

氏名	田中 広志
授与した学位	博士
専攻分野の名称	理学
学位授与番号	博甲第3123号
学位授与の日付	平成18年 3月24日
学位授与の要件	自然科学研究科数理電子科学専攻 (学位規則第4条第1項該当)
学位論文の題目	Ladder index of groups and quantifier elimination of ordered abelian groups (群のラダーインデックスと順序アーベル群の限量記号の消去)
論文審査委員	教授 中村 博昭 教授 吉野 雄二 助教授 平野 康之

学位論文内容の要旨

まず、私は田中克己氏（岡山大自）と当時岡山大学院生であった石川氏と共に、群において重要な論理式である可換性論理式 $(xy = yx)$ についての有限なラダーインデックスを持つ群の分類について研究しました。その結果、可換性論理式 $(xy = yx)$ についてのラダーインデックスが6までの群の分類ができました。特にラダーインデックスが1、3、5である群は存在しないことを示せました。また、群論において考えられていたギャップ数（中心化群の下降列に関する数）と可換性論理式についてのラダーインデックスに関係性を見いだすことに成功しました。

第二に、順序アーベル群の直積において自然に考えられた言語での限量記号の消去可能性について研究しました。私はまず整数の有限直積構造や、整数の有限直積と有理数との直積構造に対して、それぞれ具体的な公理系を与えることに成功しました。さらに私は、順序アーベル群の直積構造が前述の言語で限量記号の消去を許すならば、それは必ず前述の二つの構造のどちらか一方になることを示しました。そのほか、先の二つの構造にはモデル理論的に独立の概念が定義できることを示すことにも成功し、モデル理論的代数的閉部分集合の形を決定付けました。

最後に、一般の言語での順序アーベル群の直積において限量記号の消去可能な構造の特徴付けについて研究しました。鈴木氏（元筑波大数学系）は、一般の言語で限量記号の消去を許す順序アーベル群と可除アーベル群との直積としての順序アーベル群が、言語に無限小を解釈する記号を含めたもので、限量記号の消去を許すことを示しました。私は岡山大学院生の横山氏と共にまず、鈴木氏の結果を非常に基礎的な証明方法で示すことに成功しました。さらに鈴木氏の逆向きの結果が成り立つことをも示しました。また直積群に関する公理化可能性についても成果を得ることに成功しました。

論文審査結果の要旨

本学位論文は、申請者の数理論理学（モデル理論）に関する一連の研究をまとめている。最初の部分では、群において重要な論理式である可換性論理式 $(xy = yx)$ について有限なラダーインデックスを持つ群の分類、特にラダーインデックスが1, 3, 5である群の非存在を示し、ラダーインデックスが5までの群の分類を完成させるとともに、ラダーインデックスが6の群の例を見出している。また群論的な不変量であるギャップ数 (g と表す) と、可換性論理式についてのラダーインデックス (l と表す) において $l = g + 2$ という関係性を示し、ギャップ数に関する従来の理論をラダーインデックスの研究分野に応用する道を切り開いた。次の部分では、順序アーベル群の直積という代数構造において自然な特定の言語での限量記号の消去可能性について研究を行っている。バイスフェニング・古森の結果により、整数全体の有限直積や、それと有理数全体との直積、のいずれかの型の構造において限量記号消去が可能であることを示されていたが、ここでは逆に限量記号消去可能性から、与えられた順序アーベル群の直積構造が上記2タイプのいずれかの形でなければならないことを証明し、順序アーベル群直積構造の中での限量記号消去可能性の特徴づけに成功している。最後の部分では、一般の言語での限量記号消去可能な順序アーベル群と可除群の直積構造において、無限小記号を含めた言語で限量記号の消去可能性を示した鈴木の結果に対して、より初等的な方法による証明を与えるとともに、鈴木氏とは逆向きの結果として直積型の順序アーベル群 $G = H \times K$ が無限小記号を含めた言語で限量記号消去可能であることを仮定して、順序アーベル群 H における消去可能性と順序アーベル群 K の可除性が従うことを証明している。これらの結果は、いずれも当該分野における基礎的な問題に対して地道ながら完成度の高い精緻な結論を与えており、今後の発展のためにはなくてはならない重要な成果である。以上の理由から、申請者の研究は、博士号学位にふさわしいものと判定する。