岡山大学環境理工学部研究報告
第10巻，第1号，pp.13-21，2005年2月

力学系のパーシステンスについて (レビュー)
On Persistence in Dynamical Systems (Review)

佐々木 徹*, 梶原 毅*
Toru Sasaki, Tsuyoshi Kajiwara

(Received November 13, 2004)

概要

Some important results on *persistence* are reviewed. These results concern the behavior of the orbits approaching the boundary. The orbits restrict the flow on the boundary, if one of them approaches more than one invariant set. A typical example is a model for cyclic competition, where the heteroclinic cycle can be the ω-limit set. Thus the persistence can be reduced to some conditions on the boundary flow.

Keywords: persistence, ordinary differential equation, dynamical system

1 始めに

力学系モデルを用いて生態学等の問題を考察する際に考えるべき重要な問題として，そのモデルで記述される系において，ある種が絶滅するか否かという問題があげられる．これを数学の問題として扱う際に最初に考えるのは，その種が絶滅する状態を記述する平衡点が安定であるかという点である．もしこの平衡点が (大域的に漸近) 安定であれば，この系は時間経過とともにこの平衡点に近づく，すなわちその種は絶滅する．

また，考えているすべての種が共存するという状況を考える場合，その状態に対応する平衡点 (これは，第1象限の内部にあることから，内部平衡点とよばれる) が存在して，しかも安定であるかということを考える．もしも，内部平衡点が (大域的に漸近) 安定であれば，時間の経過にともない，系は内部平衡点に近づいてゆき，定常な共存状態となる．

このように，平衡点の安定性は系の行く末と密接に関係しているが，安定性を数学的に検証することは，多くの場合，計算量が莫大であり，事実上不可能である．

また，内部平衡点が不安定である場合には，その生態系において，すべての種が共存する場合もあれば，ある種が絶滅する場合もある．

したがって，生態系モデルを用いて種の持続 (パーシステンス) や絶滅を考察する際には，安定性の解析とは異なった視点も必要となる．これを数学的に定めたのが「パーシステンス」や「パーマネンス」という概念である．

パーシステンス等の概念は，Freedman and Waltman [3] によって導入されたが，その後様々な研究者により研究され，発展し，用語の使い方さえも変わっ

* Department of Environmental and Mathematical Sciences, Faculty of Environmental Science and Technology, Okayama University, Okayama, 700-8530 Japan.

て来た．また，それぞれの研究は，生態系モデルを視野に入れていたので，それぞれにいろいろな仮定が置かれていて，その全貌は極めて分かりにくい．

更に，近年は生態学モデルのみではなく，体内における免疫・病原体モデルにおいても，感染が持続するか否かという点で，パーシステンスの概念を利用する必要性が出ている．この際には，過去の研究において，生態系を意識しておかれた仮定が成り立つことが期待できない．そこで，免疫・病原体モデルにおいてもパーシステンスを論ずることが出来るように，過去の研究を整理し発展させなくてはならない．

本論文は，その手始めとして，パーシステンスに関する主要な結果のいくつかを整理し，論ずることを目的としている．系のパーシステンスを示す方法として，平均リアプノフ関数を用いる方法と，境界上の流れを調べる方法があるが，ここでは後者について述べる．

2 パーシステンス

ここでは，Butler and Waltman [2], Butler, Freedman, and Waltman [1] と同じ問題設定で考える．後述するように，Thieme [5] はこの設定のなかから本質的に必要となる部分を吟味し，より弱い条件の元でパーシステンスを論じている．しかし，状況を理解するためには，強い条件の下で考える方がよいので，ここではそのようにする．

X を局所コンパクトな距離空間とし，距離を d で表す．E を X の閉部分集合とし，$\mathcal{F}=(E,\mathbf{R},\pi)$ を E 上の連続な流れとする．すなわち，$\pi: E\times\mathbf{R}\to E$ を連続写像とし，$\pi(\pi(x,t),s)=\pi(x,t+s)$ をみたすとする．x を通る軌道，正軌道，負軌道をそれぞれ $\gamma(x)$, $\gamma^+(x)$, $\gamma^-(x)$ と書く．また，E の内部，閉包，境界をそれぞれ $\mathrm{int}E$, $\mathrm{cl}E$, ∂E と書くことにする．

定義 2.1 $\mathcal{F}$ が**弱パーシステント**とは，任意の $x\in\mathrm{int}E$ に対して $\limsup_{t\to\infty} d(\pi(x,t),\partial E)>0$ が成り立つことである．また，$\mathcal{F}$ が**(強) パーシステント**とは，任意の $x\in\mathrm{int}E$ に対して $\liminf_{t\to\infty} d(\pi(x,t),\partial E)>0$ が成り立つことである．

$\mathcal{F}$ が**一様弱パーシステント**とは，ある正数 ε に対して，$\limsup_{t\to\infty} d(\pi(x,t),\partial E)\geq\varepsilon$ が任意の $x\in\mathrm{int}E$ に対して成り立つことである．また，$\mathcal{F}$ が**一様 (強) パーシステント**とは，ある正数 ε に対して，$\liminf_{t\to\infty} d(\pi(x,t),\partial E)\geq\varepsilon$ が任意の $x\in\mathrm{int}E$ に対して成り立つことである．

