《論　説》

マクロ経済計画と予測利用

―― Johansen の所説によせて ――

藤　本　利　躬

Ⅰ　問題の所在

一般に，マクロ経済計画（macroeconomic planning）とは短期ないし長期にわたる経済の――特定部分ではなく――全体の展開を政策当局が合目的的に設計・制御することを意味するが，ここでは考察対象を西欧諸国における中央政府の経済計画（central economic planning）に限定する。周知のように，このタイプの計画問題をとり扱うための分析装置としてのモデル，すなわち非ソビエト型計画モデル（non-Soviet planning model）のパイオニアは Frisch-Tinbergen モデルである。[(1)] それは類型としてはいわゆる計量経済モデルであり，その構造型を線型近似すれば，一般に，

（1）$M_y y + M_z z + M_x x + M_u u = o$

とすることができる。ここに，y は目標変数のベクトルないし集合（政策目標で，中央当局はこれがとる数値のいかんによって経済状態の良し悪しを判断する）であり，内生変数の一部をなす。z は局外変数のベクトルまたは集合（目標以外の内生変数で，それらがいかなる数値をとることになろうとも当局の関心の局外にあるが，モデル構成には欠かせない変数），x は政策手段のベクトルないし集合（内生変数を変化させる原因としての外生変数のうち中央当局が操作・裁量可能ないわゆる量的政策用具で，税率や政府支出な

（1）Ames ＆ Neuberger〔1〕p.195。

どの財政政策手段，公定歩合などの金融政策手段，等)，u は与件のベクトルまたは集合（政策手段以外の外生変数で，輸出入品の国際価格や気象条件など）である。M_y，M_z，M_x，M_u はそれぞれ y，z，x，u にかかる構造パラメータの行列として，各々，適当な行数と列数を持たねばならないが，特に y と z は合併して全内生変数を構成するから，行列 (M_y, M_z) は正則でなければならない。

（1）の誘導型を，

（2）$y = Rx + S$

（3）$z = rx + s$

とする。[(2)] ここで S，s はいわば誘導型与件である。（2）（3）は政策 x と与件（S，s）の内生変数（y，z）に対する因果効果を明示する関係式であるが，定義によって中央当局がその政策効果についてもっぱら関心を示すのは目標変数 y であり，z は当局にとって関心の局外にあるから，政策効果分析のためであれ政策策定用としてであれ，政策モデルは（2）だけで必要充分ということになる。

さて，経済構造，すなわち（1）の構造パラメータの集合 (M_y, M_z, M_x, M_u) が安定しており，しかもそれらについて完全知識があり，さらに与件 u の数値も完全にわかっているのであれば，（2）の R，S も確定するから，先決しているはずの，政策当局が最適と判断する目標，

（4）$y = y^*$

を用いて，Tinbergen〔12〕の固定目標アプローチにより，目標数＝手段数の場合には最適政策を，

（2）$\begin{pmatrix} R \\ r \end{pmatrix} = -(M_y, M_z)^{-1} M_x$，$\begin{pmatrix} S \\ s \end{pmatrix} = -(M_y, M_z)^{-1} M_u u$。

(5) $x^{*}=\mathrm{R}^{-1}(y^{*}-\mathrm{S})$

と求めることができる。また〔目標数＞手段数〕のケースでは手段数に等しい目標を任意に選んで $y_{(1)}$ を構成し，残りの目標ベクトルを $y_{(2)}$ とし，これに応じて R，S を適当に分割すれば，(2) は，

(6) $y_{(1)}=\mathrm{R}_{(1)}x+\mathrm{S}_{(1)}$

(7) $y_{(2)}=\mathrm{R}_{(2)}x+\mathrm{S}_{(2)}$

となるが，(6) から得られる，

(8) $x=\mathrm{R}_{(1)}^{-1}(y_{(1)}-\mathrm{S}_{(1)})$

を (7) に代入して x を消去すれば，$y_{(1)}$，$y_{(2)}$ の trade-off 関係式

(9) $y_{(2)}-\mathrm{R}_{(2)}\mathrm{R}_{(1)}^{-1}y_{(1)}=\mathrm{S}_{(2)}-\mathrm{R}_{(2)}\mathrm{R}_{(1)}^{-1}\mathrm{S}_{(1)}$

を求めることができることも明らかである。

しかし，実際には各種の不確実性の存在のためにパラメータや与件についての完全知識が期待すべくもないことは無論であり，いったんこの現実を認めるやいなやたちまち問題が山積してくる。問題の重要性を如実に例示するものとしてはニュー・エコノミクスの自由裁量政策の立場と Friedman の無干渉・自動化ルールのそれとの間のホットな論争をあげることができよう。[(3)] すなわち，ビルト・イン・スタビライザーの消極的経済安定化機能にあきたらず財政政策・金融政策のポリシー・ミックスを用いて積極的安定化の持続をはかるニュー・エコノミックスの自由裁量方式は予測技術の進歩をうながしたとはいえ，多少とも実際とくいちがうはずの予測に基づいた政策手段の操作はそれ相応に正しくないために外生的撹乱の上に人為的撹乱を重ね，

