

## 回帰分析における誤差分散の スタイン型改良信頼区間の諸性質

永 田 靖

### 1. はじめに

$x_1, x_2, \dots, x_n$  は正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  からのランダムサンプルであり,  $\sigma^2$  の推定に興味があるとしよう。そのとき,  $s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / (n + 1)$  は 2 乗損失関数の下で位置尺度最良共変推定量である。この推定量  $s^2$  を通常の推定量とよぶことにする。しかしながら,  $s^2$  は非許容的である。Stein(1964) は 2 乗損失関数の下で推定量  $\hat{\sigma}_S^2 = \min\{s^2, \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 / (n + 2)\}$  (ただし,  $\mu_0$  は任意の既知の定数) が  $s^2$  をすべての母数の値に関して一様に改良することを示した。この推定量  $\hat{\sigma}_S^2$  をスタイン型推定量とよぶ。Stein がこの興味ある結果を示して以来, 多くの研究がこの分野においてなされてきた (例えば, Brown(1968), Brewster & Zidek(1974), Maatta & Casella(1990), Kubokawa(1994), Shinozaki(1995)などを参照)。

他方, 同様な研究が  $\sigma^2$  の信頼区間に関するもなされてきた (例えば, Cohen(1972), Nagata(1989, 1995, 1996a, c), Shorrock(1990), Maatta & Casella(1990), Goutis & Casella(1991), Ohtani(1993), Kubokawa(1994), Inaba & Nagata(1994)等を参照)。区間推定の場合には  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  のみに依存する信頼区間がよく用いられている。それらは, 最短信頼区間  $I_{ML}$ , 不偏信頼区間  $I_{SU}$ , 等確率信頼区間  $I_{ET}$  の 3 種類に分類され, 通常の信頼区間とよぶことにする。しかし,  $\sigma^2$  は尺度母数だから,  $I_{ML}$  を用いるのはあまり適切では

ない (Nagata(1989)または Brown(1990))。信頼区間  $I_{SU}$  は不偏性の他に次のような望ましい性質を有している：“ $I_{SU}$  は区間の端点の比を最小にするものである。” それゆえ、 $I_{SU}$  を考察の対象とすることが一番適切である。さらに、現実的には、 $I_{ET}$  がほとんどいつも用いられているので、実際的な観点からはこの信頼区間の改良についても考える意味がある。

本稿では、 $\sigma^2$  の通常の信頼区間の改良について考える。滑らかな改良信頼区間も提示されているが、スタイン型改良信頼区間に限定して、著者がこれまでに発表してきた結果を総合的にまとめながら、その諸性質を議論していく。滑らかな改良推定量はベイズ推定量になっており数学的にはよい性質を持っている可能性が高いが、その構成が複雑であること、最大の改良を与えときの母数の値が中途半端な未知のところであるなどという難点がある。それに対して、スタイン型改良推定量は2節で述べるように、予備検定型推定量となっており、実際的によく用いられている手順の形で構成されていて簡便であること、最大の改良を与えるときの母数の値は予備検定の対象となる帰無仮説の下での値である、などという利点がある。

## 2. 線形回帰モデルとスタイン型推定量

次のような線形回帰モデルを考える。

$$y = X\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I) \quad (1)$$

ここで、 $y$  は  $n \times 1$  ベクトル、 $X$  は  $n \times k$  行列でランクは  $k$ 、 $\beta$  は  $k \times 1$  ベクトルで、 $\varepsilon$  は  $n \times 1$  の誤差ベクトルである。本稿での推測の対象は誤差分散  $\sigma^2$  である。 $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ 、 $e = y - X\hat{\beta}$  と表すとき、1節で述べた  $\sigma^2$  の通常の推定量は

$$s_1^2 = \frac{e'e}{n - k + 2} \quad (2)$$

に対応し、これは2乗損失関数の下で $e'e$ の定数倍という形の推定量の中で最良な推定量である。

ここで、 $\beta$ に関する次のような仮説を考えよう。

$$H_0 : R\beta = r \text{ vs } H_1 : R\beta \neq r \quad (3)$$

$R$ は既知の $p \times k$ 行列でそのランクは $p$ であり、 $r$ は既知の $p \times 1$ ベクトルである。この仮説の通常の検定統計量は

$$F = \frac{(R\hat{\beta} - r)'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta} - r)/p}{e'e/(n - k)} \quad (4)$$

である。この検定統計量 $F$ は自由度 $(p, n - k)$ で非心パラメータが $\lambda = (R\beta - r)'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\beta - r)/\sigma^2$ の非心F分布にしたがう。

帰無仮説の下での $\sigma^2$ の制約付き推定量は

$$\sigma^{*2} = \frac{e^*e^*}{n - k + p + 2} \quad (5)$$

である。ただし、 $e^* = y - X\hat{\beta}^*$ 、 $\hat{\beta}^* = \hat{\beta} + (X'X)^{-1}R'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(r - R\hat{\beta})$ である。 $\hat{\beta}^*$ は $\beta$ の制約付き最尤推定量である。

この枠組みの中において、誤差分散 $\sigma^2$ に対するスタイン型推定量は

$$\hat{\sigma}_{S1}^2 = \min\{s_1^2, \sigma^{*2}\} \quad (6)$$

であり、これは1節で述べたスタイン型推定量に対応する。スタイン型推定量 $\hat{\sigma}_{S1}^2$ は式(2)で定義された通常の推定量 $s_1^2$ を2乗損失関数の下で改良する。検定統計量(4)は

$$F = \frac{(e^*e^* - e'e)/p}{e'e/(n - k)} \quad (7)$$

と表現できるから、スタイン型推定量 $\hat{\sigma}_{S1}^2$ は

$$\hat{\sigma}_{S1}^2 = \begin{cases} s_1^2 & \text{if } F \geq (n - k)/(n - k + 2) \\ \sigma^{*2} & \text{if } F < (n - k)/(n - k + 2) \end{cases} \quad (8)$$

と表現することができる。これは線形制約の仮説を予備検定した後に誤差分散を推定する予備検定推定量の一種であると解釈することができる。

本稿では、誤差分散の不偏推定量

$$s_2^2 = \frac{e'e}{n-k} \quad (9)$$

についても考える。これは、James & Stein(1961)によって導入された損失関数

$$L(\delta, \sigma^2) = \delta/\sigma^2 - \log(\delta/\sigma^2) - 1 \quad (10)$$

の下で  $e'e$  の定数倍の形をした推定量のクラスの中で最良である。不偏推定量  $s_2^2$  は、損失関数(10)の下で

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{S_2}^2 &= \min\{s_2^2, e'e^*/(n-k+p)\} \\ &= \begin{cases} s_2^2 & \text{if } F \geq 1 \\ e'e^*/(n-k+p) & \text{if } F < 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

