

# 低学年のたし算・引き算での シンボリックな操作について

平井安久

## 1. はじめに

筆者がすでに実施してきた1991年以降のたし算・引き算に関する調査（小学校1年生が対象）の結果の一つとして得られたことは『 $11+6$ ,  $3+10$ ,  $4+12$ ,  $15-5$ などの間には、暗算で（10進位取り記数法にもとづいた方法で）答え、他の間（ $8+6$ など）には、指やオハジキによる解法を示す子どもが存在する』ことであった。これらの子どもは、例えば $11+6$ では、「10が1個と1が1つ、さらに1が6つ。合わせて10が1つと、1が7つになる。」という暗算をすることができるのである。このことは、ある一部分のたし算（引き算）の間については、暗算ですべて操作できるだけの、記号的な処理ができていているということを意味している。

記号的な処理については、Sinclair and Sinclair (1986) および Hiebert (1988, 1989) が記号と理解の結びつきについて論じた。本研究では、Hiebertのレベル分類（後述）にしたがって、子どものたし算・引き算の活動をとりえ、次のような2桁の数のたし算・引き算の可能性について考えることにする。

---

小学校1年生のたし算の問い（繰り上がりの有無を含めて）の全てを暗算で解決できなくても、特定の一部の問い（後述）についてHiebertのレベル（後述）でSite 3のレベルにあるなら、 $13+24$ のような、（小学校2年生レベルの）2桁の数のたし算を解決することが可能であるかどうかということ。

小学校1年生の引き算の問いについても、同様の理由で、 $25-12$ のような、（小学校2年生レベルの）2桁の数の引き算を解決することが可能であるかどうかということ。

---

## 2. 記号と理解との結びつき

### 2.1 Hiebertのレベル分類

Hiebert (1988, 1989) は、記号と理解との結びつきのレベルをSiteという語を用いて以下のように3段階で説明した。

Site 1：記号に意味を持たせることができる。

例えば、 $42-19$ は、42個のものから19個取り去るという動作に結びつくようになること。

Site 2：ルールに意味を持たせることができる。

記号の操作とももの操作が結びつくこと。例えば、 $42-19$ では、具体物での動作と引き算のルールとが結びつくこと。ただし、このSite 2では、 $42-19=37$ といった誤答のようなルールを正しく使いきれない場合の誤りも存在する。

Site 3：答えの適正さをしらべることができる。

例えば、 $42-19$ では、答えは42よりおよそ20小さいという見積もりができること。逆に、いくつもの答えを認めるようであれば、まだSite 3に達していないことになる。

## 2.2 たし算での事例

1991年に実施した調査のデータから以下の子ども125の事例をあげる。この調査は、子どものたし算ストラテジーを調べる目的で、一対一で子どもにカード（ $7+3$ のように書いたもの）を見せて、反応をみるというインタビュー方式でおこなったものである。

その調査での子ども125の解答は以下のようにいくつかに分けられる：

答えを記憶していてすぐ答えたもの：

$7+3$ ,  $2+5$ ,  $2+8$ ,  $6+6$ ,  $9+9$ .

オハジキを被加数と加数分並べて数えたもの：

$9+6$ ,  $7+8$ ,  $4+12$ .

指を被加数と加数の数だけ曲げ伸ばしして数えたもの：

$3+6$ ,  $4+7$ ,  $4+9$ ,  $7+7$ ,  $8+8$ .

指を使って数えたしをしたもの：

$8+6$ ,  $9+7$ .

さらに、 $11+6$ での反応は以下の通りであった：

.....  
 すぐに「17」と答えた。インタビューアが説明を求めると「10あってから6あってから、(カードの11という数字をさして) こっちに1あるから、6をこっちに入れてから17。」と説明をした。  
 .....

