岡山大学経済学会雑誌28(2),1996，255～263

Amos Golan, George Judge and Douglas Miller, MAXIMUM ENTROPY ECONOMETRICS: ROBUST ESTIMATION WITH LIMITED DATA

John Wiley and Sons, Chichester, 1996, pp. xvi ＋307

藤　本　利　躬

「最大エントロピーの計量経済学～限りあるデータのもとでの頑健推定」――厳格に訳すと，和文タイトルはこうなる。一見して，キーワードがエントロピー，データの有限性，推定の頑健性の3つであることは明らかである。各々が本書の特徴を象徴しているのは勿論であるが，就中，「エントロピー」がその中心を成しているとすることに関しては衆目の一致するところだろう。ところで，周く知られているように，この語の用途は大別して3通りあって，

(イ)　ある展開中の物理的系の一定時点における利用不可能なエネルギー（アネルギー anergy）の数量指標とされ，熱力学の第2法則（エントロピー法則）の基本概念であり，エネルギー節約と環境保全絡みで必ず登場する，

(ロ)　系が状態Aから状態Bへ推移するためにAの起こる確率が減少する度合，つまり状態の不可逆性を測る統計力学における尺度の一つ，

(ハ)　Shannon によって数理的に基礎付けられた情報理論における発信源からの情報の内容量を測る尺度，

である。同じ術語が用いられていることからこれらの間の関連をあげつらう

こともできなくはないが，明らかにここはその場ではないので機会を改めることにし，本書のエントロピーが（ハ）であることを断わって，以下では，その内容の概要を紹介し，若干のコメントを加えるにとどめる。

さて，計量経済分析では，理論的にも実際でも，モデル，推定と推論の方法及びデータが三位一体的に揃わなければならないにもかかわらず，モデルが正しく特定化されていなかったり，データが不完全であるかまたは再生不可能であったり，推定法が適当でなかったり，推論に歪みがあるなど，どれかに不具合が生じてしまうのが常である。いわゆる管理実験が自然科学に比べて不自由な社会科学においては実証的方法に不可欠なデータの入手に困難が伴うし，折角利用可能になったデータもその質に問題があったり，不揃いがありがちである。本書の目的はこのように何かと問題性があるデータ標本の有効性を高め，あるいは標本によらない事前情報を掘り起こすために最大エントロピー（maximum entropy，略してME）法を応用することとされる。

このアプローチの特殊性は，同じモデルを扱いながら術語からして通常の計量経済学と非常に異なる独特のものであることに端的に現れている。ある線形モデルを

$$y = X\beta \tag{1}$$

とする。ここに，$y=(y_1,\ldots, y_T)'$，$\beta=(\beta_1,\ldots, \beta_K)'$，

$$X = \begin{vmatrix} x_{11},\ldots, & x_{1K} \\ \cdot \quad ,\ldots, & \cdot \\ x_{T1},\ldots, & x_{TK} \end{vmatrix}$$

である。これは，通常の見方をすれば，K個の説明変数xに被説明変数yを回帰させる線形重回帰モデルの標準例であり，サイズTのサンプル（y，X）を用いて未知の係数パラメータβの数値決定（推定）と検定及び予測と続く周知の一連のルーチンワークを連想することだろう。しかるに，ME法では，先ずyを外部観測ないしデータ（external observations（data））ベクトル，βを観測不能（unobservable）未知数ベクトルと呼ぶのは通常に近い

としても，yと同じ観測データであるXを「既知の線形オペレータ」(linear operator) と呼び直した上で，(1)を「yがノイズなしに合計 (aggregate) または積率の形で特定していて，βが観測不能のケース」の問題とし，これを「純粋可逆問題」(pure inverse problem) と呼ぶ。外部に現れた（したがって観測され，既知となった）yから既知の変換オペレータXを通じて観測不能な（したがって未知の）βを recover する，すなわち「復元」する問題というわけである。つまり，βがyを現象させたのであるから，逆にyからβへと遡及するという意味が込められている。