によって改良することができる。式(11)における  $e'e^*/(n-k+p)$  は帰無仮説の下では不偏であり、式(11)の  $\hat{\sigma}_{S_2}^2$  は不偏推定量を成分にもつ予備検定推定量とよばれる。

### 3 スタイン型改良信頼区間

$\sigma^2$  の信頼区間について考えよう。 $e'e$  のみに基づく信頼区間を

$$I_0 = \left( \frac{e'e}{c_2}, \frac{e'e}{c_1} \right) \quad (12)$$

と表す。ここで、 $c_1$  と  $c_2$  ( $c_1 < c_2$ ) は次の条件を満たす適当な定数である (Tate & Klett (1959)) :

$$Pr(\sigma^2 \in I_0) = 1 - \alpha, \quad f_{n-k+2}(c_1) = f_{n-k+2}(c_2) \quad (I_0 = I_{SU} \text{ の場合}) \quad (13)$$

$$Pr(e'e/\sigma^2 \leq c_1) = Pr(e'e/\sigma^2 \geq c_2) = \alpha/2 \quad (I_0 = I_{ET} \text{ の場合}) \quad (14)$$

ただし、 $f_\nu(x)$ は自由度 $\nu$ の $\chi^2$ 分布の確率密度関数であり、 $1-\alpha$ は信頼係数である。

$I_0$ を改良する信頼区間として次の形のもの考える。

$$I_S(a) = \left( \frac{\min\{e'e, e^*e^*/a\}}{c_2}, \frac{\min\{e'e, e^*e^*/a\}}{c_1} \right) \quad (15)$$

そして、定数 $a^*$ を

$$a^* = \frac{(n-k+p)\log(c_2/c_1)}{c_2 - c_1} \quad (16)$$

と定義する。このとき、次の定理が成り立つ。

定理1 (Nagata(1995))  $a^* > 1$ であるなら、すべての $a \in (1, a^*]$ に対して  $Pr(\sigma^2 \in I_S(a)) > Pr(\sigma^2 \in I_0)$ である。さらに、 $Pr(\sigma^2 \in I_S(a))$ は $a \in (1, a^*]$ について狭義な意味で単調増加する。

定理1は $I_S(a)$ が信頼率の意味で $I_0$ を改良することを示している。しかし、区間の大きさを考慮することも大切である。 $|I|$ を区間 $I$ の長さを表すものとする。明らかに、 $a_1 < a_2$ であるなら $|I_S(a_2)| \leq |I_S(a_1)| \leq |I_0|$ となる。このことは $|I_S(a)|$ が区間幅の意味においても $|I_0|$ を改良することを意味している。また、 $|I_S(a)|$ は $a$ が増加するとき小さくなる。しかし、先に述べたように $\sigma^2$ は尺度母数だから、区間幅を持ち出すことはあまり適切ではない。そこで、区間の大きさの測度として区間の端点の比 $\|I\|$ を考えよう。すると、 $a_1 < a_2$ に対して $\|I_S(a_1)\| = \|I_S(a_2)\| = \|I_0\| = c_2/c_1$ が得られる。つまり、 $I_S(a)$ は $I_0$ の端点の比は同じにしたままで、信頼率の意味で $I_0$ を改良する。また、 $I_S(a)$ は線形制約に関する予備検定を伴った信頼区間であると解釈することもできる。

定理1より、 $I_S(a^*)$ は信頼区間のクラス $\{I_S(a); 1 < a \leq a^*\}$ の中で最良であることがわかる。しかし、 $I_S(a^*)$ がこれより大きなクラスの中で何らかの

最適性を有しているかどうかは不明である。そこで、次の表現

$$\min\{e'e, e^*e^*/a^*\} = \begin{cases} e'e & \text{if } F \geq (a^* - 1)(n - k)/p \\ e^*e^*/a^* & \text{if } F < (a^* - 1)(n - k)/p \end{cases} \quad (17)$$

に基づいて、 $(a^* - 1)(n - k)/p$ に対応する有意水準を予備検定におけるセミ・オプティマル・レベルとよぶことにしよう。この点に関連して、点推定に関して次のことを述べておく。 $\sigma^2$ の予備検定推定量

$$\delta(c) = \begin{cases} s_1^2 & \text{if } F \geq c \\ \sigma^{*2} & \text{if } F < c \end{cases} \quad (18)$$

を考え、その推定量のクラスを  $\mathcal{F} = \{\delta(c); 0 \leq c \leq \infty\}$  と表す。式(6)のスタイン型推定量  $\hat{\sigma}_{S1}^2$  はこのクラスに属する推定量である ( $\hat{\sigma}_{S1}^2 = \delta((n - k)/(n - k + 2))$ )。Ohtani(1988)は数値計算によって、スタイン型推定量  $\hat{\sigma}_{S1}^2$  は、通常の推定量  $s_1^2$  よりリスクが小さい式(18)の形をした推定量のクラスの中で最小リスクをもつことを示唆した。その後、Giles(1990)は、 $0 < c \leq (n - k)/(n - k + 2)$  であるなら  $\delta(c)$  は 2乗損失関数の下で  $s_1^2$  を改良し、スタイン型推定量  $\hat{\sigma}_{S1}^2$  はサブクラス  $\{\delta(c); 0 \leq c \leq (n - k)/(n - k + 2)\}$  の中で最良であることを示した。定理 1 は点推定に対するこれらの結果の区間推定版である。なお、点推定においては、 $c > (n - k)/(n - k + 2)$  のとき  $\delta(c)$  と  $\hat{\sigma}_{S1}^2$  のあいだには一方が他方を一様に改良するという関係は存在しない (Nagata(1996b))。

#### 4. スタイン型点推定量とスタイン型信頼区間との関係

##### 4.1 等確率信頼区間 $I_{ET}$ の場合

通常の信頼区間として  $I_0 = I_{ET}$  を考える。このとき、 $I_0$  に含まれる定数  $c_1$  と  $c_2$  は式(14)より定まる。Inaba & Nagata(1994)より

$$\frac{(n - k) \log(c_2/c_1)}{c_2 - c_1} > 1 \quad (19)$$

が成り立ち、これより  $a^* > 1$  が得られる。この不等式を用いることにより

$$\begin{aligned} Pr(\sigma^2 \in I_{ET}) &= Pr\left(\sigma^2 \in \left[\frac{n-k+2}{c_2} s_1^2, \frac{n-k+2}{c_1} s_1^2\right]\right) \\ &< Pr\left(\sigma^2 \in \left[\frac{n-k+2}{c_2} \hat{\sigma}_{S1}^2, \frac{n-k+2}{c_1} \hat{\sigma}_{S1}^2\right]\right) \\ &< Pr\left(\sigma^2 \in \left[\frac{n-k+2}{c_2} \hat{\sigma}_1^{*2}, \frac{n-k+2}{c_1} \hat{\sigma}_1^{*2}\right]\right) \end{aligned} \quad (20)$$