(3) この点については渡部〔13〕が簡にして要を得ている。

安定を求めて不安定を増幅することにでもなれば，これに過ぎたる愚策はないといわねばなるまい。むしろ政策当局の自由裁量余地を縮小し，「一定率で貨幣供給を増加させて行く」という Friedman の金融政策至上主義的政策提言が鋭く対立するゆえんである。ポリシー・ミックス理論の原型が Frisch-Tinbergen の定量的政策モデル，わけても Tinbergen の固定目標アプローチである限り，後者にとっても不確実性に基づく予測と実際とのギャップの問題は決定的に重要であるといわねばならない。ところで，この問題に対しては2種類のアプローチを考えることができる。一つは，もちろん，予測技術の進歩による予測そのものの改善であるが，完全予測の達成は永遠のテーマというべきであろう。したがって第2のアプローチとして考えられるのは多かれ少なかれ不完全でしかあり得ない予測をいかにうまく利用し，もって政策モデルを有効ならしめるかという問題設定から始めることである。すなわち，ベストな予測ではなく予測のベストな利用法が問題なのであり，不確実性が与件u，したがってSだけに生じる場合について政策モデルにおける予測へのこのような観点からのアプローチを Johansen〔6〕〔7〕が試みているのであるが，〔6〕では多目標・多手段の一般ケースを〔予測の期待値＝実績の期待値〕という特殊仮定に立脚してとり扱っているのに対して，〔7〕においては逆に単一目標・単一手段という特殊ケースを両期待値が一致しないという一般的仮定のもとで分析している。本稿は，〔予測の期待値≠実績の期待値〕であると同時に目標・手段も多数ある最も一般的なケースにおけるSの予測の最適利用の問題について Johansen の議論を再構成することを目的とする。

II　原予測と補正予測

構造パラメータと与件について完全知識があれば，最適目標が（4）で与えられているとき，最適経済政策は最も合理的には Theil のモデルを用いて，[4] すなわち（2）を制約条件として，

$$(10)\quad W=(y-y^*)'(y-y^*)$$ [5]

を最小化するという最小2乗問題を解くことによって策定可能である。その解は，

$$(11)\quad x^*=(R'R)^{-1}R'(y^*-S)$$

で与えられる。

しかし，政策策定の対象期間は多少とも将来に属しているから，種々の不確実性が伴うが，とりわけSは，定義により，その変動を経済内生的に説明しえない純外生変数であるから，これを確率変数とみなさざるを得ない。Johansen アプローチの特徴は，S の予測 $\overline{S}$ でさえ確率変数であると仮定することにある。$\overline{S}$ は単なる勘とか運とかによるものからもっと多少とも精巧な正規の統計学的方法によるものまで様々であるが，ある将来期についての予測 $\overline{S}$ がどの方法によりいかなる数値として算出されるかということになると $\overline{S}$ を一種の確率現象とみなさざるをえないのであって，Johansen はこのよ

（4）Theil〔10〕。Spivey & Tamura〔9〕でもよい。

（5）A′ は行列ないしベクトル A の転置を意味する。なお，W は一種のロス関数である。また Johansen は (10) の代りに $(y-y^*)'W(y-y^*)$ を用いているが，ここでは W を単位行列とする。W は対角行列であり，その第 i 対角要素は 第 i 目標の非達成度 $y_i-y_i^*$ に対する社会的評価係数である。W をいかに決定するかは社会的厚生関数の問題である。ここでは平等評価を仮定し，W = 単位行列，とするのである。

うな確率変数としての予測を原予測 (raw forecast) とよぶ。[6] 統計分析における原資料の役割を原予測が果たすのである。S と $\overline{S}$ とがこのように確率変数であるから，確率的に共変動することになる。つまり S と $\overline{S}$ とは2変量同時分布をし，予測の信頼度はこの分布の特性値を用いて表わされる。明らかに S と $\overline{S}$ との相関係数が大きいほど予測は良好である。

S と $\overline{S}$ とが分離し，ともに確率変数化するからには，上記のような Theil アプローチで事態を処理しきれないことは明らかである。まず (2) により y は確率変数 S に依存するから同じく確率変数である。その y に (11) を通じて依存する W もまた確率変数である。したがって政策策定問題は W の最小化ではなしにその期待値を最小化する stochastic programming の問題とみなされねばならない。次に，予測 $\overline{S}$ が不確実であることがわかっているのであるから，(11) の S に $\overline{S}$ を代入して最適政策を求めるわけにはいかない。換言すれば，確定した S が不明である以上，(11) による政策策定は不可能であるが，さりとて S の代理としての $\overline{S}$ を無視することもできない。というのは人間にとって利用可能なのは $\overline{S}$ だけだからである。そこで，折衷策として，

$$(12)\quad x = \mathrm{K}\overline{\mathrm{S}} + \mathrm{K}_o$$

という形式で x を $\overline{S}$ に依存させて決定する方式が考えられるのである。

問題は (12) における K_o, K をいかに決定するかということである。Johansen の戦略は，(12) を (2) に代入することによって得られる

$$(13)\quad y = \mathrm{RK}\overline{\mathrm{S}} + \mathrm{RK}_o + \mathrm{S}$$

を制約条件にして W の期待値,

$$(14)\quad \mathrm{E}(\mathrm{W}) = \mathrm{E}(y - y^*)'(y - y^*)$$

(6) Johansen〔7〕p. 340を参照。

を最小にするようにK_o，Kを決定するということにある。

(14) は期待値演算を含むから，その最小化には格別の配慮が必要である。まず，

(15) $y - y^* = \eta$

とおこう。η_iをベクトルηの第i成分，その期待値を$E(\eta_i)$とすれば，その分散$\mathrm{var}(\eta_i)$は定義により，

(16) $\mathrm{var}(\eta_i) = E(\eta_i - E(\eta_i))^2 = E(\eta_i^2) - (E(\eta_i))^2$

であるから，(14) は，

(17) $E(W) = E(\eta'\eta) = \Sigma_i(E(\eta_i^2)) = \Sigma_i(\mathrm{var}(\eta_i) + (E(\eta_i))^2)$