ここで通常想定しているのは，$X=\mathbf{R}^n$, $E=\mathbf{R}^n_+$ の場合である．ただし $\mathbf{R}^n_+=\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)|\,x_i\geq 0\,(i=1,2,\ldots,n)\}$ である．このときパーシステンスは，大まかに言えば，時間が経過した後，どの変数も 0 から離れていることを意味する．

3 軌道の境界への近づき方

3.1 極限集合，安定集合

パーシステンスを論ずるときには，パーシステンスが成り立たないときに，軌道が境界 ∂E へどのように近づくかを考察することになる．(このアプローチでは，パーシステントは背理法で証明されることになる．)

もっとも典型的な近づき方は，境界上のひとつの平衡点に軌道が近づいてゆく，というものである．しかし，さらに複雑な近づき方もある．たとえば，3 種のロトカ・ボルテラ競争系

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=x_1(1-x_1-\alpha x_2-\beta x_3)\\ \frac{dx_2}{dt}&=x_2(1-\beta x_1-x_2-\alpha x_3)\\ \frac{dx_3}{dt}&=x_3(1-\alpha x_1-\beta x_2-x_3)\end{aligned}\tag{1}$$

は，適当なパラメータ値に対して，その軌道がヘテロクリニックサイクルに近づいていくということが知られている [4]．図 1 はその様子を描いたものである．境界上の (1) の平衡点 $P_1=(1,0,0)$, $P_2=(0,1,0)$, $P_3=(0,0,1)$ とこれらを結ぶ軌道からなる三角 (破線) に解 (実線) が回転しながら近づいていく．この近づきには，回転が進むにつれ，平衡点 P_i の付近に点 $(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$ が留まる時間が長くなるという特徴がある．

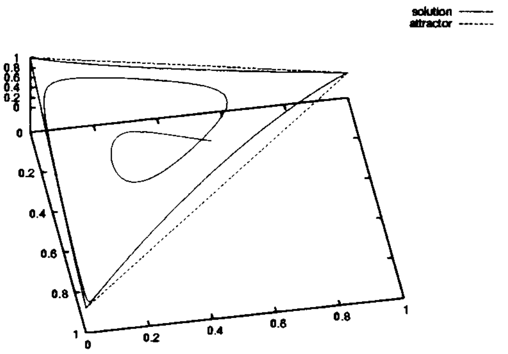

図 1: ヘテロクリニックサイクルに近づく軌道

以上のように, 解軌道が境界へ近づくときには, ひとつの平衡点に近づくだけではなく, いつかの平衡点とそれを結ぶ軌道の和集合に近づく場合がある. このため, 解軌道が近づいてゆく先の集合として, 不変集合を定義する. $M \subset E$ が $\mathcal{F}$ に対して**不変集合**であるとは, 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して $\pi(M,t) = M$ となることである. 平衡点や全軌道は不変集合である. また, 空でない不変集合 M が**孤立**しているとは, M の適当な近傍 V に対して, V に含まれる不変集合が必ず M にも含まれることをいう. このとき, V を M の**孤立化近傍**と呼ぼう.

また, 解軌道の不変集合への近づき方を考察するために, 極限集合と安定集合を定義する.

定義 3.1 $x \in E$ とする. 数列 $\{t_k\}$ で $t_k \to \infty$ $(k \to \infty)$ なるものが存在し, $y = \lim_{k\to\infty} \pi(x, t_k)$ となるとき, y を x の **ω-極限点**という. x の ω-極限点全体からなる集合を, x の **ω-極限集合**とよび, $\Lambda^+(x)$ と表す. また, 数列 $\{t_k\}$ で $t_k \to -\infty$ $(k \to \infty)$ なるものが存在し, $y = \lim_{k\to\infty} \pi(x, t_k)$ となるとき, y を x の **α-極限点**という. x の α-極限点全体からなる集合を, x の **α-極限集合**とよび, $\Lambda^-(x)$ と表す.

α-極限集合と ω-極限集合は, 不変かつ閉であることに注意しよう.

系 (1) の場合, 図 1 の解軌道上の点 x に対して, $\Lambda^+(x)$ は, 図の破線の三角となる.

定義 3.2 不変集合 M の**安定集合** $W^+(M)$ と**不安定集合** $W^-(M)$ を

$$W^+(M) = \{x \in E | \, \Lambda^+(x) \subset M\}$$
$$W^-(M) = \{x \in E | \, \Lambda^-(x) \subset M\}$$

で定める. また, M の**弱安定集合** $W_{\mathrm{w}}^+(M)$ と**弱不安定集合** $W_{\mathrm{w}}^-(M)$ を

$$W_{\mathrm{w}}^+(M) = \{x \in E | \, \Lambda^+(x) \cap M \neq \emptyset\}$$
$$W_{\mathrm{w}}^-(M) = \{x \in E | \, \Lambda^-(x) \cap M \neq \emptyset\}$$

で定める.

つまり, $x \in W^+(M)$ とは, 点 x を通る軌道上の点が時間経過とともに M に限りなく近づくことを意味している. 系 (1) において, 図 1 の解軌道上の点 x に対して, $x \notin W^+(P_1)$ であるが, $x \in W_{\mathrm{w}}^+(P_1)$ である.