を示すことができる (Nagata(1995))。ただし、

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1^{*2} &= \min \left\{ \frac{e'e}{n-k+2}, \frac{e'e^*}{(n-k+2)a^*} \right\} \\ &= \begin{cases} e'e/(n-k+2) & \text{if } F \geq (a^*-1)(n-k)/p \\ e'e^*/\{(n-k+2)a^*\} & \text{if } F < (a^*-1)(n-k)/p \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

である。つまり、等確率信頼区間を改良するためには、等確率信頼区間に含まれる通常の点推定量  $s_1^2$  をスタイン型点推定量  $\hat{\sigma}_{S1}^2$  で置き換えればよい。しかし、そのような構成は最適ではなく、式(21)の  $\hat{\sigma}_1^{*2}$  を代入することによりさらなる改良が可能である。

同じことは  $s_1^2$  と  $\hat{\sigma}_{S1}^2$  をそれぞれ  $s_2^2$  と  $\hat{\sigma}_{S2}^2$  とで置き換えても成り立つ。

#### 4.2 不偏信頼区間 $I_{SU}$ の場合

$I_0 = I_{SU}$  とする。このとき、 $I_0$  に含まれる定数  $c_1$  と  $c_2$  は式(13)より定まる。式(13)より

$$\frac{(n-k)\log(c_2/c_1)}{c_2 - c_1} = 1 \quad (22)$$

という関係が得られるので、

$$1 < \frac{n-k+p}{n-k} = a^* \quad (23)$$

が成り立つ。 $I_{SU}$  に含まれる  $s_1^2$  に  $\hat{\sigma}_{S1}^2$  を代入すれば4.1節と同じ結論が得られるが、以下ではもう一方の点推定量について考えよう。表現式

$$Pr(\sigma^2 \in I_{SU}) = Pr\left(\sigma^2 \in \left[\frac{n-k}{c_2} s_2^2, \frac{n-k}{c_1} s_2^2\right]\right) \quad (24)$$

において不偏推定量  $s_2^2$  に  $\hat{\sigma}_{S2}^2$  を代入する。すると、定理 1 と式 (23) より

$$\begin{aligned} Pr \left( \sigma^2 \in \left[ \frac{n-k}{c_2} \hat{\sigma}_{S2}^2, \frac{n-k}{c_1} \hat{\sigma}_{S2}^2 \right] \right) &= Pr(\sigma^2 \in I_S(a^*)) \\ &> Pr(\sigma^2 \in I_{SV}) \end{aligned} \quad (25)$$

が得られる (Nagata(1995))。これは、 $s_2^2$  を  $\hat{\sigma}_{S2}^2$  で置き換えることにより  $I_{SV}$  が改良されることを示しており、しかも、 $\hat{\sigma}_{S2}^2$  の構成において含まれている予備検定の有意水準 (臨界値が 1 に対応する) が 3 節で述べた意味でセミ・オプティマル・レベルとなっていることを意味している。これは、不偏推定量の改良と不偏信頼区間の改良との密接な関係を示している。

### 4.3 数値計算

4.1 節と 4.2 節の結果について数値計算をして評価する。そのためには、スタイン型推定量の分布関数が必要となる。 $\min\{e'e/\sigma^2, e'e^*/(b\sigma^2)\}$  の分布関数は次のようになる (Nagata(1995))。

$$\begin{aligned} G(c; b) &\equiv Pr \left( \min \left\{ \frac{e'e}{\sigma^2}, \frac{e'e^*}{b\sigma^2} \right\} \leq c \right) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{K_l'}{B \left( \frac{n-k}{2}, \frac{p}{2} + l \right)} \int_0^{1/b} z^{\frac{n-k}{2}-1} (1-z)^{\frac{p}{2}+l-1} \\ &\quad \times P \left( \frac{n-k+p}{2} + l, \frac{c}{2z} \right) dz \\ &\quad + \sum_{l=0}^{\infty} K_l \left\{ 1 - I_{1/b} \left( \frac{n-k}{2}, \frac{p}{2} + l \right) \right\} P \left( \frac{n-k+p}{2} + l, \frac{bc}{2} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

ここで、

$$K_l = \frac{\exp(-\lambda/2)(\lambda/2)^l}{l!}, \quad (27)$$

であり、 $P(\cdot, \cdot)$  は不完全ガンマ関数である (Abramowitz & Stegun(1972))。

表1 等確率信頼区間の場合  
 $I_S((n-k+p+2)/(n-k+2))$ の信頼率 (上段)  
 $I_S(a^*)$ の信頼率 (下段)  
 ( $I_{ET}$ の信頼率は0.9500,  $p=3$ )

$n-k$	$d$					
	0	0.1	0.3	0.5	1.0	1.5
3	.9657	.9646	.9625	.9606	.9568	.9542
	.9734	.9734	.9731	.9726	.9706	.9679
11	.9601	.9580	.9547	.9526	.9505	.9501
	.9627	.9621	.9593	.9563	.9518	.9504
19	.9570	.9548	.9518	.9506	.9500	.9500
	.9583	.9573	.9538	.9515	.9501	.9500

表2 不偏信頼区間の場合  
 $I_S(a^*)$ の信頼率  
 ( $I_{SV}$ の信頼率は0.9500,  $p=3$ )

$n-k$	$d$					
	0	0.1	0.3	0.5	1.0	1.5
3	.9592	.9592	.9590	.9587	.9575	.9561
11	.9563	.9560	.9543	.9527	.9506	.9501
19	.9543	.9537	.9517	.9506	.9500	.9500

$\lambda = nd$ とにおいて,  $p=3$ ,  $n=4(8)20$ に対する信頼率を正確に求めた結果を表1と表2に示す(より詳しい数値結果についてはNagata(1995)を参照)。表1は等確率信頼区間の場合であり, スタイン型改良推定量 $\hat{\sigma}_{S1}^2$ で単に置き換えた場合(上段)とセミ・オブティマル・レベルの場合(下段)を与えている。表2では, スタイン型推定量 $\hat{\sigma}_{S2}^2$ で置き換えた場合がセミ・オブティマル・レベルの場合になるので上・下段の区別はない。

