普通かような簡便法の 原理にもとづいて編成されている。一般原理から明らかなように，計算にあたって最もドミナントな役割を演じるのは $x'x$ という行列である。これは，それを構成する x の要素が標本平均からの偏差として計られているから，「中心積率行列」とよばれるものであることは周知の通りだが，<12> かような 行列に対 してまず「前方解法」を，ついで「後方解法」をシステマチックに適用して，その逆行列 $(x'x)^{-1}$ および回帰パラメータの推定値を同時に算出する，というのが通常の方法である。<13>

しかるにフリードマン・フート法というのは，計算原理は通常の方法と共有（簡便法）しながら，計算の実際においては $(x'x)$ でなく説明変数のみならず被説明変数をも含めて変数全体の中心積率行列を構成し，それを演算にあたって終始活用するという点にいちじるしい特徴が見うけられるのである。通常の方法とフリードマン・フート法との差異一般はこの積率行列の利用の仕方の差異を中軸として派生してくるということを 以下で観察するのであるが，当面の目的はフリードマン・フート法であるから，その要約と論理的根拠を与えるかたわらそれからの偏差として通常の 方法の特徴を簡単に見ていくことにしよう。

1）中心積率行列表の作成

ステップ1：必要なデータを表(1)の形に整理する。ここにS行には各変数の標本値合計（列和）を，また CS_1 列には各行和を，それぞれ記入する。

<12>　これに対して $(X'X)$ は云うまでもなく原点積率行列である。
<13>　対称行列の逆行列計算に関するドウーリトル法が体系的に利用されるので通常の方法を「ドウーリトル法」とよぶこともある。クライン〔3〕，182ページ。

表(1)：データ表

変数＼標本番号	X_0 X_1 ………X_K	CS_1
1 ⋮ N	X_{10} X_{11} ………X_{1K} ⋮ X_{N0} X_{N1} ………X_{NK}	ΣX_1 ⋮ ΣX_N
S	ΣX_0 ΣX_1 ………ΣX_K	$\Sigma\Sigma$

CS_1 列とはいわゆるチェック・サム列で，積率行列計算において検算に利用されるものである。表における変数排列は被説明変数Y（作表上の都合により $Y=X_0$ と再定義している）を最初に，ついで説明変数は経済理論ないし経験に照らして重要とみなされるものから順序だてて並べられる。計算の結果，とり上げるにたりないことが判明する可能性の強い変数ほど右方に位置するから，実際そうなった場合に除去するのに好都合だからである。

ステップ２：（２—１）表(1)の最下行をそのまま表(2)の第１行①に転記する。

（２—２）表(1)におけるデータ行列の列ベクトルとしての X_0 と X_0 との内積，X_0 と X_1 との内積，…，X_0 と X_K との内積，X_0 と CS_1 列との内積を求めて行②に記入する。②の X_K までの要素和が②の CS_2 列要素に一致す

表(2)　積率行列計算表

ステップ	演算内容	行番号	X_0 X_1 ………… X_K (変数(列記号))	CS_2
2—1	表(1)から転記	①	ΣX_0，ΣX_1 ………… ΣX_K	$\Sigma\Sigma$
2—2	$\Sigma X_{t0}X_{ti}$ (i=0, 1……K, CS1)	②	$X'_0 X_0$，$X'_0 X_1$ ………… $X'_0 X_K$	$X'_0 CS_1$
2—3	N②	③	$NX'_0 X_0$，$NX'_0 X_1$ ………… $NX'_0 X_K$	$NX'_0 CS_1$
2—4	$(\Sigma X_0)(\Sigma X_i)$	④	$(\Sigma X_0)(\Sigma X_0)$，$(\Sigma X_0)(\Sigma X_1)\cdots(\Sigma X_0)(\Sigma X_K)$	$(\Sigma X_0)(\Sigma\Sigma)$
2—5	③—④	⑤	M_{00} M_{01} ………… M_{0K}	M_{0CS}
2—6	$\Sigma X_{t1}X_{ti}$ (i=1, ……K, CS1)	⑥	$X'_1 X_1$ ………… $X'_1 X_K$	$X'_1 CS_1$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