こうして，ME では，yとXは観測データとしては同格であるが，機能上は質を異にし，Xはyとβを対応させる変換の演算子である。しかるに，計量経済分析用データは厳密な管理実験の結果観測ではなく，せいぜい実験まがいか非実験データであるから，演算子Xは正則でなく，したがって逆行列 X^{-1} が存在しないことも稀ではない。換言すれば，βの次数がサンプル・サイズTより大きく，通常の逆行列法でβを復元するには情報不足であり，その結果，(K－T) 個の任意係数を含む可能解が数多く存在することになる。このような場合，通常の方法では解を特定できず，「データの情報内容を写し取ることができない」(p. 2)。(ちなみに，これは inverse problem を狭く「逆行列問題」とする方が適訳であるかもしれないことを示唆しているかのようである。)

次に，(1)にノイズ・ベクトル $u = (u_1, ..., u_T)'$ を追加して

$$y = X\beta + u \tag{2}$$

とする。上述の云い回しをすれば，(2)は「ノイズ付き可逆問題」(noisy inverse problem) を定義する。すなわち，われわれはノイズ込み観測ベクトルyを持っているが，関心の的は未知で観測不能なβの測定にある。これを直接測定できないから，その復元にはノイズ込みの観測(2)を通じて間接的に測定するほかはないのだが，こうしたノイズの存在や観測の情報内容が間接

的，部分的，断片的など，要するに不完全であることのために，通常の方法ではβを復元できないかもしれない。この場合，問題設定が不適切（the problem is ill-posed）というのである。

不適切設定にも百面相があるが，主だったものでは，

(イ) 非定常性を含めてモデル特定化の都合により未知パラメータ数がサンプル・サイズを超えてしまう，

(ロ) データそのものに不整合がある，

(ハ) 経済現象を筆頭に人間が関係する社会現象は管理実験がなじまないために，まずい実験計画や非実験データの使用がXを線形従属に陥らせる，

というケースを挙げることができよう。これに通常の方法で対処するだけでは，各々，(イ)不決定パラメータが残存する，(ロ)全パラメータが不決定か，または(ハ)推定値が極めて不安定で分散が過大に出る結果，折角復元したパラメータの精度が低くなる。

こうした不適切状況が計量分析の常態であってみれば，持たない情報の埋め合わせをするのに何か都合のよい仮定を追加して不適切問題を外見上適切化し（seemingly well-posed），ベイジャンを含めて通常の方法で分析しても，当然の帰結として処理も推論もしばしば誤りを導くこととなる。本書の課題は不適切，過少決定の純粋及びノイズ付き可逆問題の範囲を決め，範囲内のケース毎に ME 解法を提案することであり，最も重視される段階はデータに含まれる情報を徹底的に復元することとされ，したがって推定，推論の方法も通常とは異なってくるが，その核心をなすものがエントロピー概念であることだけは容易に見当がつくはずである。

さて，問題のエントロピーとは確率を不確実度の裏返しとみなして確率分布に含まれる不確実性を測定しようとする Shannon の関数（情報量尺度）であることは周知のこととする。いま，(1)においてT＜Kであるために X^{-1} が存在せず，したがってβを求める演繹数理の問題設定が不適切であるとしよ

う。そのとき，(1)の未知で観測不能なβを同じく未知で観測できない確率ベクトル$p =（p_1, .., p_K）'$で取り替えた

$$y = X\beta = Xp \tag{3}$$

をデータyの発生装置と見なし，この(3)及び$e =（1, ..., 1）'$として定義できる確率和が1の基準

$$p'e = 1 \tag{4}$$

を制約条件に，エントロピー関数

$$H(p) = -\Sigma p_k \ln p_k = -p'\ln p \tag{5}$$

を最大化するpを求めるという推論数理の問題に還元して解くことを考える。これがME法の精髄である。

ところで，以上ではエントロピーを定義する確率ベクトルpが完全に未知で観測不能と仮定したが，実際には先験情報として事前確率分布$q =（q_1, .., q_K）'$を利用できることがよくある。そうした場合，先ず初めにこれを初期条件としてモデルの中へ先取りする，つまり(3)のpにqを代入する。次に同じく(3)へ標本観測yを持ち込む。その際，いきなり(3)が成立してqとyが整合するようなことはない。したがって，qとの差が最小になるようにpを推定する必要がある。すなわち，(3)(4)を制約に

$$I(p, q) = \Sigma p_k \ln(p_k/q_k) = p'\ln p - p'\ln q \tag{6}$$

を最小化するpを求める。I（p，q）はpとqの間の「クロス・エントロピー」(cross-entropy，略してCE）であり，以上がKullbackの最小CE原理とよばれるものの要点である。