となる。他方，(13) (15) から，

(18) $\eta = RK\overline{S} + RK_o + S - y^*$

(19) $E(\eta) = RKE(\overline{S}) + RK_o + E(S) - y^*$

となる。したがって，

(20) $$\begin{aligned}\Sigma(E(\eta_i))^2 = E(\eta)'E(\eta) &= E(\overline{S})'K'R'RKE(\overline{S}) \\ &+ 2K_o'R'RKE(\overline{S}) + 2E(S)'RKE(\overline{S}) \\ &- 2y^{*\prime}RKE(\overline{S}) + K_o'R'RK_o + 2E(S)'RK_o \\ &- 2y^{*\prime}RK_o + E(S)'E(S) - 2E(S)'y^* \\ &+ y^{*\prime}y^*\end{aligned}$$

(21) $\eta - E(\eta) = RK(\overline{S} - E(\overline{S})) + (S - E(S))$

が得られる。さらに，分散の定義と (21) から，

$$
\begin{aligned}
(22)\quad \Sigma_i \mathrm{var}(\eta_i) &= [\mathrm{RK}(\overline{\mathrm{S}}-\mathrm{E}(\overline{\mathrm{S}}))+(\mathrm{S}-\mathrm{E}(\mathrm{S}))]'\times \\
&\quad [\mathrm{RK}(\overline{\mathrm{S}}\ \mathrm{EE}(\overline{\mathrm{S}}))+(\mathrm{S}-\mathrm{E}(\mathrm{S}))] \\
&= (\overline{\mathrm{S}}-\mathrm{E}(\overline{\mathrm{S}}))'\mathrm{K}'\mathrm{R}'\mathrm{RK}(\overline{\mathrm{S}}-\mathrm{E}(\overline{\mathrm{S}})) \\
&\quad + 2(\mathrm{S}-\mathrm{E}(\mathrm{S}))'\mathrm{RK}(\overline{\mathrm{S}}-\mathrm{E}(\overline{\mathrm{S}})) \\
&\quad + (\mathrm{S}-\mathrm{E}(\mathrm{S}))'(\mathrm{S}-\mathrm{E}(\mathrm{S}))
\end{aligned}
$$

以上により，(13) を制約とする (14) の条件付最小化問題は (20) (22) を代入した (17) の無条件最小化問題となる。

ここで以下の展開に必要なベクトルないし行列の微分に関する公式をいくつか提示しておこう。[7] まず 2 次形式 $x'\mathrm{A}x$ について，

$$(イ)\quad \frac{\partial(x'\mathrm{A}x)}{\partial x} = (\mathrm{A}+\mathrm{A}')x$$

である。つぎに双 1 次形式 $y'\mathrm{B}z$ について，

$$(ロ)\quad \frac{\partial(y'\mathrm{B}z)}{\partial y} = \mathrm{B}z$$

$$(ハ)\quad \frac{\partial(y'\mathrm{B}z)}{\partial z} = \mathrm{B}'y$$

$$(ニ)\quad \frac{\partial(y'\mathrm{B}z)}{\partial \mathrm{B}} = yz'$$

さらに，B の (i, j) 要素を b_{ij} とすれば，$z'\mathrm{B}'y$ の b_{ij} に関する偏導関数は $z_j y_i$ となるが，これを要素とする行列は zy' の転置行列となっているから，

$$(ホ)\quad \frac{\partial(z'\mathrm{B}'y)}{\partial \mathrm{B}} = \left(\frac{\partial(z'\mathrm{B}'y)}{\partial \mathrm{B}'}\right)$$

を得る。

---

(7) (イ) (ロ) (ハ) (ニ) は Theil [11] pp. 31～32による。なお，この部分の記号は本論と無関係である。

つぎに，分散・共分散ならびにそれらの行列を，

(23) $\partial_{ij} = E(\overline{S}_i - E(\overline{S}_i))(S_j - E(S_j))$

(24) $\partial_{\bar{i}\bar{j}} = E(\overline{S}_j - E(\overline{S}_j))(\overline{S}_j - E(\overline{S}_j))$

(25) $\Sigma_{\_} = \partial_{\bar{i}j}$ の行列

(26) $\Sigma_{\_\_} = {}_{\bar{i}\bar{j}}$ の行列

と定義しておくのが便利である。これらはすべて分布パラメータであるから，以下のK，K_0による微分演算では定数として処理することができるのである。

さて，(17) の最小条件は次のようにして導くことができる。[8] まず (20) をKについて偏微分する。項別に行えば，(ロ)～(ホ) を用いて，

$$\frac{\partial[E(\overline{S})'K'R'RKE(\overline{S})]}{\partial K} = \frac{\partial[E(\overline{S})'K'\langle R'RKE(\overline{S})\rangle]}{\partial K} + \frac{\partial[\langle R'RKE(\overline{S})\rangle KE(\overline{S})]}{\partial K}{}^{(9)}$$

｛この右辺第1項は，(ホ) (ニ) を適用すれば，

$$\left(\frac{\partial[E(\overline{S})'K'\ R'RKE(\overline{S})]}{\partial K'}\right)' = [E(\overline{S})(R'RKE(\overline{S}))']'$$
$$= R'RKE(\overline{S})E(\overline{S})' \text{となるから｝}$$
$$= 2R'RKE(\overline{S})E(\overline{S})',$$

$$\frac{\partial[K_0'R'RKE(\overline{S})]}{\partial K} = R'RK_0E(\overline{S})'$$

$$\frac{\partial[E(S)'RKE(\overline{S})]}{\partial K} = R'E(S)E(\overline{S})'$$

$$\frac{\partial[y^{*\prime}RKE(\overline{S})]}{\partial K} = R'y^*E(\overline{S})'$$