るかどうかをチェックする。

（２—３）②のＮ倍を求めて③に記入し，チエックする。

（２—４）②の内積 X'_0X_i を構成するベクトル X_0，X_i の要素和 $\sum X_0$，$\sum X_i$ を①から抽出し，掛け合わせて行④の X_i 列要素として記入し，チェックする。

（２—５）③から④を引いて差ベクトルを求め，結果を⑤に記入して，チェックする。

（２—６）表(1)におけるデータ行列の列ベクトルとしての X_1 と X_1 との内積，X_1 と X_2 との内積………。

……………

こうして積率行列を機械的に求めて行くわけであるが，２，３の註釈を加えよう。第１に，手順は（２—２）～（２—５）でワン・セットになっていることに注意しよう。実際，（２—２）～（２—５）では X_0 が主役を演じるが，（２—６）～（２—９）ではこの X_0 の役割を X_1 がすっかり代演するのである。ただ（２—６）以降では X_0 列に関する演算を行なう必要がない。たとえば表(2)⑥の X_0 列の要素は②の X_1 列の要素と同一であるから計算する必要がないのである。（２—７）～（２—９）でも（２—３）～（２—５）の X_1 列要素として算出ずみであるから同様である。こうしてセットが下るにつれて計算の手間も変数１個分ずつ減少して行くのである。かくて最終的に求めらる積率行列は，当然，対称である。

第２に，かような手順セットが中心積率行列を１行ずつ求めるためのものであることを示そう。実際，中心積率を m_{ij} とすれば

(29)　$$m_{ij}=\sum_t x_{ti}x_{tj}=\sum_t(X_{ti}-\overline{X}_i)(X_{tj}-\overline{X}_j)=\sum_t(X_{ti}X_{tj})-N\overline{X}_i\overline{X}_j$$
$$=\sum_t(X_{ti}X_{tj})-\frac{(\sum_t X_{ti})(\sum_t X_{tj})}{N}\qquad(i,\ j=0,\ 1,\ \cdots\cdots K)$$

となり，したがって

(30)　$$M_{ij}=N\,m_{ij}=N\sum_t(X_{ti}X_{tj})-(\sum X_{ti})(\sum X_{tj}),\quad(i,\ j=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ K)$$

を得るが，表(2)で求められるのはかような M_{ij} であることに注目すべきである。

第３に，こうして積率を m_{ij} としてではなく M_{ij} で算出しているのは，計算誤差の累積をできるだけ小さくするため割算を回避しなければならないからである。<14>

第４に，（２－２）で指示されたような方針で検算ができるのは，明らかに，各行へのオペレーションが行ごとに同一の１次変換だけから成ることによるのである。<15>

第５に，表(2)から対称積率行列を抽出すれば，

$$(31)\quad M=\begin{pmatrix} M_{00} & M_{01} & \cdots & M_{0K} \\ M_{01} & M_{11} & \cdots & M_{1K} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ M_{0K} & M_{1K} & \cdots & M_{KK} \end{pmatrix}=N\begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & \cdots & m_{0K} \\ m_{01} & m_{11} & \cdots & m_{1K} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ m_{0K} & m_{1K} & \cdots & m_{KK} \end{pmatrix}$$

となるが，その対角要素は非負である。なぜなら，(29)にたちかえれば

$$(32)\quad M_{ii}=Nm_{ii}=\sum_{t}(X_{ti}-\overline{X}_i)^2\geqq 0$$

第６に，かような中心積率行列の計算は通常の方法とフリードマン・フート法とのいかんを問わず必要である。なぜなら，通常の方法は簡便法の直接的実用化にほかならず，<16> 簡便法では(9)′から明らかなように回帰係数の推定