## 5. Neyman Accuracy

この節では、Neyman Accuracy (Neyman(1937), Ghosh(1975)) について考  
えて、スタイン型信頼区間  $I_S(a^*)$  と不偏信頼区間  $I_{SU}$  を比較する。

信頼区間  $I = (L, U)$  に対して Neyman Accuracy は次の量として定義される：

$$Q(\sigma_0^2; I) = Pr(\sigma_0^2 \in I | \sigma^2) \quad (28)$$

$\sigma_0^2 = \sigma^2$  であるなら、 $Q(\sigma^2; I)$  は  $I$  の信頼率である。4. 2 節で示したように、  
すべての  $\lambda$  と  $\sigma^2$  に対して  $Q(\sigma^2; I_S(a^*)) \geq Q(\sigma^2; I_{SU})$  が成り立つ。 $\sigma_0^2 \neq \sigma^2$  の  
ときには、 $Q(\sigma_0^2; I)$  は真でない値  $\sigma_0^2$  を  $I$  がカバーする確率を表している。し  
たがって、 $\sigma_0^2 \neq \sigma^2$  に対しては  $Q(\sigma_0^2; I)$  の値の小さいほうが望ましい。特に、  
すべての  $\sigma_0^2 \neq \sigma^2$  に対して

$$Q(\sigma_0^2; I) \leq Q(\sigma^2; I) \quad (29)$$

を満たす信頼区間  $I$  を不偏信頼区間とよぶ ( $I_{SU}$  は式(29)を満たす)。

スタイン型信頼区間  $I_S(a^*)$  の Neyman Accuracy  $Q(\sigma_0^2; I_S(a^*))$  は非心パラ  
メータ  $\lambda$  と  $\sigma_0^2$  に依存する。さらに、それは比  $\theta = \sigma_0/\sigma$  を通してのみ  $\sigma_0^2$  の値  
に依存する。このことを明示するために

$$n(\theta, \lambda) = Q(\sigma_0^2; I_S(a^*)) \quad (30)$$

と表現することにしよう。ここで、 $n(\theta, \infty) = Q(\sigma_0^2; I_{SU})$  であることに注意  
する。

$\lambda (\geq 0)$  の値が任意に固定されたとき、すべての  $\theta > 0$  に対して  $n(\theta, \lambda) \leq$   
 $n(1, \lambda)$  となるとき、信頼区間  $I_S(a^*)$  は不偏であると定義する。次の定理は、  
この条件が  $I_S(a^*)$  に対しては満たされないことを示す。

定理 2 (Nagata(1996a)) 適当な  $\theta_0 < 1$  が存在して、 $n(\theta_0, 0) > n(1, 0)$  となる。

定理 2 より、不偏信頼区間  $I_{SV}$  を改良するために不偏推定量を成分にもつ予備検定推定量を用いて構成したスタイン型改良信頼区間  $I_S(a^*)$  は不偏ではないことがわかる。しかし、これは驚くべきことではない。予備検定推定量に関する研究で、不偏推定量を成分としてもつ予備検定推定量が不偏でないことは古くから示されてきた (例えば、推定量(11)は不偏推定量ではない)。定理 2 は、区間推定の枠組みの中での同様な結果の一例に過ぎない。

スタイン型信頼区間  $I_S(a^*)$  の Neyman Accuracy を詳しく調べるため  $n(\theta, \lambda)$  の数値計算をおこなった。この場合も、4 節と同様な計算をおこなえば良い (詳細は Nagata(1996a) を参照)。  $n - k = 15$ ,  $p = 5$  のときの  $n(\theta, \lambda)$  の値を表 3 に示す。  $\lambda$  を固定したとき、値のピークが  $\theta < 1$  の方向にずれていることがわかる。そして、  $\lambda$  の値が大きくなれば、このずれは解消されてくる。

表 3  $n(\theta, \lambda)$  の値 ( $n - k = 15$ ,  $p = 5$ ,  $1 - \alpha = .9500$ )

$\theta$	$\lambda$						
	0	1.0	2.0	4.0	8.0	12.0	$\infty$
1/1.200	.8822	.8697	.8593	.8437	.8273	.8212	.8182
1/1.100	.9517	.9461	.9411	.9330	.9231	.9188	.9163
1/1.050	.9623	.9598	.9572	.9527	.9465	.9436	.9416
1/1.025	.9621	.9608	.9593	.9563	.9519	.9495	.9479
1.000	.9583	.9581	.9575	.9559	.9530	.9513	.9500
1.025	.9512	.9519	.9521	.9517	.9502	.9490	.9480
1.050	.9412	.9428	.9437	.9443	.9438	.9431	.9424
1.100	.9132	.9165	.9186	.9210	.9223	.9223	.9220
1.200	.8260	.8332	.8383	.8445	.8490	.8500	.8502

## 6. Wolfowitz Accuracy

この節では、スタイン型信頼区間  $I_S(a^*)$  の Wolfowitz Accuracy (Wolfowitz (1950), Ghosh(1975)) を考えて、 $I_{SU}$  と比較する。信頼区間  $I = (L, U)$  に対して Wolfowitz Accuracy は次の量として定義される：

$$w(a, b; I) = aE\{[L/\sigma^2 - 1]^2\} + bE\{[U/\sigma^2 - 1]^2\} \quad (31)$$

ただし、 $a$  と  $b$  は既知の正定数である。

$w(a, b; I)$  は信頼区間  $I$  の端点から真の母数の値までの近さを測るメジャーである。信頼区間については信頼率が最も重要であるが、真の母数の区間  $I$  における位置を考慮することも重要である。定数  $a$  と  $b$  は、望ましい位置を定める定数である。 $w(a, b; I)$  の小さな値をもつ信頼区間  $I$  が望ましい。

記号の簡単化のため、 $I_{SU} = (L_{SU}, U_{SU})$ 、 $I_S(a^*) = (L_S^*, U_S^*)$  と表すことにする。スタイン型信頼区間  $I_S(a^*)$  の Wolfowitz Accuracy は  $\lambda$  に依存するので、2つの信頼区間  $I_{SU}$  と  $I_S(a^*)$  の相対的 Accuracy を次のように定義する。

$$\begin{aligned} r(\tau, \lambda) &\equiv \frac{w(a, b; I_S(a^*))}{w(a, b; I_{SU})} \\ &= \frac{E\{[L_S^*/\sigma^2 - 1]^2\} + \tau E\{[U_S^*/\sigma^2 - 1]^2\}}{E\{[L_{SU}/\sigma^2 - 1]^2\} + \tau E\{[U_{SU}/\sigma^2 - 1]^2\}} \end{aligned} \quad (32)$$

