

氏名	前田 多恵
授与した学位	博士
専攻分野の名称	理学
学位授与番号	博甲第3879号
学位授与の日付	平成21年 3月25日
学位授与の要件	自然科学研究科 先端基礎科学専攻 (学位規則第5条第1項該当)
学位論文の題目	Commensurability of hyperbolic groups and manifolds (双曲群および多様体における通約性)
論文審査委員	教授 松崎 克彦 教授 清原 一吉 准教授 勝田 篤

学位論文内容の要旨

本論文は、双曲幾何学に関連する話題に現れる三種類の「通約性」に注目し、その十分条件を与えるいくつかの定理を著者が新たに得たものを中心に紹介することを目的としている。

第一の通約性は多様体同士の通約性で、ふたつのコンパクトリーマン多様体に通約的であるとは、共通の有限被覆空間を持つことをいう。コンパクトリーマン多様体に対し、その上の二乗可積分関数全体の空間に作用するラプラス作用素の固有値全体のなす集合はラプラシアンの特スペクトルとよばれ、ふたつの多様体はラプラシアンの特スペクトルが一致しているとき等スペクトルであるとよばれる。「等スペクトルな多様体は等距離同型であるか」という問いは古典的な問いであり、1964年にJ.Milnorによって最初の反例が構成されて以降多くの反例の存在が報告されているが、そのうちの多くの等スペクトルだが等距離同型でない多様体の組は互に通約的であるという性質をもつ。このことから「どのような条件のもとで等スペクトルな多様体は通約的となるか」という問いが生じ、この問いに対する部分的な解答としてA.Reidは「算術的双曲2次（または3次）多様体は等スペクトルならば通約的である」という定理を示した。本論文ではまずこの定理の証明が紹介される。

一方通約性という概念は群にも存在し、一般に群のふたつの部分群に通約的であるとは、その共通部分がどちらの部分群においても指数有限となっていることをいう。これが第二の通約性である。D.LongとA.Reidは、双曲2次（3次）多様体の基本群であるフックス群（クライン群）の通約性の十分条件を考察し、「算術的フックス群（クライン群）はその軸全体がなす集合が一致するならば通約的である」ということを示した。この結果を受け、著者は新たなフックス群の通約条件として「算術的フックス群はその放物型元の固定点全体のなす集合が一致するならば通約的である」という定理と、「非初等的フックス群はその楕円型元の固定点全体のなす集合が一致するならば通約的である」という定理を得た。この3つの定理の証明が本論文の中心部分である。

最後に紹介する第三の通約性は、共通の群に含まれているとは限らない一般の群同士の通約性で、群 G と群 H は、 G の指数有限な部分群で H の指数有限な部分群と同型であるものが存在するとき通約的であるという。コンパクトリーマン多様体の通約性では、その十分条件として明らかに「等長的」ということが挙げられる。これと似た結果として、いくつかの種類のある有限生成群では、ある距離（語距離）を考えた時、「擬等長的」ということが通約性の十分条件となることが知られている。本論文ではそのタイプの定理として、「virtually abelian な群は擬等長的ならば通約的である」という定理と、「virtually free な群は擬等長的ならば通約的である」という定理の証明を紹介している。

論文審査結果の要旨

標記の学位論文では、双曲離散群における通約性に関して、固定点集合の一致がフックス群の通約性（共通の有限指数部分群をもつという性質）をいかなる条件のもとで導くかという問題が考察されている。

フックス群の通約類の決定の問題は、双曲型元の軸の集合の一致がその必要十分条件であると予想されているが、これは算術的フックス群については正しいことが証明されている。前田はこの通約類の決定の問題に取り組み、より弱い条件である放物型元の固定点集合の一致から2つのフックス群の通約同値を証明した。弱い条件という意味は、この結果は一般の有限生成フックス群ではもはや成り立たず、したがって、フックス群の算術性に本質的に依存しているということである。リー群の離散部分群の算術性の理論は Margulis などにより大きく進展させられた数学の重要な分野のひとつであるが、それを $SL(2, \mathbf{R})$, $SL(2, \mathbf{C})$ に適用して楕円モジュラー群や双曲幾何学との関連を調べる研究も近年発展している。前田の結果は、このような分野において重要で価値ある成果を与えている。この結果をまとめた論文は、査読付きの雑誌に掲載が決定している。

また、別の結果として、楕円型固定点集合が一致する場合、今度は算術性の仮定なしに、商面積有限なフックス群に対して通約性が導かれることを示している。証明の方法は第一の結果とは全く異なり、幾何学的手法を用いている。このことは、通約類の決定の問題に対して、前田が様々な理論を使って取り組むことが可能であることを表している。この結果は査読付きの国際研究集会会議録に既に公表されている。

以上のように、本論文においてまとめられた結果の重要性および申請者の研究能力を高く評価して、博士の学位に値するものと判断する。