3.2 境界上の不変集合への近づき方を限定するための仮定

ここで述べる方法で, パーシステンスを証明するには, パーシステンスが成り立たない, すなわち解軌道がある意味で境界に近づいていく際に, どのように近づいてゆくかを解析し, これにより境界上の流れのパターンを調べ, そのような事が起こらない条件を考察している. したがって, 前提として軌道の様子があまり多様にならないように仮定を設ける.

最初に, $\mathcal{F}$ は**消散的**であるとする. ただし, $\mathcal{F}$ が消散的であるとは, 任意の $x \in E$ に対して $\Lambda^+(x)$ が空でなく, かつ E のすべての点の ω-極限点全体のなす集合が相対コンパクトとなることである. E のすべての点の ω-極限点全体のなす集合を

$$\Omega(\mathcal{F}) = \bigcup_{x \in E} \Lambda^+(x)$$

と書くと, 最後の条件は $\mathrm{cl}\,\Omega(\mathcal{F})$ がコンパクトということになる. $\mathcal{F}$ が消散的なときは, 任意の点 $x \in E$ に対して, $\Lambda^+(x)$ はコンパクトになる. このとき, x を通る半軌道 $\gamma^+(x)$ は有界になることに注意しよう.

次に, 境界 ∂E は $\mathcal{F}$ に対して不変であると仮定する. すると, $\mathcal{F}$ を ∂E に制限した流れを考えることが出来る. これを $\partial\mathcal{F}$ とおく. この境界上の流れ $\partial\mathcal{F}$ の極限点となりうる点があまり豊富でないとし, さらにこの極限点に $\mathrm{int}E$ 内の不変集合が集積していないとする. この仮定のために, 以下の定義をする.

定義 3.3 境界上のながれ $\partial\mathcal{F}$ の ω-極限点全体の集合を

$$\Omega(\partial\mathcal{F}) = \bigcup_{x \in \partial E} \Lambda^+(x)$$

と書くことにする.

流れ $\partial\mathcal{F}$ が**孤立**しているとは, $\Omega(\partial\mathcal{F})$ の被覆

$$\Omega(\partial\mathcal{F}) = \bigcup_{i=1}^{k} M_k \tag{2}$$

で, 以下の性質を持つものが存在することである.

(i) $M_1, M_2, \ldots, M_k$ $(\subset \partial E)$ は $\partial\mathcal{F}$ の孤立不変集合で, コンパクトである.

(ii) $M_1, M_2, \ldots, M_k$ は互いに交わらない.

(iii) $M_1, M_2, \ldots, M_k$ は $\mathcal{F}$ の不変集合としても孤立している.

このとき, 被覆 (2) を**孤立化被覆**とよぶ.

以後, $\partial\mathcal{F}$ は孤立しているとする.

3.3 孤立不変集合への近づき方

境界へ軌道が近づく様子を考える前に, 境界上に限らず, 不変集合への軌道の近づき方を考えてみよう.

M を $\mathcal{F}$ に対するコンパクトな孤立不変集合とする. 点 x を通る軌道が M に近づくことは, 安定化集合の概念で表すと $x \in W^+(M)$ となる.

では, 系 (1) の例 $(M = P_1)$ のように, $x \in W^+_{\mathrm{w}}(M) \setminus W^+(M)$ のときに, 流れがどうなるかを見てみよう. このとき, x を通る軌道は, M に近づいたり M から離れたりをくり返す. 図 2 (左) はその様子の一例を表したものだが, 軌道は回転を増す毎に, より M に近いところを通っていく. 図 2 (右) は, M の近くを描いたものだが, 軌道 $\gamma(x)$ の極限として, M に近づく点の集合 (Γ^+) と M から離れていく点の集合 (Γ^-) が予想される. これを定式化したのが, 次の定理である.

定理 3.1 M を $\mathcal{F}$ に対するコンパクトな孤立不変集合とする. このとき, $x \in W^+_{\mathrm{w}}(M) \setminus W^+(M)$ ならば,

$$\Lambda^+(x) \cap W^+(M) \setminus M \neq \emptyset,$$
$$\Lambda^+(x) \cap W^-(M) \setminus M \neq \emptyset.$$

定理 3.1 の証明の概略を述べよう. V を M の孤立化近傍とする. M がコンパクトなので, V もコンパクトにとれる. 仮定より, x を通る軌道 $\gamma(x)$ は, 無限回 V に出入りする. $x \in W^+_{\mathrm{w}}(M)$ なので, 点列 $\{t_k\}$ で, $t_k \to \infty$ $(k \to \infty)$ をみたし, $x_k = \pi(x, t_k)$ とおくと, $d(x_k, M) \to \infty$ $(k \to \infty)$ となるものがある (図 3). τ_k を負の数で, $\pi(x_k, \tau_k) \in \partial V$, $\pi(x_k, [\tau_k, 0]) \subset V$ となるものとし, $y_k = \pi(x_k, \tau_k)$ とおく (図 3). ∂V はコンパクトなので, 部分列をとりなおすことにより, $y_k \to y$ $(k \to \infty)$ となる $y \in \partial V$ がある. ところで, M が不変集合なので, M に近い点ほど M から離れるのに時間がかかることが, π の連続性からわかる. よって, $\tau_k \to -\infty$ $(k \to \infty)$ となる. これより, 任意の正の数 t に対して, $\pi(y, t)$ が V に含まれることがわかる. なぜなら, この t に対し, k を十分大きくとると, $\pi(y_k, t) = \pi(x_k, \tau_k + t) \in V$ となり, $k \to \infty$ とすると, $\pi(y, t) \in V$ となるからである. よって, $\gamma^+(y) \subset V$, したがって $\Lambda^+(y) \subset V$ となるが, V が孤立化近傍なので, V 内の不変集合 $\Lambda^+(y)$ は M に含まれることになる. よって, $y \in W^+(M)$.