ただし、 $\tau = b/a$  である。 $r(\tau, \lambda) < 1$  なら、 $I_S(a^*)$  の方が  $I_{SU}$  よりも Wolfowitz Accuracy の意味で優れている。このことに関して次の定理が成り立つ。

定理 3 (Nagata(1996a)) もし、

$$\tau \geq \frac{c_1^2\{(n-k+p)c_2 - (n-k)(n-k+p+2)\}}{c_2^2\{(n-k)(n-k+p+2) - (n-k+p)c_1\}} \quad (33)$$

が成り立つなら、すべての  $\lambda$  に対して  $r(\tau, \lambda) < 1$  となる。

式(33)の右辺の値を $\tau_0$ とおく。表4や表5からわかるように、 $\tau_0$ の値は小さい。

表4  $r(\tau, \lambda)$ の値 ( $n - k = 5, p = 5, 1 - \alpha = .9500$ )

$\tau$	$\lambda$					
	0	1.0	2.0	4.0	8.0	12.0
0	1.1197	1.0944	1.0742	1.0453	1.0162	1.0054
.001	1.0909	1.0701	1.0537	1.0310	1.0093	1.0022
.005	1.0008	.9941	.9898	.9862	.9878	.9921
.00792(= $\tau_0$ )	.9528	.9536	.9558	.9623	.9764	.9868
.010	.9246	.9299	.9359	.9483	.9696	.9837
.025	.8031	.8274	.8497	.8879	.9407	.9701
.050	.7201	.7575	.7909	.8466	.9209	.9609
.100	.6598	.7066	.7482	.8166	.9065	.9542
1.000	.5875	.6457	.6970	.7807	.8893	.9462
5.000	.5800	.6394	.6916	.7770	.8875	.9453
$\infty$	.5781	.6377	.6903	.7760	.8870	.9451

表5  $r(\tau, \lambda)$ の値 ( $n - k = 15, p = 5, 1 - \alpha = .9500$ )

$\tau$	$\lambda$					
	0	1.0	2.0	4.0	8.0	12.0
0	1.1044	1.0792	1.0598	1.0338	1.0103	1.0030
.010	1.0766	1.0572	1.0425	1.0231	1.0064	1.0016
.030	1.0328	1.0224	1.0150	1.0061	1.0002	.9995
.050	.9997	.9962	.9943	.9934	.9956	.9978
.0649(= $\tau_0$ )	.9799	.9805	.9819	.9857	.9928	.9969
.100	.9440	.9520	.9594	.9719	.9877	.9951
.500	.8254	.8580	.8852	.9261	.9711	.9893
1.000	.7970	.8354	.8674	.9152	.9671	.9879
3.000	.7746	.8177	.8533	.9065	.9639	.9868
10.000	.7660	.8108	.8479	.9032	.9627	.9864
$\infty$	.7622	.8078	.8455	.9017	.9622	.9862

$r(\tau, \lambda)$  の値を数値評価しよう (詳しい計算方法については Nagata(1996a) を参照)。表 4 には  $n-k=5$ ,  $p=5$  の場合の  $r(\tau, \lambda)$  の値を, 表 5 には  $n-k=15$ ,  $p=5$  の場合の  $r(\tau, \lambda)$  の値を与える。表 4 と 5 より,  $\tau$  が小さくなく,  $\lambda$  がゼロに近いならば,  $I_S(a^*)$  を用いることにより非常に大きな改良の得られていることがわかる。この改良度の大きさは, この分野の問題にとっては特出している。このことについては, 次の定理を用いて説明することができる。

定理 4 (Nagata(1996a)) もし,  $c < (n-k)(n-k+p+2)/\{2(n-k+p)\}$  であるなら, すべての  $\lambda$  に対して

$$E \left[ \left( \frac{\min\{e'e, e'e^*/a^*\}}{c\sigma^2} - 1 \right)^2 \right] < E \left[ \left( \frac{e'e^*/a^*}{c\sigma^2} - 1 \right)^2 \right] \quad (34)$$

が成り立つ。

簡単のために,  $\lambda = 0$  の場合について次の 3 つのタイプの推定量を考える。

$$\hat{\sigma}_{NP}^2 = \frac{e'e}{a_1} \quad : \text{非併合推定量} \quad (35)$$

$$\hat{\sigma}_{AP}^2 = \frac{e'e + (e'e^* - e'e)}{a_2} \quad : \text{常時併合推定量} \quad (36)$$

$$\hat{\sigma}_{PT}^2 = \min \{ \hat{\sigma}_{NP}^2, \hat{\sigma}_{AP}^2 \} \quad : \text{予備検定推定量} \quad (37)$$

推定量  $\hat{\sigma}^2$  の危険関数を  $R(\hat{\sigma}^2) = E[(\hat{\sigma}^2/\sigma^2 - 1)^2]$  と表す。通常の推定量 (例えば, 推定量 (2), (5), (6)) に関しては定理 4 の条件は満たされない。正規分布を前提にした場合,  $\lambda = 0$  のときには不等式  $R(\hat{\sigma}_{AP}^2) < R(\hat{\sigma}_{PT}^2) < R(\hat{\sigma}_{NP}^2)$  が成り立つ。危険関数  $R(\hat{\sigma}_{PT}^2)$  と  $R(\hat{\sigma}_{NP}^2)$  の差は高々誤差に追加される自由度  $p$  によって得られる改善度を反映していると考えられ, 2 つの危険関数の比  $R(\hat{\sigma}_{PT}^2)/R(\hat{\sigma}_{NP}^2)$  はそんなに小さくならない。しかし, この節で考えている状況では, 定理 4 の条件が  $c_1$  に対して満たされて ( $c_2$  に対しては満たされない), 定理 4 より,  $\lambda = 0$  に対して  $a_1 = c_1$ ,  $a_2 = c_1 a^*$  とおいて,  $R(\hat{\sigma}_{PT}^2) <$