<14> 川勝〔１〕212ページ。

<15> 川勝〔１〕211―２ページ。

<16> 通常の方法の計算表は表(3)から◎行を除去し，CS_3 列の要素を x_0 列（もはや M_{00} が含まれていないことに注意）で代置したものである。当然，それに対応して単位行列も K 次に縮約され，検算列としては CS_4 だけが残ることになる。したがってこの表には初めに

$$\begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1K} & \cdots & M_{KK} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ (イ) \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ (ロ) \\ \\ \end{pmatrix}$$

が書きこまれており，(ロ)の内容が x_0 列の $\begin{pmatrix} M_{01} \\ \vdots \\ M_{0K} \end{pmatrix}$，N次の $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\cdots\cdots\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ と変る

表(3)　積率逆行列およびパラメータ計算表

ステップ	演算内容	行番号 \ 変数(列記号)	x_0	x_1	x_2	・・・	x_K	CS_3	E_0	E_1	・・・	E_K	CS_4
3—1	表(2)からの転記	⓪	M_{00}	M_{01}	M_{02}	・・・	M_{0K}	M_{0CS2}	1	0	・・・	0	1
		①	M_{01}	M_{11}	M_{12}	・・・	M_{1K}	M_{1CS2}	0	1	・・・	0	1
		②	M_{02}	M_{12}	M_{22}	・・・	M_{1K}	M_{2CS2}	0	0	・・・	0	1
		・	・	・	・	・	・	・	・	・	・	・	
		Ⓚ	M_{0K}	M_{1K}	M_{2K}	・・・	M_{KK}	M_{KCS2}	0	0	・・・	1	1
3—2	⓪の転記	⓪′	M_{00}	M_{01}	M_{02}	・・・	M_{0K}	M_{0CS2}	1	0	・・・	0	1
3—3	$\frac{⓪'}{⓪'\text{行}x^0\text{列要素}}$	⓪″	1	M_{01}/M_{00}	M_{02}/M_{00}	・・・	M_{0K}/M_{00}	M_{0CS2}/M_{00}	$1/M_{00}$	0	・・・	0	$1/M_{00}$
3—4	①—⓪′×(⓪″行x_1列要素)	①′	$0\left(=M_{01}-\frac{M_{01}}{M_{00}}M_{00}\right)$,	$M_{11}-\frac{M_{01}}{M_{00}}M_{01}$,	$M_{12}-\frac{M_{01}}{M_{00}}M_{02}$,	・・・,	$M_{1K}-\frac{M_{01}}{M_{00}}M_{0K}$	$M_{1CS2}-\frac{M_{01}}{M_{00}}M_{0CS2}$	$-\frac{M_{01}}{M_{00}}$	1	・・・	0	$1-\frac{M_{01}}{M_{00}}$
3—5	$\frac{①'}{①'\text{行}x_1\text{列要素}}$	①″	0	1	$\frac{M_{12}-\frac{M_{01}}{M_{00}}M_{02}}{M_{11}-\frac{M_{01}}{M_{00}}M_{01}}$,	・・・,	$\frac{M_{1K}-\frac{M_{01}}{M_{00}}M_{0K}}{M_{11}-\frac{M_{01}}{M_{00}}M_{01}}$	・	・	・	・・・	・	・
・	・	・	・	・	・	・・・	・	・	・	・	・・・	・	・
・	$\frac{Ⓚ'}{Ⓚ'\text{行}x_K\text{列要素}}$	Ⓚ″	0	0	0	・・・	1	・	D_{0K}	D_{1K}	・・・	D_{KK}	・