さらに、 $3+10$ ,  $10+7$ でも即座に解答した。

その他に、 $5+8$ では、 $5+5$ で10としてからさらに3をたして13とした。 $7+5$ では、暗算で12と答えたが説明はできなかった。

以上の結果より、子ども125の全体的な特徴を見ると次のようなことがわかる。

- (ア) 和が10以下になるたし算については既に答えを記憶している。同数の和についても一部の組み合わせは答えを記憶している。
- (イ) 和が11以上になる繰り上がりのある場合のたし算については、多くの場合はオハジキあるいは指を用いて被加数分と加数分に対応させて数えて和を求めている。(ただし、いくつかの場合では、指を用いた数えたしをしている。)
- (ウ)  $11+6$ のように和が11以上でかつ繰り上がりを伴わない場合には、暗算が可能である。これらの結果を、HiebertのSite 1からSite 3に対応させて考えると、上記(イ)で述べたように、 $9+6$ のようにオハジキを被加数と加数分並べて数えた場合、および $4+7$ のように指を被加数と加数の数だけ曲げ伸ばしして数えた場合については、Site 2のレベルに対応すると考えられる。ところが、(ア)で述べたように、 $7+3$ などでは答えを記憶していてすぐ答えたのであるから、Site 3のレベルに対応するといえる。さらに(ウ)で述べたように、 $11+6$ の場合は、一の位の1と6をたして、その和7と10をたすという操作をしている。よってSite 3のレベルに対応するといえる。

Gray and Tall(1994)は、たし算の問いを、

- A. 和が10以下になる1桁の数どうしのたし算、
- B. 和が20以下になる1桁の数と10いくつという数のたし算、
- C. 和が11以上20以下になる1桁の数どうしのたし算、

に3分類にして調査を行った。これらA, B, Cから上記の(ア), (イ), (ウ)の特徴への対応が見られることがわかる。

### 2.3 引き算での事例

1992年に実施した調査のデータから以下の子ども102の事例をあげる。調査方法等は前述のたし算の場合と同様である。

オハジキを被減数分並べてから減数分取り去って残りを数えたもの：

6-4, 9-6, 11-8, 12-5, 10-7, 11-3,  
13-6, 14-7, 15-3, 16-7, 17-9, 18-9, 17-8.

指を曲げ伸ばしして数えたもの：なし。

即座に解答したもの：

8-2, 10-3, 15-5, 18-8.

子ども102の全体的な特徴を見ると次のようなことがわかる。

- (ア) 8-2, 10-3では、既に答えを記憶している。ただし、6-4, 9-6では、オハジキが必要である。
- (イ) 15-5, 18-8のように、繰り下がりのない2桁の数から1桁の数を引くものでも、既に答えを記憶している。
- (ウ) 被減数が10より大きく、繰り下がりのあるものでは、全てオハジキが必要である。

これらの結果を、HiebertのSite 1からSite 3に対応させて考えると、子ども102は6-4, 9-6, 15-5, 18-8の問いのみについてSite 3のレベルにあって、その他の全ての問いについてはSite 1にあると考えられる。

### 2.4 2桁の数のたし算・引き算の可能性

2.2節では、「和が10以下になる1桁の数どうしのたし算」では、記号と理解の結びつきのレベルがSite 3であり「和が20以下になる1桁の数と10いくつという数のたし算」においてもSite 3である場合がみられることがわかった。そして2.3節では、他の問ではSite 1のレベルであっても15-5, 18-8のような場合にはSite 3のレベルになることがわかった。

では、以下の①や②のような2桁の数のたし算・引き算の場合は、記号と理解の結びつきのレベルはどのようになるであろうか。

- ① 2桁の数どうしのたし算。ただし、各桁ともに和が10を超えるような繰り上がりのないもの。13+24など。
- ② 2桁の数から2桁の数を引く引き算。ただし、各桁ともに繰り下がりのないもの。25-12など。

①や②に該当するもので、現在小学校1年生段階で扱われるのは、40+30, 27+30, 57-20, 70-20といった特殊なもののみである。しかし、上述のようにそれぞれの位で和が10を超えてさらに繰り上がりのないたし算の場合、および繰り下がりのない2桁の数から1桁の数を引く引き算の場合には、記号と理解の結びつきのレベルが高いことが考えられるので、2桁の数のたし算・引き算でもある程度の可能性が考えられる。その可能性を探るための手順について次節で述べる。