$R(\hat{\sigma}_{AP}^2) < R(\hat{\sigma}_{NP}^2)$  (2番目の不等号は容易に得られる) が成り立つ。それゆえ、自由度の増加分を超えた改良度が生み出されていると考えられ、それが大きな改良につながっているものと思われる。なお、 $\lambda = 0$  に対する不等式  $R(\hat{\sigma}_{PT}^2) < R(\hat{\sigma}_{AP}^2) < R(\hat{\sigma}_{NP}^2)$  の成立は奇妙なことである。というのは、この不等式は、(3) で示された帰無仮説  $H_0$  が成り立っている ( $\lambda = 0$  が成り立っている) ことが明確であるにもかかわらず、その帰無仮説を予備検定して検定結果を推定に反映する方が精度がよくなるということを意味しているからである。通常の点推定量に関しても、Giles(1991) は誤差分布に多変量  $t$  分布を仮定した場合にこのような現象の生じることを見出している。

## 7. 誤差分布が多変量 $t$ 分布である場合

### 7.1 多変量 $t$ 分布と通常信頼区間

これまででは、モデル(1)の誤差  $\varepsilon$  は正規分布にしたがうことを仮定した。しかし、現実的な状況では、誤差分布が非正規分布にしたがっていることも多い。正規分布よりも裾の確率の大きな分布を仮定するほうがよいことを示唆する研究も多くある (Giles(1991) や Zellner(1976) およびそこであげられている文献を参照)。そのような観点から、誤差分布として多変量  $t$  分布がしばしば用いられる。以下では、誤差分布として多変量  $t$  分布を仮定して、スタイン型改良信頼区間について議論する。

モデル(1)における誤差  $\varepsilon$  は次のような確率密度関数 (多変量  $t$  分布の確率密度関数) をもつとする。

$$f(\varepsilon|\nu, \sigma) = \frac{\nu^{\nu/2} \Gamma((n+\nu)/2)}{\pi^{n/2} \sigma^n \Gamma(\nu/2)} \frac{1}{(\nu + \varepsilon' \varepsilon / \sigma^2)^{(n+\nu)/2}} \quad (38)$$

ここで、 $\sigma$  と  $\nu$  は尺度母数と自由度である。多変量  $t$  分布は正規分布と逆ガ

ンマ分布との混合分布として次のように表現できる。

$$f(\varepsilon|\nu, \sigma) = \int_0^{\infty} f_N(\varepsilon|\tau) f_{IG}(\tau|\nu, \sigma) d\tau \quad (39)$$

ただし、

$$f_N(\varepsilon|\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \tau^n} \exp\left\{-\frac{\varepsilon'\varepsilon}{2\tau^2}\right\} \quad (40)$$

$$f_{IG}(\tau|\nu, \sigma) = \frac{2}{\Gamma(\nu/2)} \left(\frac{\nu\sigma^2}{2}\right)^{\nu/2} \tau^{-(\nu+1)} \exp\left\{-\frac{\nu\sigma^2}{2\tau^2}\right\} \quad (41)$$

である。 $\nu \rightarrow \infty$ のとき、式(38)は正規分布  $N(0, \sigma^2 I)$  の確率密度関数に収束する。また、 $\nu > 2$  に対して  $E[\varepsilon] = 0$ ,  $E[\varepsilon\varepsilon'] = [\nu\sigma^2/(\nu-2)]I$  となる。そこで、 $\sigma_u^2 = [\nu\sigma^2/(\nu-2)]$  と定義し、 $\sigma_u^2$  を誤差分散と考えることにする。以下では、 $\nu > 2$  と仮定する。

Zellner(1976)は、 $e'e/\{(n-k)\sigma^2\}$  が自由度  $(n-k, \nu)$  の F 分布にしたがうことを示した。したがって、次のようにして  $\sigma_u^2$  の信頼区間を構成することができる。

$$J_0 = \left(\frac{e'e}{d_2}, \frac{e'e}{d_1}\right) \quad (42)$$

ただし、 $d_1$  と  $d_2$  ( $d_1 < d_2$ ) は次式を満たす定数である。

$$Pr(\sigma_u^2 \in J_0) = 1 - \alpha \quad (43)$$

式(42)の  $J_0$  を  $\sigma_u^2$  の通常の信頼区間とよぶことにする。応用では、次のような定数がよく用いられる。

$$d_1 = d_{10} \equiv \frac{(n-k)(\nu-2)}{\nu} F(n-k, \nu; 1-\alpha/2) \quad (44)$$

$$d_2 = d_{20} \equiv \frac{(n-k)(\nu-2)}{\nu} F(n-k, \nu; \alpha/2) \quad (45)$$

ここで、 $F(\phi_1, \phi_2; \alpha)$  は自由度  $(\phi_1, \phi_2)$  の F 分布の上側  $100\alpha\%$  点である。 $\nu \rightarrow \infty$  のときは、 $d_{10} \rightarrow \chi^2(n-k, 1-\alpha/2)$  および  $d_{20} \rightarrow \chi^2(n-k, \alpha/2)$  となる。

ただし、 $\chi^2(\phi, \alpha)$  は自由度  $\phi$  の  $\chi^2$  分布の上側  $100\alpha\%$  点である。したがって、 $\nu \rightarrow \infty$  のとき、定数  $d_{10}$  と  $d_{20}$  を用いた通常の信頼区間  $J_0$  は  $I_{ET}$  に収束する。

### 7.2 $I_S(a^*)$ のロバストネス

誤差  $\varepsilon$  が自由度  $\nu$  の多変量  $t$  分布にしたがっているときに、実験者ないしは解析者がそれに気づかず、正規分布を仮定して構成されたスタイン型改良信頼区間  $I_S(a^*)$  を用いた場合を考えよう。すなわち、 $I_S(a^*)$  の非正規性に対するロバストネスについて議論する。

ここでは、信頼率についてのみ評価する。そのためには、多変量  $t$  分布の下で  $\min\{e'e/\sigma^2, e^*e^*/(b\sigma^2)\}$  の分布関数が必要であり、これは次のようになる (Nagata(1996c))。

$$\begin{aligned}
 F(c; b) &= Pr \left( \min \left\{ \frac{e'e}{\sigma^2}, \frac{e^*e^*}{b\sigma^2} \right\} \leq c \right) \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{K'_l}{B \left( \frac{n-k}{2}, \frac{p}{2} + l \right)} \int_0^{1/b} z^{\frac{n-k}{2}-1} (1-z)^{\frac{p}{2}+l-1} \\
 &\quad \times I_{\frac{c}{(\lambda+\nu)z+c}} \left( \frac{n-k+p}{2} + l, \frac{\nu}{2} + l \right) dz \\
 &\quad + \sum_{l=0}^{\infty} K'_l \left\{ 1 - I_{1/b} \left( \frac{n-k}{2}, \frac{p}{2} + l \right) \right\} \\
 &\quad \times I_{\frac{bc}{\lambda+\nu+bc}} \left( \frac{n-k+p}{2} + l, \frac{\nu}{2} + l \right) \quad (46)
 \end{aligned}$$