			パラメータ					CS_6	積率逆行列（ステップ4）				CS_5
5—1	$\hat{\beta}_i=-D_{0i}/D_{00}$	1	-1	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	・・・	$\hat{\beta}_K$	・	D_{00}	D_{01}	・・・	D_{0K}	・
5—2	$D_{00}\,D_{ii}$	2	$(D_{00})^2$	$D_{00}D_{11}$	$D_{00}D_{12}$	・・・	$D_{00}D_{KK}$	・	D_{01}	D_{11}	・・・	D_{1K}	・
5—3	$(D_{0i})^2$	3	$(D_{00})^2$	$(D_{01})^2$	$(D_{02})^2$	・・・	$(D_{0K})^2$	・	・	・	・	・	・
5—4	(行2)—(行3)	4	・	・	・	・・・	・	・	D_{0K}	D_{1K}	・・・	D_{KK}	・
5—5	$\frac{(\text{行}4)}{(N-K-1)D_{00}^2}$	5	・	・	・	・・・	・	・					
5—6	$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}=\sqrt{(\text{行}5)}$	6	・	・	・	・・・	・	・					

値計算に $x'y$ が必要であるが，それはMのM_{00}を除いた第０列または第０行の 1/N 倍で与えられるからである。

２）積率行列に対する基本演算——前方解法

ステップ３：（３－１）表(3)を作って，その上段左方にステップ２で計算ずみの M, CS_2 を,[17] そしてその右に（K＋１）次単位行列とこの単位行列のみに関する行和列とを，記入し，チェックする。

（３—２）行◎を行◎′に転記する。

（３—３）行◎′の $1/M_{00}$ 倍を行◎″に記入し，CS_3, CS_4 を使ってチェックする。

（３—４）◎′に◎″の x_1 列要素（M_{01}/M_{00}）を掛けて得た行ベクトルを①から引いて結果する差ベクトルを①′に記入し，チェックする。

（３—５）①′を①′行 x_1列要素（$M_{11}-\frac{M_{01}}{M_{00}}M_{01}$）で割って①″に記入し，チ

につれて(イ)で求まる解ベクトルが $\hat{\beta}_{)0($, $\begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1K} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{1K} & \cdots & M_{KK} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1K} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{1K} & \cdots & d_{KK} \end{pmatrix}$

の第１列…第K列と変る構成をとっている。したがってたとえば(ロ)に $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ が入っているときには前方解段階で

$$\begin{cases} 1\cdot d_{11}+a_{12}d_{12}+\cdots+a_{1K}d_{1K}=a_1 \\ \qquad 1\cdot d_{12}+\cdots+a_{2K}d_{1K}=a_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad 1\cdot d_{1,K-1}+a_{K-1,K}\,d_{1K}=a_{K-1} \\ \qquad\qquad\qquad 1\cdot d_{1K}=a_K \end{cases}$$

が得られたことになり，d_{1K} は最下式で与えられているから，これを今度は逆に下から２番目の式に代入して　$d_{1,K-1}=a_{K-1}-a_{K-1,K}$　として決定するというように　$d_{1K}\to d_{1,K-1}\to d_{1,K-2}\to\cdots\to d_{11}$　と逐次下から決定して行く方法であり，後方解段階でも前方解段階での Q′P′M 要素の利用が必要である。むすびの議論を参照。

<17>　Mの行構成に対応した要素をCS_2 から抽出して構成したもの。

ェックする。

（３—６）②から次の２つのベクトルを引く：

i）⓪′×⓪″行x_2列要素（M_{02}/M_{00}）

ii）①′×①″行x_2列要素〔$(M_{12}-\frac{M_{01}}{M_{00}}M_{02})/(M_{11}-\frac{M_{01}}{M_{00}}M_{01})$〕

こうして得た差ベクトルを②′に記入し，チェックする。

（３—７）②′を②′行x_2列要素で割り，……。

・・・・・・・・・

以上で積率逆行列計算の前方解法手順は終る。計算手順が錯綜するのは◯′行の導出であるが，一般に，行ⓙ′はⓙ—⓪′×(⓪″行x_j列要素）—①′×（①″行x_j列要素）—…—($\overline{j-1}$)′×（($\overline{j-1}$)″行x_j列要素）で算出され，かようにして得たⓙ′行はⓙ′行x_j列の要素より左方の要素がすべてゼロとなるが，その理由は要するにそうなるための基本演算の行列をMに左方から掛け合わせているためである。