---

(8) 肝要なところで行列演算を用いないために Johansen〔6〕の分析は錯綜している (p. 9，p. 19)。行列演算によりこの分析論議を明解ならしめることが本稿のねらいである。

(9) 〈 〉内を定数ベクトルとみなして微分する。

であり，他は０となるから，結局（20）のＫに関する偏導関数は，

$$(27)\quad \frac{\partial(E(\eta))^2}{\partial K}=2(R'RKE(\overline{S})E(\overline{S})'+R'RK_0E(\overline{S})'+R'E(S)E(\overline{S})' -R'y^*E(\overline{S})')$$

つぎに（22）をＫについて同様に項別偏微分し，定義（23）～（26）を用いれば，

$$(28)\quad \frac{\partial\Sigma_i var(\eta_i)}{\partial K}=2\left[R'RK(\overline{S}-E(\overline{S}))(\overline{S}-E(\overline{S}))'+R'(S-E(S))(\overline{S}-E(\overline{S}))'\right]=2(R'RK\Sigma_{..}+R'\Sigma_{.})$$

となる。かくして（17）の最小条件の一半は，$\partial E(W)/\partial K=0$ に（27）（28）を適用して，

$$(29)\quad R'RK\Sigma_{..}+R'\Sigma_{.}+R'RKE(\overline{S})E(\overline{S})'+R'RK_0E(\overline{S})' +R'E(S)E(\overline{S})'=R'y^*E(\overline{S})'$$

となる。

（17）の最小条件の他の一半も同様にして導くことができる。まず（20）を K_0 で偏微分すれば，

$$\frac{\partial[K_0R'RKE(\overline{S})]}{\partial K_0}=R'RKE(\overline{S})\qquad ((\text{ロ})\text{による})$$

$$\frac{\partial(K_0'R'RK_0)}{\partial K_0}=2R'RK_0\qquad ((\text{イ})\text{による})$$

$$\frac{\partial[E(S)'RK_0]}{\partial K_0}=R'E(S)\qquad ((\text{ハ})\text{による})$$

$$\frac{\partial(y^{*\prime}RK_0)}{\partial K_0}=R'y^*\qquad ((\text{ハ})\text{による})$$

で，他はすべて０となるから，

$$(30)\quad \frac{\partial[E(\eta)]^2}{\partial K_0}=2(R'RKE(\overline{S})+R'RK_0+R'E(S)-R'y^*)$$

他方，(20) は K_o を全く含まない。したがって求める残りの最小条件は，(30) $=0$，すなわち，

$$(31)\quad R'RKE(\overline{S})+R'RK_o+R'E(S)=R'y^*$$

となる。

(29) (31) を連立させれば (13) を制約として (14) を最小ならしめる K，K_o を求めるためのシステムが得られる。(31) の両辺に $E(\overline{S})'$ を右乗して (29) の両辺から差し引けば，

$$(32)\quad R'RK\Sigma_{--}+R'\Sigma_{-}=0$$

を得る。R'R は正方行列である。一般性を損うことなく R'R を正則行列とし[10]また Σ_{--} も正則と仮定することができる。かくして (32) から，

$$(33)\quad K=-(R'R)^{-1}R'\Sigma_{-}(\Sigma_{--})^{-1}$$

(33) を (31) に代入すれば，

$$(34)\quad K_o=(R'R)^{-1}R'(y^*+\Sigma_{-}(\Sigma_{--})^{-1}E(\overline{S})-E(S))$$

となることがわかる。このようにして決定される K_o，K を (12) に代入すれば，

$$x=(R'R)^{-1}R'\{y^*-[E(S)+\Sigma_{-}(\Sigma_{--})^{-1}(\overline{S}-E(\overline{S}))]\}$$

となるが，とくに〔　〕内を $\widetilde{S}$ とおけば，すなわち，

$$(35)\quad \widetilde{S}=E(S)+\Sigma_{-}(\Sigma_{--})^{-1}(\overline{S}-E(\overline{S}))$$

---

(10) R が行独立ないし列独立でない場合のとり扱いについては Johansen〔6〕pp. 16～17を参照。

とすれば，x は次のようになる。

(36) $x=(R'R)^{-1}R'(y^*-\widetilde{S})$

換言すれば，与件Sの確率化によるストカスチックな政策モデルではSを（35）によって $\widetilde{S}$ と予測し，この $\widetilde{S}$ を用いて（36）により政策手段を策定すれば，それが最適政策である。

以上の方法の意味を探る手掛りとして，まず（36）と（11）との類似性に注目すべきである。すなわち，与件の厳密予測が可能な場合の最適政策値を与える（11）は，予測に不確実性を導入するとき，(36）となって全く同型を保持し，差異は（11）の予測＝実現値Sが予測方式（35）による予測値としての（36）の $\widetilde{S}$ に置きかえられるだけである。この類似性は，（11）が（2）を制約とする（10）の条件付最小問題の最適条件であることに着目して，

(37) $y=Rx+\widetilde{S}$

を制約とする（10）の期待値（14）ではなく（10）そのものを最小にする x を求める問題の考察を思いつかせるのである。これは，(37）を（10）に代入して，

$$(38)\quad W=y'y=(Rx+\widetilde{S}-y^*)'(Rx+\widetilde{S}-y^*)=x'R'Rx$$
$$+\widetilde{S}'\widetilde{S}+y^{*\prime}y^*+2x'R'\widetilde{S}-2x'R'y^*-2\widetilde{S}'y^*$$