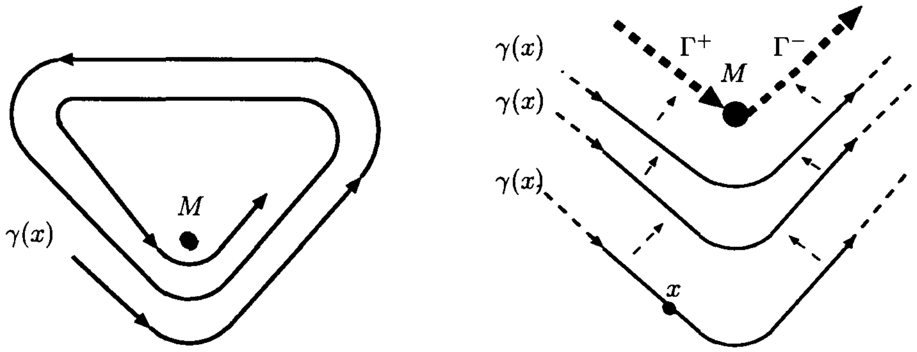

図 2: $x \in W^+_w(M) \setminus W^+(M)$ を通る軌道 $\gamma(x)$

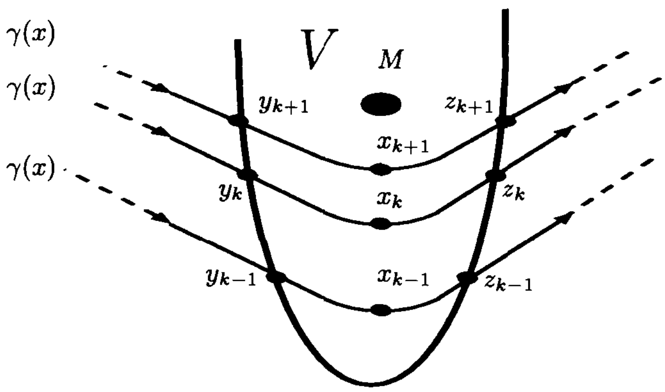

図 3: 軌道上の点列

最後に $y \in \Lambda^+(x)$ をいう．これは，$y = \lim_{k\to\infty} \pi(x, t_k + \tau_k)$ であるから，$t_k + \tau_k \to \infty$ をいえばよい．これが成り立たないと仮定すると，$t_k + \tau_k$ は有界になり，部分列をとりなおすと，$t_k + \tau_k \to \tau$ なる τ がとれる．このとき，$y_k = \pi(x, t_k + \tau_k) \to \pi(x, \tau)$ となるが，この極限は y だったので，$y = \tau(x, \tau)$ となり，$\Lambda^+(y) = \Lambda^+(x)$ となる．上で $y \in W^+(M)$ を示したが，これは仮定 $x \notin W^+(M)$ に反する．

同様に，$\pi(x_k, \sigma_k) \in \partial V$, $\pi(x_k, [0, \sigma_k]) \subset V$ なるように正の数 σ_k を定め，$z_k = \pi(t_k, \sigma_k)$ の極限点 z を考えると，$z \in \Lambda^-(x) \cup W^+(M) \setminus M$ となる．

以上が定理 3.1 の証明の概要である．

3.4 軌道の境界への近づき方と境界上の流れ．

次に，軌道が境界へ近づくときの様子と，境界上の流れを見てみよう．

第一に考えられるのは，x $(\in \mathrm{int}E)$ を通る軌道が，境界上の不変集合 M_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ に引き込まれるときである．ただし，$\Omega(\partial\mathcal{F}) = \bigcup_{i=1}^k M_i$ は孤立化被覆である．これは，$x \in W^+(M_i)$ で表される．

それでは，どのような $x \in \mathrm{int}\, E$ に対してもそうならないとき，すなわち $\mathrm{int}E \cap W^+(M_i) = \emptyset$ のときはどうなるであろうか．これが成り立ち，なおかつ $x \in$

int$E$ を通る軌道が $\limsup_{t\to\infty} d(\pi(x,t),\partial E)=0$ となるとき, 軌道 $\gamma(x)$ はどのようになるかを見てみよう.