このことに関連する問題として，逆行列計算に入るまえに，これまでの段階で得られた個々の計算結果がこれから問題にする逆行列計算といかなる意味において関連しあうかということについて考察しておかねばならない。

まず，Mの逆行列を

(33) $$D=\begin{pmatrix} D_{00} & D_{01} & \cdots & D_{0K} \\ D_{01} & D_{11} & \cdots & D_{1K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{0K} & D_{1K} & \cdots & D_{KK} \end{pmatrix}$$

とすれば，定義によって

(34) $$MD=I_{(K+1)}$$

である。しかるにMは（K+１）次の実対称行列であるから，ある基本演算の行列Pによって，周知のように

$$(35)\quad P'MP=\begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{pmatrix}$$

とすることができる。[<18>] したがってＱを(35)の右辺の対角要素の逆数を要素とする対角行列とすれば，すなわち

$$Q=\begin{pmatrix} 1/* & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1/* \end{pmatrix}$$

とすれば，

$$(36)\quad P'MPQ=I_{(K+1)}$$

となる。したがって

$$(37)\quad P'M=(PQ)^{-1}$$

他方，(34)から

$$(38)\quad P'MD=P'$$

(37)(38)から，したがって

$$(39)\quad D=PQP'=PQ'P'=D'$$

(39)は積率逆行列を積率行列に対する基本演算行列で表示した関係式であって重要である。

他方，表(3)の中段においてステップ３の手順により求められた行列を行について〇′と〇″とに分離して構成される行列

$$(40)\quad \begin{array}{c|cccc|c|cccc|} & x_0 & \cdots & \cdots & x_K & \cdots & E & \cdots & \cdots & E_K \\ \hline ◎' & M_{00} & \cdots & \cdots & \cdots & & 1 & & & 0 \\ ①' & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ \vdots & 0 & & & \vdots & & \vdots & & & \ddots \\ Ⓚ' & & & & \cdot & & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ \hline \end{array}$$

<18>　ジョンストン〔２〕96ページ。

$$
(41)\quad
\begin{array}{c}
\\ ⓪' \\ ①'' \\ \vdots \\ Ⓚ''
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_0 & \cdots & & & x_K \end{array} \\
\left|\begin{array}{ccccc}
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & 1 & & & \cdot \\
 & & \ddots & & \cdot \\
 & 0 & & \ddots & \cdot \\
 & & & & 1
\end{array}\right|
\end{array}
\cdots\cdots
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} E_0 & \cdots & & & E_K \end{array} \\
\left|\begin{array}{ccccc}
1/M_{00} & & & & \\
\cdot & \cdot & & & 0 \\
\cdot & & \cdot & & \\
\cdot & & & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right|
\end{array}
$$

を観察すれば明らかなように，(40)は(38)の係数部分——左方にP′M，右方にP′——を記入したものであり，Mに左方から基本演算行列 P の転置行列を掛けたにすぎないから，Mの行に関する基本演算だけを行なったことになり，したがってMは上３角行列に変換され，右辺には行に関する基本演算行列そのものが現れている。

他方，(41)は

(42)　$Q'P'MD=Q'P'$

の係数部分——左方に Q′P′M，右に Q′P′——が記入されたものであり，(38)または(40)に Q′ という行に関する基本演算を追加したものにほかならない。

したがって求めようとする積率逆行列は(39)より(40)の右ブロックにある行列 P′ の転置 P と(41)の右ブロックにある行列 Q′P′ との積に等しいということが予想されるのである。これだけの論理的背景を整えれば次のステップの持つ意味が容易に理解されよう。

３）積率逆行列の計算——下方解法

ステップ４：ステップ３の計算結果の右方ブロックを(40)の右方部分（P′）と(41)の右方部分（Q′P′）とに分離して考えて，P′ の E_i 列と Q′P′ の E_j 列との内積を作り，表(3)の積率逆行列ブロックの（i, j）要素として記入する（i, j=0，1……K）。その際，CS_4 列をも含めて同様な計算をし，積率逆行列ブロックの CS_5 列に記入し，チェックする。