の x に関する無条件最小問題となるから，その1階条件を求めれば，

$$\frac{\partial W}{\partial x}=2R'Rx+2R'\widetilde{S}-2R'y^*=0$$

これを x について解けば果して（36）を得る。このことは，(13）を制約として K，K_0 に関して W の期待値（14）を最小化するストカスチックな2次計画問題は(35)(37）を制約として x に関して（10）を最小化するノンストカスチ

ックな２次計画問題と同値であることを意味している。つまり，政策策定に当って与件Ｓに不確実性が存在する場合でも，当初から与件を（35）を用いて$\tilde{S}$と予測することにきめておけば，もともと不確実性など存在しないかのように（37）を制約としてＷを直接的に最小化することが可能であること，したがって周知の Theil の確実同値命題 (certainty equivalence) がここでも成立するのである。[11] 原予測$\overline{S}$に対して$\tilde{S}$は補正予測 (corrected forecast) とよばれる。[12]

以上を要するに，与件Ｓについて不確実性が存在する場合でも，確実同値性のおかげで，最適政策は次のように２段階に分割・策定することができるのである，すなわち，

段階１：予測方式（35）によって$\tilde{S}$を計算する。もちろん，実際への適用にあたってはデータは過去（観測期間）における与件の実績値と公表された原予測値しかないのだから，期待値，分散，共分散とも標本統計値をあてるほかない。

段階２：段階１で求めた$\tilde{S}$を（36）に代入して最適政策値を策定する。

Ⅲ　補正予測方式の諸特徴

Ⅱで再構成した Johansen の予測利用モデルをさらに掘りさげて分析してみれば，さまざまの隠された意味が明らかになる。第一に，補正予測方式（35）は，実は，Ｓの$\overline{S}$への回帰方程式にほかならない。すなわち，Ｃ，ｄを（偏）回帰係数の行列，定数項のベクトルとし，ｅを残差ベクトルとすれば，

(39)　$S = d + C\overline{S} + e$

(11) Theil〔10〕pp. 56～59。

(12) Johansen〔７〕p. 341。

を用いて d, Cを計算するとき,

(40) $\tilde{S}=d+C\overline{S}$

となるのである。これを証明しておこう。

まず,回帰平面の定義によって (39) は $E[\Sigma e_i^2]$を最小ならしめるものでなければならない。[(13)] 分散の定義により,$var(e_i)=E(e_i^2)-(E(e_i))^2$ であるから,

(41) $E(\Sigma e_i^2)=\Sigma[var(e_i)+(E(e_i))^2]$

である。(39) とそれから得られる $E(e)=E(S)-d-CE(\overline{S})$ とから,

$$e-E(e)=(S-E(S))-C(\overline{S}-E(\overline{S}))$$

となるから,分散の定義により,

$$\begin{aligned}(42)\quad \Sigma var(e_i)&=[(S-E(S))-C(\overline{S}-E(\overline{S}))]'\times\\&\quad[(S-E(S))-C(\overline{S}-EE(\overline{S}))]\\&=(S-E(S))'(S-E(S))-2(S-E(S))'\times\\&\quad C(\overline{S}-E(\overline{S}))+(\overline{S}-E(\overline{S}))'C'C(\overline{S}-E(\overline{S}))\end{aligned}$$

となる。他方,

$$\begin{aligned}(43)\quad \Sigma(E(e_i))^2&=[E(S)-d-CE(\overline{S})]'[E(S)-d-CE(\overline{S})]\\&=E(\overline{S})'E(\overline{S})+d'd+E(\overline{S})'C'CE(\overline{S})-2E(S)'d\\&\quad-2E(S)'CE(\overline{S})+2d'CE(\overline{S})\end{aligned}$$

(41) の最小条件は,

$$(44)\quad \frac{\partial[\Sigma var(e_i)]}{\partial C}+\frac{\partial[\Sigma(E(e_i))^2]}{\partial C}=0$$

---

(13) 宮沢〔8〕p. 65。

$$(45)\quad \frac{\partial[\Sigma\,\mathrm{var}(e_i)]}{\partial d}+\frac{\partial[\Sigma(E(e_i))^2]}{\partial d}=0$$

である。（イ）（ロ）（ハ）（ニ）を用いて（42）（43）の偏導関数を求めれば，

$$\frac{\partial[\Sigma\,\mathrm{var}(e_i)]}{\partial C}=2C(\overline{S}-E(\overline{S}))(\overline{S}-E(\overline{S}))'-2(S-E(S))(\overline{S}-E(\overline{S}))'$$
$$=2C\Sigma_{--}-2\Sigma_{-}$$

$$\frac{\partial[\Sigma\,\mathrm{var}(e_i)]}{\partial d}=0$$

$$\frac{\partial[\Sigma(E(e_i))^2]}{\partial C}=2CE(\overline{S})E(\overline{S})'-2E(S)E(\overline{S})'+2dE(\overline{S})'$$

$$\frac{\partial[\Sigma(E(e_i))^2]}{\partial d}=2d-2E(S)+2CE(\overline{S})$$

これらを（44）（45）に代入すると，

$$(46)\quad C\Sigma_{--}-\Sigma_{-}+CE(\overline{S})E(\overline{S})'+dE(\overline{S})'=E(S)E(\overline{S})'$$