ここで、

$$K'_l = \frac{\Gamma \left( \frac{\nu}{2} + l \right)}{l! \Gamma \left( \frac{\nu}{2} \right)} \left( \frac{\nu}{\lambda + \nu} \right)^{\frac{\nu}{2}} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \nu} \right)^l \quad (47)$$

であり、 $I_x(\cdot, \cdot)$  は不完全ベータ関数である (Abramowitz & Stegun(1972))。

この分布関数を用いて  $n - k = 20$ ,  $p = 4, 8$  の場合に  $I_S(a^*)$  の信頼率を数値計算した結果を表 6 に示す (より詳しい結果については Nagata(1996c) を参照)。ただし、 $I_0 = I_{ET}$  と設定した。

表6 多変量t分布の下での  $I_S(a^*)$  の信頼率  
 ( $n - k = 20$ ,  $p = 4, 8$ ,  $1 - \alpha = .9500$ )

p	$\nu$	$\lambda$						
		0	1.0	2.0	4.0	8.0	16.0	$\infty$
4	6	.5937	.6021	.6079	.6138	.6157	.6127	.6099
	10	.7262	.7333	.7375	.7407	.7395	.7352	.7330
	20	.8405	.8440	.8456	.8456	.8421	.8375	.8359
	30	.8813	.8833	.8838	.8828	.8787	.8742	.8729
	60	.9222	.9227	.9224	.9205	.9162	.9123	.9113
	120	.9418	.9418	.9411	.9390	.9350	.9315	.9308
	$\infty$	.9598	.9595	.9588	.9568	.9533	.9505	.9500
8	6	.5922	.6005	.6067	.6143	.6185	.6152	.6099
	10	.7283	.7352	.7398	.7442	.7437	.7377	.7330
	20	.8463	.8496	.8513	.8515	.8473	.8399	.8359
	30	.8880	.8899	.8904	.8892	.8841	.8765	.8729
	60	.9293	.9296	.9292	.9270	.9215	.9143	.9113
	120	.9484	.9483	.9476	.9453	.9400	.9334	.9308
	$\infty$	.9654	.9651	.9644	.9623	.9577	.9520	.9500

表6より、自由度 $\nu$ が小さい場合は  $I_S(a^*)$  の信頼率は名目の値 .9500 よりもはるかに小さくなることがわかる。また、ほとんどすべての場合において、 $I_S(a^*)$  の信頼率は  $I_0$  の信頼率 ( $\lambda = \infty$  の場合に対応する) よりも大きい。これらの結果より、 $I_S(a^*)$  は信頼率の意味では非正規性に関してロバストではないが、通常の信頼区間に対する優越性に対しては多変量t分布の場合にも成り立つと言える。

### 7.3 多変量t分布を前提としたスタイン型改良信頼区間

誤差 $\varepsilon$ が自由度 $\nu$ の多変量t分布にしたがうことを実験者・解析者が知っているとしよう。このとき、通常の信頼区間  $J_0$  の改良を考える。

次のような信頼区間を定義する。

$$J_S^* = \left( \frac{\min\{e'e, e'e^*/b^*\}}{d_2}, \frac{\min\{e'e, e'e^*/b^*\}}{d_1} \right) \quad (48)$$

ここで,

$$b^* = \frac{(\nu - 2) \left( d_0^{\frac{n-k+p}{n-k+p+\nu}} - 1 \right)}{d_1 \left( d_0 - d_0^{\frac{n-k+p}{n-k+p+\nu}} \right)} \quad (49)$$

$$d_0 = \frac{d_2}{d_1} \quad (50)$$

であり、 $d_1$  と  $d_2$  は  $J_0$  で用いられている定数である。このとき、次の定理が成り立つ。

定理5 (Nagata(1996c))  $\nu \geq n - k + p$  のとき、 $b^* > 1$  であるなら、 $Pr(\sigma_u^2 \in J_S^*) > Pr(\sigma_u^2 \in J_0)$  である。

$|J_S^*| \leq |J_0|$  や  $\|J_S^*\| = \|J_0\|$  も明らかに成り立つ。

$J_0$  における定数を  $d_1 = d_{10}$ ,  $d_2 = d_{20}$  とおいて、スタイン型改良信頼区間  $J_S^*$  の信頼率を数値計算しよう。ここでも、4.2節で述べた分布関数  $F(c; b)$  を用いる。 $n - k = 20$ ,  $p = 4, 8$  の場合の結果を表7に示す (詳細な結果についてはNagata(1996c)を参照)。この場合、条件  $b^* > 1$  は満たされる。

表7より、定理5の条件  $\nu \geq n - k + p$  が成り立っていないなくても、 $J_S^*$  の信頼率は  $J_0$  の信頼率よりも大きいことがわかる。また、それぞれの自由度  $\nu$  に対して、 $\lambda$  を変化させた下での信頼率の最大値は  $\nu = \infty$  のときが一番大きい。つまり、誤差が正規分布にしたがっている場合のほうが大きく改良することが可能であることを意味している。

表7  $J_5^*$ の信頼率  
 ( $n - k = 20$ ,  $p = 4, 8$ ,  $1 - \alpha = .9500$ )

p	$\nu$	$\lambda$					
		0	1.0	2.0	4.0	8.0	16.0
4	6	.9502	.9507	.9509	.9509	.9506	.9503
	10	.9511	.9521	.9524	.9523	.9516	.9507
	20	.9531	.9541	.9544	.9540	.9525	.9508
	30	.9545	.9553	.9555	.9549	.9530	.9508
	60	.9565	.9569	.9568	.9557	.9532	.9506
	120	.9580	.9581	.9577	.9563	.9533	.9506
	$\infty$	.9598	.9595	.9588	.9568	.9533	.9505
8	6	.9509	.9518	.9522	.9522	.9519	.9512
	10	.9527	.9538	.9543	.9544	.9535	.9519
	20	.9560	.9570	.9574	.9571	.9553	.9523
	30	.9581	.9589	.9591	.9585	.9562	.9524
	60	.9610	.9614	.9612	.9601	.9569	.9523
	120	.9630	.9631	.9627	.9612	.9573	.9522
	$\infty$	.9654	.9651	.9644	.9623	.9577	.9520