このとき, $z\in\Lambda^+(x)\cap\partial E$ なる点 z がある. $\Lambda^+(x)$ が不変かつコンパクトであるから $\Lambda^+(z)$ は空でなく $\Lambda^+(z)\subset\Lambda^+(x)$ となる. 一方, $z\in\partial E$ であるから $\Lambda^+(z)\subset\Omega(\partial\mathcal{F})$ である. よって, $\Lambda^+(x)\cap\Omega(\partial\mathcal{F})\neq\emptyset$. したがって, $\Lambda^+(x)\cap M_{i_1}\neq\emptyset$, すなわち $x\in W^+_{\mathrm{w}}(M_{i_1})$ となる M_{i_1} がある. ここで, $x\in\mathrm{int}E$ なので $x\notin W^+(M_{i_1})$ に注意する.

次に,

$$x\in W^+_{\mathrm{w}}(M_{i_1})\setminus W^+(M_{i_1}) \tag{3}$$

なる $x\in\mathrm{int}E$ があることにより, 境界上の流れに制限が出来ることを述べる. そのために, いくつか定義をする.

定義 3.4 $x\in\Lambda^-(M_1)\cap\Lambda^+(M_2)$ なる $x\notin M_1\cup M_2$ が存在するとき, 孤立不変集合 M_1 から M_2 へのチェーンがあるといい, $M_1\to M_2$ と書く.

有限個の孤立不変集合からなる族 $\{M_i\}$ のサイクルとは, 部分族 $\{M_{i_k}\}$ で $M_{i_1}\to M_{i_2}\to\cdots\to M_{i_m}\to M_{i_1}$ となるものをいう. ただし, m は 1 以上の整数である.

さて, (3) をみたす $x\in\mathrm{int}E$ が存在することにより, $\{M_i\}$ はサイクルを持つことを示そう.

(3) が成り立つので, 定理 3.1 より,

$$p_{i_1}\in\Lambda^+(x)\cap W^+(M_{i_1})\setminus M_{i_1} \tag{4}$$

なる p_{i_1} が存在する. この p_{i_1} を通る軌道は, $t\to\infty$ のとき, M_{i_1} に引き寄せられる.

次に, p_{i_1} を通る軌道の, $t\to-\infty$ のときの挙動をみてみよう. 仮定より $W^+(M_{i_1})\subset\partial E$ なので, $p_{i_1}\in\partial E$ であることに注意する. また, p_{i_1} はコンパクトな不変集合 $\Lambda^+(x)\cap\partial E$ の元なので $\Lambda^-(p_{i_1})$ も空でない ∂E のコンパクト集合となる. 特に $\Lambda^-(p_{i_1})\subset\partial E$ なので, $\Lambda^+(\Lambda^-(p_{i_1}))\subset\Omega(\partial\mathcal{F})$. $\Lambda^-(p_{i_1})$ もコンパクトかつ不変なので, $\emptyset\neq\Lambda^+(\Lambda^-(p_{i_1}))\subset\Lambda^-(p_{i_1})$. よって, $\Lambda^-(p_{i_1})\cap\Omega(\partial\mathcal{F})\neq\emptyset$, すなわち $\Lambda^-(p_{i_1})\cap\left(\bigcup_{i=1}^k M_i\right)\neq\emptyset$.

これには, $\Lambda^-(p_{i_1})$ がどの M_i にも含まれない場合と, $\Lambda^-(p_{i_1})\subset M_{j_1}$ となる M_{j_1} が存在する場合の 2 通りの場合がある.

最初に, $\Lambda^-(p_{i_1})$ がどの M_i にも含まれない場合を考える. $\Lambda^-(p_{i_1})\cap\left(\bigcup_{i=1}^k M_i\right)\neq\emptyset$ であったので, , $\Lambda^-(p_{i_1})\cap M_{i_2}\neq\emptyset$ なる M_{i_2} がある. $\Lambda^-(p_{i_1})\not\subset M_{i_2}$ だったので,

$$p_{i_1}\in W^-_{\mathrm{w}}(M_{i_2})\setminus W^-(M_{i_2}) \tag{5}$$

となる. このとき, 定理 3.1 より, $q_{i_2}\in\Lambda^-(p_{i_1})\cap W^-(M_{i_2})\setminus M_{i_2}$ なる q_{i_2} がある. $\Lambda^-(p_{i_1})\subset\partial E$ より q_{i_2} は境界 ∂E の点となり, $\Lambda^+(q_{i_2})\subset\Omega(\partial\mathcal{F})=\bigcup_{i=1}^k M_i$ となるが, 消散性より, $\Lambda^+(q_{i_2})$ は有界で, よって連結なので, 被覆を構成する M_i のうちひとつに含まれる. よって, $\Lambda^+(q_{i_2})\subset M_{i_3}$ となる M_{i_3} がある. 以上より, M_{i_2} から M_{i_3} へのチェーンがある.

さらに, $\Lambda^-(p_{i_1})$ は q_{i_2} を含む不変集合なので, $\Lambda^+(q_{i_2})\subset\Lambda^-(p_{i_1})$. また, $\Lambda^+(q_{i_2})\subset M_{i_3}$ であったので, $\Lambda^-(p_{i_1})\cap M_{i_3}\neq\emptyset$. すなわち $p_{i_1}\in W^-_{\mathrm{w}}(M_{i_3})$. 今, いかなる M_i も $\Lambda^-(p_{i_1})$ を含まない場合を考えているので, $W^-_{\mathrm{w}}(M_{i_3})\setminus W^-(M_{i_3})\neq\emptyset$. これより, (5) 以降の議論を用いると, ある M_{i_4} に対して, M_{i_3} から M_{i_4} へのチェーンがある. M_i は有限個なので, これを繰り返せばサイクルができる.