$$(47)\quad CE(\overline{S})+d=E(S)$$

（47）の両辺に $E(\overline{S})'$ を右乗して（46）に代入すると，

$$C\Sigma_{--}-\Sigma_{-}=0$$

となるから結局，

$$(48)\quad C=\Sigma_{-}(\Sigma_{--})^{-1}$$

を得る。（48）を（47）に代入すれば，

$$(49)\quad d=E(S)-\Sigma_{-}(\Sigma_{--})^{-1}E(\overline{S})$$

（48）（49）を（40）に代入すれば，（35）そのものが得られることが判明するのである。

以上の分析結果について注意すべき最重要論点は，Johansen にあっては原予測に実績値を回帰させるのであって，その逆ではないということである。予測の通念からすれば，この逆，すなわち原予測を，いったん実績値に回帰させて修正し，最終予測とする方式がむしろノーマルと受けとられることだろう。しかし，これは事態のなり行きを因果の過程として客観的にただ観察し分析することを目的とする理論モデルの立場からの見方であり，[14] たとえばこの種のモデルの一例としての政策シミュレーション・モデルでは，与件の予測が実現値と異なるとき，政策効果の分析・確定に多少とも困難が伴うであろう。そこでは予測が実績にいかに近いかという基準のみにもとづく予測の精度としての「予測と実績との関係」しか問題にならない。[15] これに反して事態のなり行きを合理的に設計しようとする政策策定モデルでは，与件の予測に関しても，多かれ少なかれ存在する予測と実績とのギャップは当然のこととして前提し，あたかも実績を予測に依存させうるかのような予測利用法が問題となるのである。象徴的にいえば，理論モデルでは政策手段が既知数，目標変数が未知数であるが，政策策定モデルにおいてはこの関係が逆転し，政策が未知数，目標が既知数となることに呼応するかのように，前者では予測を実績に回帰させて予測を実績に接近させるのが常道であるのに対して後者では逆に実績を予測に回帰させて実績を予測に近づける観のある補正予測方式が用いられるわけである。

予測方式（35）の第二の特徴は（35）の期待値をとることによって明らかとなる。すなわち，

$$(50)\quad E(\widetilde{S}) = E(S)$$

個々の原予測 $\overline{S}$ については $E(\overline{S}) \neq E(S)$ であっても，$\overline{S}$ を素材に作成され

(14) 藤本〔3〕p. 49。
(15) Johansen〔6〕p. 12。

る補正予測 $\widetilde{\mathrm{S}}$ は $\mathrm{E}(\mathrm{S})$ の不偏推定量となるというわけである。

第三に，分散の定義と（35）（50）から，

$$(51)\quad \mathrm{var}(\widetilde{\mathrm{S}}) = \mathrm{E}(\widetilde{\mathrm{S}}-\mathrm{E}(\widetilde{\mathrm{S}}))(\widetilde{\mathrm{S}}-\mathrm{E}(\widetilde{\mathrm{S}}))'$$

$$= \mathrm{E}\,[\Sigma_{-}(\Sigma_{--})^{-1}(\overline{\mathrm{S}}-\mathrm{E}(\overline{\mathrm{S}}))]\,[\Sigma_{-}(\Sigma_{--})^{-1}(\overline{\mathrm{S}}-\mathrm{E}(\overline{\mathrm{S}}))]'$$

$$= \Sigma_{-}(\Sigma_{--})^{-1}\Sigma_{-}'$$

となる。ここで（23）（24）と同様に，

$$(52)\quad \sigma_{ij} = \mathrm{E}\,[(\mathrm{S}_i-\mathrm{E}(\mathrm{S}_i))(\mathrm{S}_j-\mathrm{E}(\mathrm{S}_j))]$$

を定義し，さらに，

$$(53)\quad \rho_{i\bar{j}} = \frac{\sigma_{i\bar{j}}}{\sqrt{\sigma_{ii}}\ \sqrt{\sigma_{\bar{j}\bar{j}}}}$$

$$(54)\quad \mathrm{P}_{-} = \rho_{i\bar{j}}\text{ の行列}$$

とする。$\rho_{i\bar{j}}$ は S_i と $\overline{\mathrm{S}}_j$ の相関係数である。そのとき，

$$(55)\quad \begin{cases} \mathrm{D}(\sqrt{\sigma}\,) = \text{第}i\text{ 対角要素が }\sqrt{\sigma_{ii}}\text{ の対角行列} \\ \mathrm{D}(\sqrt{\sigma^{-}}) = \text{第}i\text{ 対角要素が }\sqrt{\sigma_{\bar{i}\bar{i}}}\text{ の対角行列} \end{cases}$$

とすれば，（53）から，

$$(56)\quad \Sigma_{-} = \mathrm{D}(\sqrt{\sigma}\,)\,\mathrm{P}_{-}\,\mathrm{D}(\sqrt{\sigma^{--}})$$

となることがわかる。同様にして，

$$(57)\quad \rho_{\bar{i}\bar{j}} = \frac{\sigma_{\bar{i}\bar{j}}}{\sqrt{\sigma_{\bar{i}\bar{i}}}\ \sqrt{\sigma_{\bar{j}\bar{j}}}}$$

$$(58)\quad \mathrm{P}_{--} = \rho_{\bar{i}\bar{j}}\text{ の行列}$$ [16]

$$(59)\quad \Sigma_{--} = \mathrm{D}(\sqrt{\sigma^{--}})\,\mathrm{P}_{--}\,\mathrm{D}(\sqrt{\sigma^{--}})$$

---

(16) 対角要素は当然１である。

とすることができる。(56)(59)から(51)は,

$$(60)\quad \mathrm{var}(\widetilde{S}) = D(\sqrt{\sigma})P_{-}D(\sqrt{\sigma_{--}})D\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_{--}}}\right)P_{--}^{-1}D\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_{--}}}\right)\times$$

$$D(\sqrt{\sigma_{--}})P_{-}'D(\sqrt{\sigma}) = D(\sqrt{\sigma})P_{-}P_{--}^{-1}P_{-}'D\sqrt{\sigma}$$

