

氏 名 飯間 圭一郎

授与した学位 博士

専攻分野の名称 理学

学位授与番号 博甲第3878号

学位授与の日付 平成21年 3月25日

学位授与の要件 自然科学研究科 先端基礎科学専攻
(学位規則第5条第1項該当)

学位論文の題目 Commutative ring theory and their applications to combinatorial representation theory
(可換環論とその組合せ論的表現論への応用)

論文審査委員 教授 吉野 雄二 教授 山田 裕史 准教授 鈴木 武史

学位論文内容の要旨

可換環論の組合せ論的表現論への応用に関する研究の2つ成果について纏められている。

そもそも可換環論とは19世紀後半に代数学から分枝して生まれた。20世紀に入って、Lasker や Macaulay から代数学者の手により多項式環のイデアル論は更なる発展を遂げた。20世紀の初頭には代数学の中で非常に重要な地位を占めることとなった。

第1章では、ジョルダン標準形のテンソル積のジョルダン分解に関する話題を採り上げている。2つの既約表現のテンソル積を既約表現の直和に分解する公式を与える問題は、Clebsch-Gordan の問題と呼ばれている表現論の重要な問題である。この問題の類似問題としてジョルダン標準形のテンソル積の直既約なジョルダン標準形の直和に分解する問題を考え、結果としてジョルダン標準形のテンソル積の直既約分解の公式を与えた。基礎体が標数0の代数閉体のときは、Martsinkovsky と Vlassov らによって既に解決されていたが、永らく未解決であった素数標数の代数閉体の場合について標数0の場合を含む形で証明することに成功した。

以下にこの問題を解決するために用いた手法を述べたいと思う。まず初めに直既約な2つのジョルダン標準形に対応する次数つき環をそれぞれ構成する。次にその2つの環の基礎体上のテンソル積を計算し、ジョルダン標準形の固有値に対応するイデアルに関する随伴次数環を計算し、問題をその環のヒルベルト関数を求めることに帰着させる。この方法により基礎体の標数が0の場合の別証明を与えたことにもなる。最後にある整数係数行列の極大な小行列式全体が生成するイデアルの生成元を計算しその値を素数 p が割り切るかどうかを判定することにより、素数標数の場合においても直既約分解を計算する公式を与えることができた。

第2章では、グレブナー基底と関数等式に関する話題を採り上げている。関数等式は古来より研究され続けているテーマであり、現代では主に組合せ論的表現論の分野に属するものとされている。この問題に対して、グレブナー基底の理論を無限変数の多項式環の場合に拡張しヒルベルト級数を比較する問題として関数等式の研究に応用した。

以下にその方法を具体的に述べたいと思う。まず初めに非負整数 n の分割により構成される2つの集合 $A(n)$ と $B(n)$ を考える。

「無限変数多項式環 S のイデアル I と単項式順序を適当に選べば I のイニシャルイデアルを $\text{in}(I)$ とおくと、数列 $\{|A(n)|\}$ の生成関数と剰余環 S/I のヒルベルト級数また数列 $\{|B(n)|\}$ の生成関数と剰余環 $S/\text{in}(I)$ のヒルベルト級数がそれぞれ一致するようにできる。」

このとき、グレブナー基底に関する割り算の剰余をとる操作により、 S/I のヒルベルト級数と $S/\text{in}(I)$ のヒルベルト級数は一致するので、2つの数列 $\{|A(n)|\}$ と $\{|B(n)|\}$ の生成関数は互いに一致する。

論文審査結果の要旨

標記の学位論文では可換環論の組合わせ論的表現論への応用として2つの研究成果がまとめられている。

前半部分では、2つのジョルダン標準形行列のテンソル積のジョルダン分解について考察されている。これは基礎とする体が標数0であるときには古典的に知られているが、正標数の体を基礎とする場合には結果は知られていなかった。本論文では、可換環論的な手法を用いることによって、分解公式を得るためのアルゴリズムの構成に成功している。

後半部分では、多項式環のイデアルのグレブナ基底と多くの関数等式との間の関係について考察した成果がまとめられている。まず可算無限変数の多項式環における単項式の集合と自然数の分割の集合とが一一に対応することに着目する。無限変数多項式環におけるグレブナ基底の理論を構成し、そのことを使ってイデアルのヒルベルト関数の間の等式として、いくつかの関数等式を見ることができる。またそれらの関数等式は、いくつかの分割の集合の間の一一対応を表しているが、そのような一一対応が多項式における剰余計算によって得られることが示されている。これは多項式の剰余の計算の応用としては全く新しい知見であり、更なる応用が期待されているものである。

上記の二つの結果ともに、すでにレフェリー付の雑誌に掲載が決まっている。

以上のように本論文においてまとめられた結果の重要性、質の高さを判断して、博士の学位に値するものと判定する。