ステップ４において P′ の E_i 列は P の第 i 行にほかならないから，これと Q′P′ の E_j 列との内積（i, j=0，1……，K）を求めるのは PQ′P′ を計算することになり，(39)によって積率逆行列を算出することに帰着する。かように逆

行列を⑽⑾の右方ブロック，すなわちステップ３の計算結果の単位行列部分のみを使って計算できるという単純明解さは通常の方法に見られないフリードマン・フート法の主要メリットの１つと云えるだろう。周知のように通常の方法では逆行列の計算にステップ３の計算結果全体つまり表(3)の中段の数値結果を用いなければならないのである。<19>

４）パラメータ推定計算――後方解法

簡便法による場合，回帰パラメータが(9)'で推定されることはⅡで見たごとくである。(9)'での $(x'x)^{-1}$ という逆行列は定義によって

$$(43)\quad (x'x)^{-1}=N\begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1K} & \cdots & M_{KK} \end{pmatrix}^{-1}$$

である。これを使って(9)' を表わせば

$$(44)\quad \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1K} & \cdots & M_{KK} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} M_{01} \\ \vdots \\ M_{0K} \end{pmatrix}$$

しかるにフリードマン・フート法ではMの小行列としての $(x'x)$ の逆行列を使うのではなくM全体の逆行列としての㉝の D の第１行を以下の手順（５―１）のように用いて㊹と同値の係数推定値を得ようというわけである。なぜそうなるのかを明らかにしておく必要があろう。

いま㉛におけるMの要素 M_{ij} の余因子を A_{ij} とすれば，㊹は

$$(45)\quad \hat{\beta}_i = -\frac{A_{0i}}{A_{00}} \qquad (i=1\cdots\cdots K)$$

となる。<20> しかるに

$$(46)\quad \frac{A_{0i}}{A_{00}} = \frac{A_{0i}}{|M|} \Big/ \frac{A_{00}}{|M|} \qquad (i=1\cdots\cdots K)$$

<19>　註<16>を参照。
<20>　宮沢〔５〕65ページ。

である。他方，(33)におけるＤをかような余因子を用いて表現すれば，

$$(47)\quad D=\frac{1}{|M|}\begin{pmatrix} A_{00} & A_{01}\cdots & A_{0K} \\ A_{01} & A_{11}\cdots & A_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{0K} & A_{1K}\cdots & A_{KK} \end{pmatrix}$$

となる。したがって

$$(48)\quad \frac{A_{0i}}{|M|}=D_{0i}\qquad (i=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ K)$$

である。したがって(46)(45)は

$$(49)\quad \frac{A_{0i}}{A_{00}}=\frac{D_{0i}}{D_{00}}\qquad (i=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ K)$$

$$(50)\quad \hat{\beta}_i=-\frac{D_{0i}}{D_{00}}\qquad (i=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ K)$$

となって，(44)の解と（５―１）における計算結果との一致が証明された。

ステップ５：（５―１）積率逆行列の第１行をその１行 E_0 列要素 (D_{00}) で割り，符号を逆転させたものを表(3)の左下のパラメータ・ブロックの第１行に回帰係数の推定値ベクトルとして記入し，チェックする。

かように単純な演算によりすべての回帰係数の推定値が整然と一挙に算出されるというのがフリードマン・フート法の第２のメリットである。

（５―２）$D_{00}\,D_{jj}$ を算出して表(3)のパラメータ・ブロックの第２行に記入し，チェックする $(j=0,\ \cdots\cdots,\ K)$。