となる。ここで,

(61) 個々の与件の原予測$\widetilde{S}_i$はその実現値S_iとだけ相関し,他の外生変数の実現値S_jとは完全に独立である,

という妥当な仮定をおけば,S_jとだけ相関する$\widetilde{S}_j$とも$\widetilde{S}_i$は独立であることが自動的に結論されるから,P_{-} は対角行列,P_{--}は単位行列となる。このとき,(60) は,

$$(62)\quad \mathrm{var}(\widetilde{S}_i) = (\rho_{\tilde{i}i})^2\mathrm{var}(S_i)$$

となる。すなわち原予測と実績との完全相関の場合には,補正予測の分散は実績の分散に一致するが,さもなければ前者 $\mathrm{var}(\widetilde{S})$ は後者 $\mathrm{var}(S_i)$ より小さいことになる。予測と実現結果との比較論議において予測の変動が現実の観測値の変動よりも小さい傾向のあることが指摘され,それは予測家の相像力の不足や思い切りのなさなどによるとされることがあるが,[17] 上記の分析は意思決定に用いられる予測に関する限りそうなるのは論理的必然であることを明示している。

(17) Johansen〔7〕p. 346。

Ⅳ　Tinbergen モデルと補正予測

補正予測の特性をさらに発見するために，以上の分析を，政策手段数と目標数とが等しく，

(63)　R = 正則行列

であるような特殊ケースに適用してみよう。これは云うまでもなく Tinbergen ケースである。(33) (34) (36) は，いまや，

(64)　$K = -R^{-1}\Sigma_{\cdot}(\Sigma_{\cdot\cdot})^{-1}$

(65)　$K_0 = R^{-1}(y^* + \Sigma_{\cdot}(\Sigma_{\cdot\cdot})^{-1}E(\tilde{S}) - E(S))$

(66)　$x = R^{-1}(y^* - \tilde{S})$

となる。最適政策の分散行列は (66) とその期待値との差，$x - E(x) = -R^{-1}(\tilde{S} - E(\tilde{S}))$，を用いて，

(67)　$\mathrm{var}(x) = E[(x - E(x))(x - E(x))'] = R^{-1}\mathrm{var}(\tilde{S})(R^{-1})'$

と表現できることがわかる。妥当な仮定 (61) のもとでは $\mathrm{var}(\tilde{S})$ は (62) を対角要素とする対角行列であるから，(67) は，

(68)　$\mathrm{var}(x_i) = (\rho_{\tilde{i}i})^2 \Sigma (R^{-1})^2_{ij}\mathrm{var}(S_j)$

を対角要素とする対角行列となる。ただし，ここに $(R^{-1})_{ij}$ は R^{-1} の (i, j) 要素である。$\rho_{\tilde{i}i}$ は予測の信頼度を表わすから，(68) は予測の信頼度が低いほど手段に関する意志決定の変更も小さくなることを示すわけである。

つぎに，(2) に (66) を代入すれば，

(69)　$y = y^* + S - \tilde{S}$

この期待値をとり，(50) を考慮すれば，

(70) $\mathrm{E}(y)=y^*$

(69), (70) から，(50) も考慮して，

$$y-\mathrm{E}(y)=\mathrm{S}-\widetilde{\mathrm{S}}=(\mathrm{S}-\mathrm{E}(\mathrm{S}))-(\widetilde{\mathrm{S}}-\mathrm{E}(\widetilde{\mathrm{S}}))$$

したがって y の分散行列は，

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(y)&=\mathrm{E}[(y-\mathrm{E}(y))(y-\mathrm{E}(y))']\\&=\mathrm{E}[(\mathrm{S}-\mathrm{E}(\mathrm{S}))(\mathrm{S}-\mathrm{E}(\mathrm{S}))']+\mathrm{E}[(\widetilde{\mathrm{S}}-\mathrm{E}(\widetilde{\mathrm{S}}))(\widetilde{\mathrm{S}}-\mathrm{E}(\widetilde{\mathrm{S}}))']\\&\quad-2\,\mathrm{E}[(\mathrm{S}-\mathrm{E}(\mathrm{S}))(\widetilde{\mathrm{S}}-\mathrm{E}(\widetilde{\mathrm{S}}))']\end{aligned}$$

しかるに (35) と (50) から，

$$\widetilde{\mathrm{S}}-\mathrm{E}(\widetilde{\mathrm{S}})=\Sigma_{-}(\Sigma_{--})^{-1}(\overline{\mathrm{S}}-\mathrm{E}(\overline{\mathrm{S}}))$$

であるから，(25) を考慮すれば，

(71) $$\begin{aligned}\mathrm{E}[(\mathrm{S}-\mathrm{E}(\mathrm{S}))(\widetilde{\mathrm{S}}-\mathrm{E}(\widetilde{\mathrm{S}}))']&=\mathrm{E}[(\mathrm{S}-\mathrm{E}(\mathrm{S}))(\overline{\mathrm{S}}-\mathrm{E}(\overline{\mathrm{S}}))'(\Sigma_{--})^{-1}(\Sigma_{-})']\\&=\Sigma_{-}(\Sigma_{--})^{-1}\Sigma_{-}'\end{aligned}$$

これは (51) から S と $\widetilde{\mathrm{S}}$ の共分散行列が $\widetilde{\mathrm{S}}$ の分散行列に一致することを示す。(25) (26) と同様に (52) に対して，