7.3節では、自由度 $\nu$ が既知であると仮定した。しかし、現実的には、このような仮定が満たされていることは少ないだろう。そのときには、 $\nu$ をその推定値で置き換える必要がある。Singh(1988)およびSutradhar & Ali(1986)は次のような $\nu$ の推定量を提案している。

$$\hat{\nu} = \frac{2(2\hat{a} - 3)}{\hat{a} - 3} \quad (51)$$

ただし、

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^4/n}{(\sum_{i=1}^n e_i^2/n)^2} \quad (52)$$

で、 $e_i$ は残差ベクトル $e$ の第 $i$ 成分である。自由度 $\nu$ をこの推定量で置き換えたときは、その変動を考慮しなければならないから、この節で述べたことはそのままでは成り立たない。そして、この議論はきわめて複雑になると思われる。

参考文献

- Abramowitz, M. and Stegun, I.A.(1972). *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications.
- Brewster, J.F. and Zidek, J.V.(1974). Improving on equivariant estimators, *Annals of Statistics*, **2**, 21–38.
- Brown, L.D. (1968). Inadmissibility of the usual estimators of scale parameters in problems with unknown location and scale parameters, *Annals of Mathematical Statistics*, **39**, 29–48.
- Brown, L.D.(1990). Comment on “Development in decision-theoretic variance estimation”, by Maatta, J.M. and Casella, G., *Statistical Science*, **5**, 103-106.
- Cohen, A.(1972). Improved confidence intervals for the variance of a normal distribution, *Journal of the American Statistical Association*, **67**, 382–387.
- Ghosh, B.K.(1975). A two-stage procedure for the Behrens-Fisher problem, *Journal of the American Statistical Association*, **70**, 457–462.
- Giles, J.A.(1990). Preliminary-test estimation of a mis-specified linear model with spherically symmetric disturbances, Ph.D. thesis, University of Canterbury, Christchurch.
- Giles, J.A.(1991). Pre-testing for linear restrictions in a regression model with spherically symmetric disturbances, *Journal of Econometrics*, **50**, 377–398.
- Goutis, C. and Casella, G.(1991). Improved invariant confidence intervals for a normal variance, *Annals of Statistics*, **19**, 2015–2031.
- Inaba, T. and Nagata, Y.(1994). An inequality in the condition for improving on an equal-tails confidence interval of normal variance, *Journal of the Japan Statistical Society*, **24**, 181–184.
- James, W. and Stein, C.(1961). Estimation with quadratic loss, *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, **1**, 361-379.

- Kubokawa, T.(1994). A unified approach to improving equivariant estimators, *Annals of Statistics*, **22**, 290–299.
- Maatta, J.M. and Casella, G.(1990). Developments in decision-theoretic variance estimation, *Statistical Science*, **5**, 90–101.
- Nagata, Y.(1989). Improvements of interval estimations for the variance and the ratio of two variances, *Journal of the Japan Statistical Society*, **19**, 151–161.
- Nagata, Y.(1995). The relationship between the improvement on the point estimation and the improvement on the interval estimation for the disturbance variance in a linear regression model, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **24**, 1687–1704.
- Nagata, Y.(1996a). The Neyman accuracy and the Wolfowitz accuracy of the Stein type confidence interval for the disturbance variance, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **25**, 985–1004.
- Nagata, Y.(1996b). Optimality of the Stein-type estimator for variance, Forthcoming in *The Japanese Economic Review*.
- Nagata, Y.(1996c). Stein type confidence interval of the disturbance variance in a linear regression model with multivariate Student-t distributed errors, Forthcoming in *Communications in Statistics – Theory and Methods*.
- Neyman, J.(1937). Outline of a theory of statistical estimation based on the classical theory of probability, *Philosophical Transactions of the Royal Society, Ser.A* **236**, 333–380.
- Ohtani, K.(1988). Optimal levels of significance of a pre-test in estimating the disturbance variance after the pre-test for a linear hypothesis on coefficients in a linear regression, *Economics Letters*, **28**, 151–156.
- Ohtani, K.(1993). The exact distribution and density functions of the Stein-type estimator for normal variance, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **22**, 2863–2876.
- Shinozaki, N.(1995). Some modifications of improved estimators of a normal variance, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **47**, 273–286.

- Shorrock, G.(1990). Improved confidence intervals for a normal variance, *Annals of Statistics*, **18**, 972–980.
- Singh, R.S.(1988). Estimation of error variance in linear regression models with errors having multivariate Student-t distribution with unknown degrees of freedom, *Economics Letters*, **27**, 47–53.
- Stein, C.(1964). Inadmissibility of the usual estimator for the variance of a normal distribution with unknown mean, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **16**, 155–160.
- Sutradhar, B.C. and Ali, M.M.(1986). Estimation of the parameter of a regression model with a multivariate t errors variable, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **15**, 429–450.
- Tate, R.F. and Klett, G.W.(1959). Optimal confidence intervals for the variance of a normal distribution, *Journal of the American Statistical Association*, **54**, 674–682.
- Wolfowitz, J.(1950). Minimax estimates of the mean of a normal distribution with known variance, *Annals of Mathematical Statistics*, **21**, 218–230
- Zellner, A.(1976). Bayesian and non-Bayesian analysis of the regression model with multivariate Student-t error terms, *Journal of the American Statistical Association*, **71**, 400–405.

## Stein Type Confidence Interval of the Disturbance Variance in a Linear Regression Model

Yasushi Nagata

In this paper the interval estimation of the disturbance variance in a linear regression model is discussed from several view points.

Firstly, a brief summary of the Stein type point estimation theory and the Stein type interval estimation theory is given. Then, the relationship between the improvement on the point estimation and the improvement on the interval estimation is discussed. It is shown that substituting the Stein type estimator for the usual estimator in the confidence interval leads to the improvement on the interval estimation.

Secondly, the Neyman accuracy of the Stein type confidence interval is considered. The Neyman accuracy is a measure related to the unbiasedness of a confidence interval. It is shown that the Stein type confidence interval is not unbiased.

Thirdly, the Wolfowitz accuracy of the Stein type confidence interval is considered. The Wolfowitz accuracy is related to the closeness of the endpoints to the true parameter. The sufficient condition for the Stein type confidence interval to improve on the usual confidence interval is derived.

Finally, the Stein type confidence interval is discussed under the multivariate Student- $t$  distribution. It is shown that so far as the coverage probability and the multivariate Student- $t$  distributions are concerned, the Stein type confidence interval is not robust against nonnormality, but that the superiority over the usual confidence interval still holds against nonnormality. Furthermore, for the case when it is known that error terms have a multivariate Student- $t$  distribution, a Stein type confidence interval which improves on the usual confidence interval is presented.