（５―３）$(D_{0j})_2$ を計算して同上ブロックの第３行に記入し，チェックする $(j=0\cdots\cdots K)$ 。

（５―４）（５―２）で求めた第２行から（５―３）で得た第３行を引いて結果を第４行に記入し，チェックする。

（５―５）（５―４）で求めた第４行を $\dfrac{1}{(N-K-1)D_{00}^2}$ 倍し，結果を第５行に記入し，チェックする。

（５―６）（５―５）で求めた第５行の要素を開平し，結果を第６行に記

入してチェックする。

以上（５—２）～（５—６）の一連の手順は回帰係数の標準誤差を求める段階にあたる。すなわち（５—５）までにおいて

$$(51)\quad \hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_j}=\frac{D_{00}D_{jj}-D_{0j}^2}{(N-K-1)D_{00}^2}\qquad (j=1,\ \cdots\cdots,\ K)$$

が算出されるのであるが，これと他方，原理的に，(16)′の対角要素として計算されるものとが同値であるかどうかが問題となる。ここでも(16)′の対角要素を余因子表示することにしよう。まず，（e′e）が

$$(52)\quad e'e=\frac{|M|}{N A_{00}}$$

と表現できることは容易に証明される<21>。つぎに（$x'x$）$^{-1}$の対角要素をMの余因子で表現しなければならない。逆行列の定理によって，それは

$$(53)\quad (x'x)^{-1}=\frac{N}{A_{00}}\begin{pmatrix} A_{00\cdot 11} & \cdot & \cdot & A_{00\cdot 1K} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ A_{00\cdot 1K} & \cdot & \cdot & A_{00\cdot KK} \end{pmatrix}$$

である。ただしここに$A_{00\cdot ij}$はA_{00}の（i, j）要素の余因子である。

つぎに(53)の右辺の余因子行列の対角要素に注目すれば，$A_{00\cdot jj}$はMの０行０列およびｊ行ｊ列を除去してできる小行列式であるから，ヤコービの定理によって<22>

$$(54)\quad \begin{vmatrix} A_{00} & A_{0j} \\ A_{0j} & A_{jj} \end{vmatrix}=A_{00\cdot jj}\,|M|,\quad (j=1\cdots\cdots K)$$

が成りたつ。したがって

$$(55)\quad A_{00\cdot jj}=\frac{A_{00}A_{jj}-A_{0j}^2}{|M|}\qquad (i=1\cdots\cdots K)$$

したがって(52)(53)(55)を使えば，(16)′の対角要素は

$$(56)\quad \hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_j}=\frac{1}{N-K-1}\left(\frac{|M|}{A_{00}^2}\ \frac{A_{00}A_{jj}-A_{0j}^2}{|M|}\right),\qquad (j=1\cdots\cdots K)$$

<21>　宮沢〔５〕65—６ページ。
<22>　古屋〔６〕124ページ。

となるが，(56)の右辺の（　）は

$$(\quad) = \frac{|M|^2}{A_{00}^2}\left(\frac{A_{00}}{|M|}\frac{A_{jj}}{|M|} - \left(\frac{A_{0j}}{|M|}\right)^2\right) = \frac{D_{00}D_{jj} - D_{0j}^2}{D_{00}^2}$$

となるから，(56)と(51)との同値性が証明されたことになる。

以上で計算表を使って行なう計算は終了するが，その他のパラメータについては，まず決定係数 R^2 の計算は

(57)　$$R^2 = \frac{D_{00}M_{00} - 1}{D_{00}M_{00}}$$

によるとされる。他方，R^2 の原理式(26)は，Mの余因子を使えば

(58)　$$R^2 = 1 - \frac{|M|}{M_{00}A_{00}}$$

となることを確認できるが，<23>　$A_{00}/|M| = D_{00}$　であるから，(57)の正しさがたちどころに立証される。

最後に，残差の不偏推定値は

(59)　$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{N(N-K-1)D_{00}}$$

によって算出されることになっているが，これも，原理式(15)に(52)を代入してみれば，正当なものであることが直ちに明らかになるのである。<24>

Ⅳ　む　す　び

計算手順の最適編成を意味する計算計画は「有効な計量経済学的研究を行うにあたって最も重要な段階の一つである。<25>」本稿においてわれわれは最小２乗推定計算のフリードマン・フート法に論理的肉付を与えるという主要テーマをとり扱うプロセスを通じて，この方法がいかに合理的に手順構成された優れたものであるかを間接的に提示してきたのである。おわりに，通常の方法との対比においてその特徴を要約しておこう。