次に, $\Lambda^-(p_{i_1})\subset M_{j_1}$ となる M_{j_1} が存在する場合を考える. このときは, M_{j_1} から M_{i_1} へのチェーンがある. $p_{i_1}\in\Lambda^+(x)$ だったので, $\Lambda^+(x)$ が不変でコンパクトなことから, $\Lambda^-(p_{i_1})\subset\Lambda^+(x)$. よって, $\Lambda^+(x)\cap M_{j_1}\neq\emptyset$, すなわち, $x\in W^+_{\mathrm{w}}(M_{j_1})$. x は E の内点なので, $x\notin W^+(M_{j_1})$. すなわち,

$$x\in W^+_{\mathrm{w}}(M_{j_1})\setminus W^+(M_{j_1}) \tag{3'}$$

これは, (3) と同じ状況であり, やはり定理 3.1 より, (4) と同等な式

$$p_{j_1}\in\Lambda^+(x)\cap W^+(M_{j_1})\setminus M_{j_1} \tag{4'}$$

がなりたつ. よって, 先と同様に, $\Lambda^-(p_{j_1})\cap\left(\bigcup_{i=1}^k M_i\right)\neq\emptyset$ となり, やはり同様に, $\Lambda^-(p_{j_1})$ がどの M_i にも含まれない場合と, $\Lambda^-(p_{j_1})\subset M_{j_1}$ となる M_{j_1} が存在する場合の 2 通りの場合に分かれる.

$\Lambda^-(p_{j_1})$ がどの M_i にも含まれない場合には, 先と同様で, サイクルができる. また, $\Lambda^-(p_{j_1}) \subset M_{j_2}$ となる M_{j_2} が存在する場合にも, この手続きを繰り返せばサイクルができる.

以上をまとめると, 次の補題を得る.

補題 3.1 $W^+(M_i) \cap \mathrm{int}E = \emptyset$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ とする. このとき, $\Lambda^+(x) \cap \partial E \neq \emptyset$ なる $x \in \mathrm{int}E$ が存在すれば, $\{M_i\}$ はサイクルを持つ.

これをパーシスンテンスのための十分条件の形であらわすと次のようになる.

定理 3.2 $W^+(M_i) \cap \mathrm{int}E = \emptyset$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ とする. また, 孤立化被覆は決してサイクルを作らないとする. このとき, $\mathcal{F}$ はパーシステントである.

4 ω-極限集合の族が境界に近づくとき

このセクションでは, ω-極限集合の族の収束を考えたいので, 準備として, 距離空間の部分空間のなす集合の位相について述べる. Y を距離 d を持つ距離空間とし, $\mathcal{K}(Y)$ を Y のコンパクト集合全体からなる集合とする. $A, B \in \mathcal{K}(Y)$ に対して, Hausdorff 距離を

$$d(A, B) = \max\{\inf_{a \in A} d(a, B), \inf_{b \in B} d(b, A)\}$$

で定めると, $\mathcal{K}(Y)$ は距離空間となる. Y が完備であれば $\mathcal{K}(Y)$ も完備となり, Y がコンパクトであれば $\mathcal{K}(Y)$ もコンパクトになる [6].

さて, 力学系の話に戻ろう. $\mathcal{F}$ が一様パーシステントでないとすると, ω-極限集合の列 $\{\omega_n\}$ が境界に近づいてゆく. すなわち, $d(\Omega_n, \partial E) \to 0$ $(n \to \infty)$. 更に, $\mathcal{F}$ がパーシステントと仮定すると, $\omega_i \subset \mathrm{int}E$ である. 各 ω_n 内の適当な点をとれば, その点を通る軌道の閉包 $\mathrm{cl}\,\gamma_n \subset \mathrm{int}E$ に対して, $d(\gamma_n, \partial E) \to 0$ $(n \to \infty)$ とできる.

今, 消散性より $\mathrm{cl}\,\Omega(\mathcal{F})$ はコンパクトであるから, $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathrm{cl}\,\Omega(\mathcal{F}))$ は Hausdorff 距離を用いてコンパクトな距離空間になる. $\{\omega_n\} \subset \mathcal{K}$ であるから, 部分列をとり直すことにより, $d(\omega_n, \omega) \to 0$ $(n \to \infty)$ なるコンパクト集合 ω が存在する. ω_n が不変なので, ω も不変になる. $n \to \infty$ のとき, $d(\omega_n, \partial E) \to 0$ なので, $\omega \cap \partial E \neq \emptyset$ である. $\omega \cap \partial E$ はコンパクト不変集合なので, この点の ω-極限集合はすべてこの集合に含まれ, しかも空でない. よって, $\omega \cap \Omega(\partial\mathcal{F}) \neq \emptyset$. よって, $\Omega(\partial\mathcal{F})$ の孤立化被覆 $\{M_i\}$ に対し, $\omega \cap M_{i_1} \neq \emptyset$ なる i_i が存在する.