### 3. 質問の手順

#### 3.1 たし算の場合

##### ステップ0

インタビューア：以下の問を与えて、各問ごとに解法の説明をさせる。

「 $6 + 3$  はいくつ？」

「 $2 + 8$  はいくつ？」

「 $7 + 5$  はいくつ？」

「 $8 + 6$  はいくつ？」

「 $9 + 9$  はいくつ？」

子どもが、いずれの方法で解決しても、ステップ1へ。

##### ステップ1

インタビューア：以下の問を与えて、各問ごとに解法の説明をさせる。

「 $10 + 6$  はいくつ？」

「 $12 + 3$  はいくつ？」

「 $11 + 7$  はいくつ？」

子どもが、

①暗算で、一の位どうしをたして、10をたすという作業をしたならステップ2へ。

②それ以外の場合は、カードを見せながら以下の質問をした後に、ステップ2へ。

( $12 + 3$ を見せながら)「12の中には10が何個ある？ 1が何個ある？」

( $11 + 7$ を見せながら)「11の中には10が何個ある？ 1が何個ある？」

##### ステップ2

インタビューア：以下の問を与えて、各問ごとに解法の説明をさせる。

「 $20 + 10$  はいくつ？」

「 $30 + 20$  はいくつ？」

「 $50 + 30$  はいくつ？」

子どもが、

①暗算で、十の位どうしをたして、答えを出したらステップ3へ。

②指で「 $2 + 1$ 」「 $3 + 2$ 」「 $5 + 3$ 」に対応する解法を見せたらステップ3へ。

③それ以外の場合は、カードを見せながら以下の質問をした後に、ステップ3へ。

( $20 + 10$ を見せながら)「20の中には10が何個ある？」

( $30 + 20$ を見せながら)「30の中には10が何個ある？ 20の中には10が何個ある？」

( $50 + 30$ を見せながら)「50の中には10が何個ある？ 30の中には10が何個ある？」

##### ステップ3

インタビューア：以下の問を与えて、各問ごとに解法の説明をさせる。

「 $23 + 10$  はいくつ？」

「 $36 + 20$  はいくつ？」

「 $40 + 32$  はいくつ？」

①暗算で、十の位どうし、一の位どうしをたして答えを出したらステップ4へ。

②それ以外の場合は、カードを見せながら以下の質問をした後に、ステップ4へ。

( $23 + 10$ を見せながら)「23の中には10が何個ある？ 1が何個ある？」

低学年のたし算・引き算でのシンボリックな操作について

- ( $36+20$ を見せながら)「 $36$ の中には $10$ が何個ある？  $1$ が何個ある？  
 $20$ の中には $10$ が何個ある？」  
( $40+32$ を見せながら)「 $40$ の中には $10$ が何個ある？  
 $32$ の中には $10$ が何個ある？  $1$ が何個ある？」

ステップ4

インタビュア：以下の問を与えて、各問ごとに解法の説明をさせる。

- 「 $32+4$ はいくつ？」  
「 $23+2$ はいくつ？」  
「 $45+3$ はいくつ？」  
「 $16+12$ はいくつ？」  
「 $13+24$ はいくつ？」  
「 $32+13$ はいくつ？」

子どもが、

- ①暗算で、十の位どうし、一の位どうしをたして答えを出したら終了。  
②それ以外の解法の場合には、カードを見せながら以下の質問をした後に、終了。  
( $16+12$ を見せながら)「 $16$ の中には $10$ が何個ある？  $1$ が何個ある？  
 $12$ の中には $10$ が何個ある？  $1$ が何個ある？  
足したら $10$ が何個になる？  $1$ が何個になる？」  
( $13+24$ を見せながら)「 $13$ の中には $10$ が何個ある？  $1$ が何個ある？  
 $24$ の中には $10$ が何個ある？  $1$ が何個ある？  
足したら $10$ が何個になる？  $1$ が何個になる？」  
( $32+13$ を見せながら)「 $32$ の中には $10$ が何個ある？  $1$ が何個ある？  
 $13$ の中には $10$ が何個ある？  $1$ が何個ある？  
足したら $10$ が何個になる？  $1$ が何個になる？」