以下では，このME及びCE法をベースに上述した諸テーマとの取り組みが本書全体にわたってどのように展開されているか，重点的に見ていくことにしよう。

全体は8部，17章編成である。

まず，第1章は問題設定とそれへの取り組みの段取りが説明される序章で

ある。

第２章「古典的最大エントロピー：回顧」では，エントロピー尺度が導入され，不適切な純粋可逆問題を解くのにME方式をどう用いるかが要説される。この方法の略歴を紹介した後，それは，

(イ) データが平均ないし合計の形になってしまっているために，個々のデータそのものに関する情報を表すのに確率を用いなければならない，

(ロ) すべては知らないが，一部は知っている，

(ハ) 知っていることだけを述べ，知っていること以上，以下とも述べない，

というケースに用いると効能があることが簡単な例題を用いて説明されている。

以上の序論に続く本論の冒頭に配置されるのが第１部「純粋可逆問題」であり，第３章「基礎的最大エントロピー原理：定式化と展開」，第４章「純粋可逆問題の定式化と解」，第５章「一般純粋可逆問題」から成る。ME法の使い方が

(イ) 企業の規模分布を掘り起こす，

(ロ) 支出，取引額，所得フローのマトリックス要素の推定値を多部門データから再生する，

(ハ) 集計比例データから定常マルコフ過程の推移確率の推定値を再生する，

という具体的問題を用いて例説される。

第２部「ノイズ付き線形可逆問題」には第６章「一般最大エントロピー（GME）及びクロス・エントロピー（GCE）の定式化」，第７章「GME－GCE の有限標本論」を含む。まず，通常の統計モデルにおいて，未知のパラメータを確率そのものであるかのように扱える ME 形式にマッチするようにパラメータが再編される。つぎに，情報を回復するための基礎装置として一般最大エントロピー（generalized maximum entropy, GME），一般クロス・エントロピー（generalized cross-entropy, GCE）が開発される。つまり，GME，GCE 式データ解析に基き，双対基準関数の最適化問題としてノ

イズ付き可逆問題を解くわけである。その結果，データ内の情報ないしデータ積率のみに基いて推論を展開することができるようになる。併せて，GME－GCE 推定量の大標本特性，小標本特性が解明され，通常の推定量と比較される。

第8章「不適切問題の GME—GCE 解」，第9章「ノン・スカラー単位共分散行列を伴う一般線形統計モデル」，第10章「統計モデルの選択」から成る第3部「GME－GCE の一般線形モデルへの適用」は，第2部で導入した GME，GCE を用いて，いわば実験計画行列Xが不調つまりマルチコを起こしたり，エラー項uが自己相関であったり不均一分散を持つなどのケースで，情報復元，推定及び推論が行われる。第10章で，無関係変数も含まれる一定の変数集合から正しい部分集合を選び出す問題が取り上げられる。新しいモデル選択基準及び正しい変数と無関係変数とを区別するための情報尺度が提示され，またスペシフィケーション・エラーによるモデル不確実性の表し方が説明される。

第4部「経済的統計式システム」は第11章「線形統計モデルの集合」，第12章「連立方程式統計モデル」の2章から成る。まず，Zellner が SUR（seemingly unrelated regression）の名のもとに初めて提起した回帰式システムの GME－GCE 版が考察され，このフレームワークにおける未知数たる誤差の共分散行列並びに係数パラメータの推定問題が，伝統的な2段階推定法と比較対照させながら論じられる。次に，変数間フィードバック・メカニズムを取り込めるように SUR を一般化し，連立方程式システムの個別式用とシステム全体用の GME 形式が提示される。GME と一般積率法（general moment method, GMM）の比較対照及び評価が行われる。