次に, $\omega \cap M_{i_1} \neq \emptyset$ のときに, ある M_{i_2} が存在して, M_{i_2} から M_{i_1} へのチェーンがあることを示す.

M_i の E における孤立化近傍 U_i, V_i を $\mathrm{cl}\,U_i \subset V_i$ ととる. ただし, M_i がコンパクトなので, U_i, V_i をコンパクトで $U_i \subset \mathrm{int}\,V_i$ とになるようにとり直せる. $\omega \cap M_{i_1} \neq \emptyset$ なので, n が十分大きければ, $\omega_n \cap U_{i_1} \neq \emptyset$ である. $\omega_n \subset \mathrm{int}E$ なので, 不変集合 ω_n は U_{i_1} に含まれない. なぜなら, そうでないとすると, U_{i_1} が孤立化近傍なので, $\omega_n \subset M_{i_1}$ となり矛盾するからである.

したがって, 十分大きな n に対して, $0 \leq s_{1n} \leq t_{1n}$ なる数と, 点 $x_{1n} \in \gamma_n$ で, $x_{1n} \in \partial U_{i_1}$, $\pi(x_{1n}, t_{1n}) \in \partial U_{i_1}$, $d(\pi(x_{1n}, s_{1n}), \omega \cap M_{i_1}) \to 0$ $(n \to \infty)$, $\pi(x_{1n}, [0, t_{1n}]) \subset U_{i_1}$ なるものが存在する. ここで, $y_{1n} := \pi(x_{1n}, s_{1n})$, $z_{1n} := \pi(x_{1n}, t_{1n})$ とおく.

命題 4.1 $d(x_{1n}, \partial E) \to 0$ $(n \to \infty)$.

(証明) これが成り立たないとする. ∂U_{i_1} がコンパクトなことから, 部分列をとり直して, $x_{1n} \to \tilde{\xi}_1$ $(n \to \infty)$ なる $\tilde{\xi}_1 \in \partial U_{i_1}$ が存在する. $d(x_{1n}, \partial E)$ が 0 に収束しないので, $\tilde{\xi}_1 \in \mathrm{int}E$. また, 部分列をとり直して, $y_{1n} \to \tilde{\eta}_1 \in \omega \cap M_{i_1}$ とできる.

この $\tilde{\xi}_1$ に対して, これを通る正軌道 $\gamma^+(\tilde{\xi}_1)$ は V_{1n} には含まれない. なぜなら, もし $\gamma^+(\tilde{\xi}_1) \subset V_{1n}$ なら, $\Lambda^+(\tilde{\xi}_1) \subset V_{1n}$ となる. $\Lambda^+(\tilde{\xi}_1) \subset M_{i_1}$ なら, パーシステンスに反し, そうでないなら V_{i_1} が孤立化近傍であることに反する.

$\tilde{\xi}_1 \in \partial U_{i_1} \subset V_{i_1}$ を通る正軌道が $t = \tau_1$ で始めて V_{i_1} の外に出るとする. $\tilde{\zeta}_1 = \pi(\tilde{\xi}_1, \tau_1) \in \partial V_{i_1}$ とおくと, $n \to \infty$ のとき, $x_{1n} \to \tilde{\xi}_1$ より $\pi(x_{1n}, \tau_1) \to \tilde{\zeta}_1$. $\tilde{\zeta}_1$ は U_{1n} の外部にあるので, n

が大きいときには，$\pi(x_{1n},\tau_1)$ も U_{1n} の外にある．よって，$0 < s_{1n} < t_{1n} < \tau_1$．よって部分列をとり直して，$s_{1n} \to \sigma$ なる σ がとれ，$0 < \sigma < \tau_1$．よって，$\pi(x_{1n},s_n) \to \tilde{\eta}_1 \in \omega \cap \partial E$ であったので，$\tilde{\eta}_1 = \pi(\tilde{\xi}_1,\sigma) \in \partial E$ となる．$\tilde{\xi}_1 \in \mathrm{int}E$ であったので，これは $\mathrm{int}E$ の不変性に反する．(∂E が不変と仮定しているので，内部 $\mathrm{int}E$ も不変である．) (証明終)

さて，命題 4.1 より，部分列をとり直すと，$x_{1n} \to \xi_1$ $(n \to \infty)$, $\xi_1 \in \partial U_{i_1} \cap \partial E$ とできる．$\gamma(\xi_1)$ を考える．

命題 4.2 $\Lambda^+(\xi_1) \subset M_{i_1}$．

(証明) 最初に $\gamma^+(\xi_1) \subset V_{i_1}$ を示す．これを否定すると，$\gamma^+(\xi_1)$ が V_{i_1} の外に出る．命題 4.1 の証明第 3 段落と同じ議論で，$\gamma^+(\xi_1)$ は $\omega \cap M_{i_1}$ の点を含むことになる．$\xi_1 (\in \partial U_{i_1})$ は M_{i_1} の点ではないので，これは M_{i_1} の不変性に反する．