3.2 引き算の質問の手順

ステップ0

インタビュア：以下の問を与えて、各問ごとに解法の説明をさせる。

- 「 $8-4$ はいくつ？」  
「 $7-5$ はいくつ？」  
「 $11-3$ はいくつ？」  
「 $13-6$ はいくつ？」  
「 $17-9$ はいくつ？」

子どもが、いずれの方法で解決しても、ステップ1へ

ステップ1

インタビュア：以下の問を与えて、各問ごとに解法の説明をさせる。

- 「 $14-10$ はいくつ？」  
「 $18-10$ はいくつ？」  
「 $17-3$ はいくつ？」  
「 $19-6$ はいくつ？」

子どもが、

- ①暗算で、十の位あるいは一の位どうしで引き算をするという作業をしたならステップ2

へ。

②それ以外の解法の場合は、カードを見せながら以下の質問をした後に、ステップ2へ。

(14-10を見せながら) 「14の中には10が何個ある？1が何個ある？」

(18-10を見せながら) 「18の中には10が何個ある？1が何個ある？」

(17-3を見せながら) 「17の中には10が何個ある？1が何個ある？」

(19-6を見せながら) 「19の中には10が何個ある？1が何個ある？」

### ステップ2

インタビューア：以下の問を与えて、各問ごとに解法の説明をさせる。

「40-10はいくつ？」

「60-20はいくつ？」

「90-50はいくつ？」

子どもが、

①暗算で、十の位どうしの引き算をして答えを出したらステップ3へ。

②指で「4-1」「6-2」「9-5」に対応する解法を見せたらステップ3へ。

③それ以外の場合は、カードを見せながら以下の質問をした後に、ステップ3へ。

(40-10を見せながら) 「40の中には10が何個ある？」

(60-20を見せながら) 「60の中には10が何個ある？20の中には10が何個ある？」

(90-50を見せながら) 「90の中には10が何個ある？50の中には10が何個ある？」など。

### ステップ3

インタビューア：以下の問を与えて、各問ごとに解法の説明をさせる。

「27-10はいくつ？」

「43-20はいくつ？」

「65-30はいくつ？」

①暗算で、十の位どうしの引き算をして答えを出したらステップ4へ。

②それ以外の場合は、カードを見せながら以下の質問をした後に、ステップ4へ。

(27-10を見せながら) 「27の中には10が何個ある？1が何個ある？」

(43-20を見せながら) 「43の中には10が何個ある？1が何個ある？」

20の中には10が何個ある？」

(65-30を見せながら) 「65の中には10が何個ある？1が何個ある？」

30の中には10が何個ある？」

### ステップ4

インタビューア：以下の問を与えて、各問ごとに解法の説明をさせる。

「26-3はいくつ？」

「37-5はいくつ？」

「78-6はいくつ？」

「25-12はいくつ？」

「37-23はいくつ？」

「65-32はいくつ？」

子どもが、

①暗算で、十の位どうし、一の位どうしの引き算をして答えを出したら終了。

②それ以外の解法の場合には、カードを見せながら以下の質問をした後に、終了。

- (25-12を見せながら)「25の中には10が何個ある? 1が何個ある?  
12の中には10が何個ある? 1が何個ある?  
引いたら10が何個になる? 1が何個になる?」
- (37-23を見せながら)「37の中には10が何個ある? 1が何個ある?  
23の中には10が何個ある? 1が何個ある?  
引いたら10が何個になる? 1が何個になる?」
- (65-32を見せながら)「65の中には10が何個ある? 1が何個ある?  
32の中には10が何個ある? 1が何個ある?  
引いたら10が何個になる? 1が何個になる?」

#### 4. 調査について

調査は1995年10月に実施された。被験者は岡山市内の小学校1年生児童17名である。インタビュー調査の方式とし、上述のステップにしたがって調査をすすめた。

#### 5. 結果と考察

ここでは子ども052の例をあげる。子ども052は各問に対して以下のように解答した。ただし( )内は子ども052に説明をさせたときの内容を要約して記入したものである。