第5部「線形及び非線形動学システム」は第13章「動学的線形可逆問題の推定と推論」及び第14章「動学的線形及び非線形制御システム」を含む。ここでは差分方程式システムの推定問題が考察される。最初の問題は線形ないし非線形の状態方程式と観測方程式のシステムにおけるノイズを伴う状態観

測に関するものであり，これら方程式の未知の係数パラメータと未知数としての状態変数を推定することが目的である。次に，1次・2次制御問題における目的関数，状態方程式のパラメータを推定する問題が取り上げられ，時系列観測データを所与として隠れた未知のパラメータを同時推定可能ならしめる非線形可逆制御問題が例をあげて説明される。

第6部「離散的選択・センサー問題」も第15章「多項応答データからの情報復元」と第16章「センサーされた応答データからの情報復元」の2章立てである。ここで「センサーする」(censor)，つまり検閲するとは，周知のように，サンプリングにおいていくつかの標本値を，未知であるためにやむを得ずか分析上の都合で故意にか，とにかく取捨選択することで，質的分析の常套手段であることからも容易に推測できるように，第6部では多項離散選択問題を扱うロジットないしプロビット型の定性モデルにおける未知パラメータの推定値の復元のために GME に基く新しいアプローチが提示される。こうしたケースにおける通常のアプローチでは積率条件の成立を保証するためにきつい仮定を置かなければならない。実際において通常なら妥当とされるモデルにも不確実性が残存することを説明し，ある一般的指数関数と双対基準関数を組み合わせて用いて，有限小標本で通常の推定量よりは速く収束する一致推定量が示され，サンプリング実験も行われるのである。最後に，従属変数が質的である線形モデルから情報を引き出す問題に焦点が合わされる。GME アプローチは通常の方法では必要不可欠なパラメータ関連のきつい仮定のいくつかは置かなくてもよいようにし，分布が非ガウス型であるとか問題設定が不適切である場合にも広く適用可能であることが論証，例説される。

第8部「計算に関するノート」は，非線形解法のアルゴリズムとプログラミング問題を論じるとともに ME，GME，GCE に合うソフトウェア・パッケージとしてどんな利用可能性があるかが指摘される第17章「GME－GCE 解の計算」を含むだけである。

最後の第8部「エピローグ」は，データが部分的ないし不完全，モデルが正しくないとかミススペシフィケーションを含む等の状況下にあって情報を復元し，新しい情報処理ルールを開発する上において ME，GME，GCE が如何に重要な役割を果たしているかを総括的に論じたサマリーとみなすことができよう。

以上から，本書を通じてその内容を垣間見ることになったエントロピー概念に基づく計量経済学は連立方程式構造接近法からその対極として最近華々しくリバイバル中の時系列分析法，さらにはベイジャン理論まで含めた通常理論と根底的に方法論を異にしていることが窺えたはずであるが，総じて云えば後者がデータ観測から推定，検定に推論と続く実証局面の連鎖の中で推定中心に重点を置いているのに対して，前者は「可逆性」をモチーフとするエントロピーに支えられてデータの情報内容に焦点を合わせているとの意味で入り口のデータ観測を重視していると思われ，両者の補完関係が印象的である。

なお，このエントロピー・アプローチが一朝一夕に成ったものではないことは本書の章末毎にリストアップされた文献の数々とそれらの発表の時間的かつ専門分野別広がりからもわかるし，理系文献のウェイトが大きいこともエントロピー概念の発祥の経緯から納得できるところである。わが経済学領域に関してエントロピーと聞いて条件反射的に思い浮かぶのが約30年も昔にすでに高度充実の域にあった Theil (Economics and Information Theory, 1967) であり，邦語文献では宮沢光一（情報・決定理論序説，1971）である。しかし，「エントロピー」の上に「最大」を冠してエントロピーの用い方まで指定したタイトルを持つ本書がデータの recover 法を中心に推定，検定，推論まで徹頭徹尾エントロピーだけで計量経済学を総合的に体系化し直した名実共に初めてのパイオニア・ワークであり，実証的経済分析の展開にとって画期的な労作であることは確かだろう。