よって，$\Lambda^+(\xi_1) \subset V_{i_1}$．$V_{i_1}$ が M_{i_1} の孤立化近傍なので，V_{i_1} に含まれる不変集合 $\Lambda^+(\xi_1)$ は M_{i_1} に含まれる．(証明終)

次に，ξ_1 の α-極限集合を考える．γ_n が一様に有界なので，$\gamma^-(\xi_1)$ も有界となる．よって，$\Lambda^-(\xi_1)$ は空ではないコンパクト不変集合になる．また，$\xi_1 \in \partial E$ なので，∂E の不変性より $\Lambda^-(\xi_1) \in \partial E$．よって，$\Lambda^-(\xi_1) \cap \Omega(\partial\mathcal{F}) \neq \emptyset$．よって，セクション 3.4 において $\Lambda^-(p_{i_1})$ に対して示したのと同様に，$\Lambda^-(\xi_1) \cap \left(\bigcup_{i=1}^k M_i\right) \neq \emptyset$ となり，$\Lambda^-(\xi_1) \cap M_{i_2} \neq \emptyset$ なる M_{i_2} がある．

$x_{1n} \to \xi_1$, $d(\omega_n,\omega) \to 0$ だったので，π の連続性より，$\Lambda^-(\xi_1) \subset \omega$．よって，$\omega \cap M_{i_2} \neq \emptyset$．よって，命題 4.2 の証明で $+$ を $-$ におき代えて時間方向を逆にすると，$\Lambda^-(\xi_1) \subset M_{i_2}$．

以上により，ξ_1 を通る起動は，M_{i_2} から M_{i_1} へのチェーンがあることがわかった．

$\omega \cap M_{i_2}$ であったので，このセクションの第 4 段落に戻って，ある M_{i_3} に対して，M_{i_3} から M_{i_1} へのチェーンがある．

これを繰り返すと $\{M_i\}$ のサイクルが出来る．

以上をまとめると，次の定理になる．

定理 4.1 $\mathcal{F}$ がパーシステントとする．また，任意の i に対して，$W^+(M_i) \cap \mathrm{int}E = \emptyset$ とする．このとき，ω-極限集合の列 ω_n が存在して，$d(\omega_n,\partial E) \to 0$ $(n \to \infty)$ であるとすれば，M_i のサイクルが存在する．

これをパーシステンスの十分条件の形にすると，次の定理になる．

定理 4.2 $W^+(M_i) \cap \mathrm{int}E = \emptyset$ $(i = 1,2,\ldots,k)$ とする．また，孤立化被覆はサイクルをもたないとする．このとき，$\mathcal{F}$ は，パーシステントであれば，一様パーシステントである．

この定理と定理 3.4 をあわせると次の定理を得る．

定理 4.3 $W^+(M_i) \cap \mathrm{int}E = \emptyset$ $(i = 1,2,\ldots,k)$ とする．また，孤立化被覆はサイクルをもたないとする．このとき，$\mathcal{F}$ は一様パーシステントである．

5 考察

先にも述べたように，セクション 3.2 でおいた仮定は，この議論のためには強すぎる．たとえば，消散性の仮定において，$\mathrm{cl}\left(\bigcup_{x\in E}\Lambda^+(x)\right)$ をコンパクトとしたが，今までの議論では，境界 ∂E の傍にある点 x に対してのみ $\Lambda^+(x)$ を考えているので，すべての $x \in E$ に対する $\Lambda^+(x)$ の和集合を考えるのはやりすぎである．

Thieme [5] は，セクション 4 の議論を次のような弱い仮定の下で論じている．

仮定 $(C_{4,1})$ 以下の 1, 2 をみたす $\delta > 0$ が存在する:

1. $x \in E$ がすべての $t \geq 0$ に対し $d(\pi(x_n,t),\partial E) < \delta$ をみたすなら，$\gamma^+(x)$ は相対コンパクトである．

2. $\{x_n\} \subset E$ が $\limsup_{t\to\infty} d(\pi(x_n,t),\partial E) \to 0$ $(n \to \infty)$ をみたすなら，$\mathrm{cl}\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\Lambda^+(x_n)\right)$ はコンパクトである．

この他にも，Thieme [5] は，流れの代わりに半流を対象としたり，E の局所コンパクトな距離空間という仮定を除き，代わりの仮定を設けたりするなど，

パーシステンスの結果を拡張している．しかし，我々の目的のためには，更なる理論の整理，検討が必要であり，それは今後の課題である．

参考文献

[1] Geoffrey Butler, I. Freedman, H, and Paul Waltman. Uniformly persistent systems. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 96:425–430, 1986.

[2] Geoffrey Butler and Paul Waltman. Persistence in dynamical systems. *J. Differential Equations*, 63:255–263, 1986.

[3] H. I. Freedman and P. Waltman. Mathematical analysis of some three speces food chain models. *Math. Biosci.*, 33:275–231, 1977.

[4] Josef Hofbauer and Karl Sigmund. *Evolutionary Games and Population Dynamics*. Cambridge University Press, 1998.

[5] Horst R. Thieme. Persistence under relaxed point-dissipativity (with application to an endemic model). *SIAM J. Math. Anal.*, 24:407–435, 1993.

[6] 矢野公一. **距離空間と位相構造**. 共立出版, 1997.