たし算でのインタビュー結果は以下ようになった。

##### ステップ0

6+3: 指を用いて「9」

2+8: 「10」と即答

7+5: 指で7をつくり、3本および2本を思い浮かべて数え足して「12」

8+6: 指6本を動かして6だけ数え足して「14」

9+9: 指で9をつくり、1本うごかして(被加数9に1を貸したという意味で)残り8本をみて「18」

##### ステップ1

10+6: 「16」と即答。

12+3: 「15」と即答。

11+7: 「18」と即答。

インタビューアの「12の中に10は何個ある?」の問いかけには「1個」

##### ステップ2

20+10: 左手の指2本と右手の指1本を合わせて「30」

30+20: 「50」と即答。

50+30: 「80」と即答。インタビューアの「50の中に10は何個ある?」の問いかけには「5個」

##### ステップ3

23+10: はじめは、(2と3と1をたして)「70」と答えた。ヒントを与えてもうまくできなかった。

36+20: すぐにはできなかったが、インタビューアと以下のようなやりとりの後、正答となった。

インタビューア: 「36の中に10は何個ある?」

子ども: 「3個」

インタビュア：「20の中に10は何個ある？」

子ども：「2個」

インタビュア：「あわせて10は何個？」

子ども：「5個」

インタビュア：「あとは何個？」

子ども：「6個」

インタビュア：「合わせて？」

子ども：「56」

この後に $23+10$ を再度提示して、 $36+20$ と同様のやりとりを経て、子ども052は正答した。  
 $40+32$ ：子ども052は自主的に10の個数を数えるなどして正答した。

#### ステップ4

$32+4$ ， $23+2$ ， $45+3$ ：上記と同様に子ども052は自主的に10の個数を数えるなどして正答した。

$16+12$ ：はじめ子ども052は、「 $6+2$ は8だから18」と答えた。続いて、インタビュアと以下のようなやりとりの後、正答となった。

インタビュア：「16の中に10は何個ある？」

子ども：「1個」

インタビュア：「12の中には？」

子ども：「1個」

インタビュア：「あわせて？」

子ども：「20個」(あわせて20の意味と思われる)

インタビュア：「あとは？」

子ども：「 $6+2$ は8だから、28」

$13+24$ ， $32+13$ ：上記と同様に子ども052は自主的に10の個数や1の個数を数えてたして正答した。

この後インタビュアは、余分に以下のようなやりとりをした：

インタビュア：「 $16+7$ はいくら？」

子ども：指で7をつくり「4を貸して、残りは3だから13」

続いて、引き算での結果は以下ようになった。

#### ステップ0

$8-4$ ， $7-5$ ：指を用いて数えて正答した。

$11-3$ ， $13-6$ ， $17-9$ ：いずれも指で解こうとしたができないので、おはじきを並べて解いて正答した。

#### ステップ1

$14-10$ ：おはじきを並べて解いて正答した。

$18-10$ ：「8」と即答した。説明させると、「こっち(18)は10の束だから、こっち(10)をとったら8」と答えた。

$17-3$ ， $19-6$ ：いずれもほぼ即答で正答した。説明も同様にできた。

#### ステップ2

$40-10$ ， $60-20$ ， $90-50$ ：たしざんのときと同様に子ども052は自主的に10の個数を数えて引き算をして正答した。

#### ステップ3

$27-10$ ， $43-20$ ， $65-30$ ：同様に子ども052は自主的に10の個数を数えて引き算をして正



答した。

ステップ4

26-3：はじめ「6から3取ったら3だから…」としたが、変えて「26-3は、6、5、4で24」と答えた（誤答）。インタビューが再び、6-3からさせると、「23」と答えた。