イ）積率行列の利用について：通常の方法でも初めはMとして構成される

<23>　宮沢〔5〕68ページ。
<24>　偏相関係数も表(3)で数値決定されるが，重要でないので省略した。
<25>　クライン〔3〕172ページ。

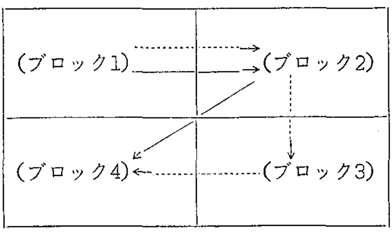
が，のちの積率逆行列・パラメータの計算段階にいたるとMの第１行（M_{00}……M_{0K}）を除いて利用される。他方フリードマン・フート法においては初めに構成されたMが終始くずれず利用される。

ロ）計算段階の編成：通常の方法では前方解・後方解の２段階であるが，フリードマン・フート法にあっては前方解・下方解・後方解の３段階構成がみごとな分業体制をつくり出している。

ハ）積率逆行列・パラメータの求まり方：通常の方法では前方解段階で両者とも１部分が求まり，残りは後方解法によって求められる。つまり両者が前方解・後方解のいずれの段階でも１部分ずつ混合して導出される。これに対してフリードマン・フート法は前方解段階では両者決定の準備を完全にととのえるにすぎず，この準備にもとづいて，まず，積率逆行列が下方解法のもとにスムースに求まり，つぎにこれを利用して後方解段階でパラメータが求められる。したがって逆行列計算段階（下方解法）とパラメータ計算段階（後方解法）とがきびしく純粋分離され，すっきりした形で解が結果する。[26]

ニ）Q′P′M部分（前方解段階で得られる）の後段での利用：通常の方法にあっては後方解法で代入法を用いる関係で利用せざるを得ないが，フリード

<26>



ここで「下法解法」とは筆者が分類の都合上独断でつけた仮称であることをことわっておかねばならない。計算シートの模型を使って説明すれば，通常の方法では実線で示したように（ブロック１）から（ブロック２）を計算するプロセスを前方解，（ブロック２）から（ブロック４）を算出する段階を後方解とよび，（ブロック３）は空白のまま使用されないことになっている。これに対してフリードマン・フート法にあっては点線で示したように（ブロック１）から（ブロック２）を計算するプロセスは通常の方法と同様であるが，（ブロック２）から（ブロック４）に至るプロセスが，いったん（ブロック３）へ降下してそこから（ブロック４）に到達することになっている。こうして（ブロック２）から（ブロック３）への降下段階を下方解の段階と名づけて（ブロック３）から（ブロック４）への後方解段階と区別した次第である。

マン・フート法では逆行列を基本演算行列の積で求めるから下方解法においてさえ利用の要がない。

ホ）求められるパラメータの種類：通常の方法では回帰係数のみが数値決定されるが，フリードマン・フート法ではそれのみならず回帰係数の標準誤差も得られる。

へ）検算システム：通常の方法では1個しか CS 列がないが，フリードマン・フート法においては積率行列部分と単位行列部分と2個あるので，計算ミスの発見と修正が容易である。

主要参考文献

〔1〕 川勝昭平，計量経済学入門，昭37。
〔2〕 J・ジョンストン著・竹内啓訳，計量経済学の方法，昭39。
〔3〕 L・クライン著・宮沢光一他訳，計量経済学，1958。
〔4〕 柴山幸治，計量経済学，1962。
〔5〕 宮沢光一，近代数理統計学通論，昭29。
〔6〕 古屋茂，行列と行列式（増補版），昭34。