(72) $\Sigma=\sigma_{ij}$ の行列

を定義すれば，y の分散行列は，結局，

(73) $\mathrm{var}(y)=\Sigma-\Sigma_{-}(\Sigma_{--})^{-1}\Sigma_{-}'$

ここで妥当な仮定 (61) をおけば，$\mathrm{var}(y)$ は (60) から，

(74) $\mathrm{var}(y_i)=(1-\rho_{ii}^{2})\sigma_{ii}$

を対角要素とする対角行列になることが判明する。(70) (14) から，E(W)は y_i の分散和に等しいこともわかるが，そうすると y_i の分散和すなわちWの期待値は，Sの分散 σ_{ii} が小さいほど，また $\bar{\rho}_{ii}$ が大きいほど，つまり原予測の信頼度が高いほど，小さく，したがって望ましいわけである。

V 結　　語

予測を補正方式 (35) によらず，その素材であるE(S)，$\overline{S}$ をいきなり最終予測として用いる場合に結果にいかなる差異が生じるかという問題を，Tinbergen モデルに限定して，考察しておこう。[18]

1) E(S)，つまりSの実現値の平均だけを用いて $\overline{S}$ に含まれる情報を全く利用しない場合，制約式は，

$$(75)\quad y = Rx + E(S)$$

となるが，いまやRは正則だから，最適政策は y を y^* に固定して，

$$(76)\quad x = R^{-1}(y^* - E(S))$$

と策定される。しかし客観的な構造式は (2) のままであるから，(76) を (2) に代入すれば，$y = y^* + (S - E(S))$ を得る。明らかに，ここでも，(70) が成立するから，

$$(77)\quad \mathrm{var}(y) = \Sigma$$

E(W) は Σ のトレースに等しいから，Σ の対角要素を (74) と比較すれば，$\bar{\rho}_{ii} = 0$ の場合を除いて，一般に，Wの期待値は大きくなり，したがって結果は悪化するのである。

---

(18) 1手段・1目標のケースに関する同様の議論については Johansen〔7〕pp. 347～348。

2）原予測 $\overline{S}$ を全く補正せずに用いる場合には，(75)（76）は，

$$(78)\quad y = Rx + \overline{S}$$

$$(79)\quad x = R^{-1}(y^* - \overline{S})$$

となり，両者から $y = y^* + (S - \overline{S})$，したがって，

$$(80)\quad E(y) - y^* = E(S) - E(\overline{S})$$

を得る。このとき，(80) を考慮すると，

$$\begin{aligned} E(W) &= E(y-y^*)'(y-y^*) \\ &= E[(y - E(y)) + (E(y) - y^*)]'[(y - E(y)) + (E(y) - y^*)] \\ &= E[(y - E(y)) + (E(S) - E(\overline{S}))]'[(y - E(y)) + (E(S) - E(\overline{S}))] \\ &= \Sigma\,\mathrm{var}(y_i) + 2E(y - E(y))'(E(S) - E(\overline{S})) + (E(S) - E(\overline{S}))' \times \\ &\quad (E(S) - E(\overline{S})) \end{aligned}$$

となるが，$E(y - E(y))'(E(S) - E(\overline{S})) = 0$ であるから，結局，

$$(81)\quad E(W) = \Sigma\,\mathrm{var}(y_i) + (E(S) - E(\overline{S}))'(E(S) - E(\overline{S}))$$

を得る。これは $E(W)$ が y_i の分散と $\overline{S}$ のバイアスの和になることを意味し，$\overline{S}$ のバイアス分だけ 1）よりも悪化し，結局，結果はこの場合に最悪となることがわかる。

要約しよう。問題は予測を用いるかどうかではない。なんらかの予測は用いざるをえないからである。真の問題は政策策定のために利用可能な予測をいかに用いるかということである。もちろん，予測は信頼度が高いほど望ましいことに変わりはないが，その利用方法もそれに劣らず重要なのである。(19)

---

(19) 実証については Hersoug & Johansen〔5〕を参照。なお，Johansen の分析に関する検討論文としては Granger〔4〕がある。

文　　献

〔1〕Ames, E. and E. Neuberger, "Frisch and Tinbergen on Economic Planning", Journal of Comparative Economics, 1, 1977.

〔2〕Frisch, R., Economic Planning Studies, Reidel, 1976.

〔3〕藤本利躬, 最適経済政策のモデル, 大明堂, 1977。

〔4〕Granger, C. W. J., "On the Properties of Forecasts Used in Optimal Economic Policy Decisions", Journal of Public Economics, 2, 1973.

〔5〕Hersoug, T. and L. Johansen, "Optimal Use of Forecasts in Economic Policy Decisions. An Empirical Test.," Journal of Public Economics, 4, 1975.

〔6〕Johansen, L., "On the Optimal Use of Forecasts in Economic Policy Decisions", Journal of Public Economics, 1, 1972.

〔7〕＿＿＿＿＿, Lectures on Macroeconomic Planning. Pt. 2, North-Holland, 1978.

〔8〕宮沢　光一, 近代数理統計学通論, 共立出版, 1954。

〔9〕Spivey, W. A. and H. Tamura, "Generalized Simultaneous Equation Models", International Economic Review, June 1970.

〔10〕Theil, H., Optimal Decision Rules for Government and Industry, North-Holland, 1964.

〔11〕＿＿＿＿＿, Principles of Econometrics, Wiley, 1971.

〔12〕Tinbergen, J., Economic Policy : Principles and Design, North-Holland, 1959.

〔13〕渡部経彦「自動化された金融政策」(建元正弘・渡部経彦編, 現代の経済学1, 日本経済新聞社, 1970に所収)