37-5、78-6：いずれも1の位どうしの引き算をして正答した。

25-12：子ども052は自主的に10の個数や1の個数を数えて引き算をして正答した。

37-23：インタビューと以下のようなやりとりがあって、最終的には正答した。

子ども：「こっち(37)は10の束が3つあって、こっち(23)は2個だから、7から3をとって4だから、23。」

インタビューア：「もう一回」

子ども：「7から3をとって4。24。」

インタビューア：「37の中には10が何個？」

子ども：「3個」

インタビューア：「23の中には10が何個？」

子ども：「2個」

インタビューア：「全部で？」

子ども：「14。」

65-32：上記と同様に子ども052は自主的に10の個数や1の個数を数えて引き算をして正答した。

この後インタビューアは、余分に以下のようなやりとりをした：

インタビューア：「21-15はいくら？」

子ども：「21は(10が)2個あって、15は(10が)1つあって……」  
この後困って、おはじきを並べて解いた。

子ども052については、たし算のステップ0を見ると、繰り上がりのあるたし算では、まだ指使用に依存している状態といえる。しかし、ステップ1と2では容易に暗算で解答できた。2.2節の事例と類似した点が見られる。続くステップ3と4でわかることは、子ども052はすぐには解答できないものの、10の個数などのようなヒントを与えられると容易に解けたということである。このことは、引き算の場合においても同様であった。ステップ4のたし算 $16+12$ や引き算 $35-12$ は第2学年での内容であるが、子ども052にとっては、記号的に処理されていると考えられる。

## 6. まとめと今後の課題

ここでは子ども052の事例のみをあげた。被験者の中には他にも、たし算と引き算ともにステップ1から4までを暗算で答えることのできた子どももあった。逆にステップ3のあたりでヒントを与えられても解けなくなる子どもも見られた。しかし、ここで注意すべきことは、子ども052の活動に見られたように、1桁の数どうしのたし算では暗算のできない場合でも、小学校2年生レベルの2桁の数どうしでは暗算ができるという点である。「くり上がりのあるたし算」や「くり下がりのある引き算」での10を(暗算で)つくることと、「 $16+12$ 」や「 $35-12$ 」で10の束を(暗算で)認識することを比較すると、後者の方が10の分解を必要としない分だけ簡単、即ち記号から数への対応がより容易であると考えられる。

第1節であげた「特定の一部の間についてHiebertのSite3のレベルにあるなら～」と

いう子どもの事例は得られた。ただし、同一の子どもが個々の間についてSiteがまちまちであるような状況は、Hiebertの記号と理解の結びつきの分類の本来の主旨を考えると、やや説明しにくい点が感じられる。関連する研究として、Jonesら(1996)は、記号と理解の関連とは別な角度から、2桁や3桁のたし算と引き算について小学校1年生と2年生の解法のレベル付けをしている。彼らはSteffeら(1988)の唱えたcomposite unitのレベルを用いて説明している。「10のかたまり」をどれ程抽象的なレベルで認識できているかという視点に基づいたものであるが、今回述べたような「くり上がりやくり下がり」での困難度との関連(というよりズレ)については扱っていない。この点について、子どもの数感覚の中での位置づけをより明確にすることが今後の課題である。

### 謝 辞

今回の調査に多大な御協力を頂きました岡山市平井小学校の森久明校長先生ならびにボンクラブ元職員の佐野恭子先生ほか御協力を頂きました先生方に深く感謝申し上げます。

### 参考文献

- Gray, E.M. and Tall, D.O. (1994) Duality, Ambiguity, and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic, *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (2), 116-140.
- Hiebert, J. (1988) A Theory of Developing Competence with Written Mathematical Symbols, *Educational Studies in Mathematics*, 19, 333-355.
- Hiebert, J. (1989) The Struggle to Link Written Symbols with Understandings: An Update, *Arithmetic Teacher*, 36 (7), 38-44.
- Jones, G.A. et al. (1996) Multidigit Number Sense: A Framework for Instruction and Assessment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (3), 310-336.
- Sinclair, H. and Sinclair, A. (1986) Children's Mastery of Written Numerals and the Construction of Basic Number Concepts, In J. Hiebert Ed. *Conceptual and Procedural Knowledge: the Case of Mathematics*, 59-74.
- Steffe, L.P., Cobb, P. & von Glasersfeld, E. (1988) *Construction of Arithmetical Meanings and Strategies*, Springer.

(平成8年7月15日受理)