氏　　　名	雙知　延行
授与した学位	博　士
専攻分野の名称	理　学
学位授与番号	博甲第２８８６号
学位授与の日付	平成１７年　３月２５日
学位授与の要件	自然科学研究科数理電子科学専攻 （学位規則第４条第１項該当）
学位論文の題目	Some metric invariants of spheres and Alexandrov spaces （球面とアレクサンドロフ空間における計量不変量）
論文審査委員	教授　酒井　隆　　教授　清原　一吉　　助教授　勝田　篤

学位論文内容の要旨

球面と Alexandrov 空間における計量不変量について研究した. X をコンパクト計量空間とし, X の２点 x, y の距離を $dist(x, y)$ で表す.

Definition 1. 正の整数 k に対して X の計量不変量 $a_k(X)$ を以下のように定める.

$$a_k(X) = \min_{x_1,\ldots,x_k \in X} \max_{x\in X} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} dist(x_i, x).$$

例えば $a_1(X) = \min_{x_1\in X} \max_{x\in X} dist(x_1, x)$ は X の半径となる. また $a_1(X) \geq a_k(X)$.

まず, 定曲率１の n 次元単位球面 S^n の場合に $a_k(S^n)$ を決定することを試みて, 次を得る.

Theorem 1. *(1)* $k = 2p-1$ のとき

$$a_k(S^n) = a_k(S^1) = \frac{2p^2-2p+1}{(2p-1)^2}\pi.$$

$a_k(S^n)$ は k 個の点が S^n 上の大円 S^1 上に等間隔に並ぶ配置 $(x_1, \cdots, x_k)$ のときかつそのときに限って実現される.

(2) $k = 2p$ のとき

$$a_k(S^n) = \frac{1}{2}\pi.$$

$a_k(S^n)$ は k 個の点が対蹠点とのペアになる配置 $(x_1, \cdots, x_k)$ のときかつそのときに限って実現される.

次に Alexandrov 空間 X における $a_k(X)$ を研究した. Alexandrov 空間とは, 局所的に三角形の角に関する Toponogov の比較定理が成り立つ意味で曲率が下から押さえられた有限次元の完備内部距離空間のことで, 断面曲率が下から押さえられたリーマン多様体の自然な拡張である. Alexandrov 空間の３点とその２点ずつを結ぶ測地線からなる測地三角形 Δ と k-平面 M_k^2（完備単連結定曲率 k の２次元リーマン多様体）において Δ の３辺と等しい長さの辺をもつ比較三角形に対して Toponogov 比較定理と呼ばれる大域的な定理が成り立つ. 最近この定理を用いて Alexandrov 空間における種々の計量不変量が研究されている. この研究ではさらに擬測地線に対する一般化された Toponogov の比較定理（A.Petrunin）を用いて次の定理を得る.

Theorem 2. X を曲率１以上の n 次元 *Alexandrov* 空間とする. このとき

$$a_k(X) \leq a_k(S^n)$$

が成り立つ.

さらに k が奇数 $2p-1$ のときに次を得る.

Theorem 3. X を曲率１以上の n 次元 *Alexandrov* 空間とする. $a_{2p-1}(X) = a_{2p-1}(S^n) = \frac{2p^2-2p+1}{(2p-1)^2}\pi$ が成立すれば, X は S^n に等長的となる

論文審査結果の要旨

リーマン幾何学において曲率と共に体積，直径，半径等の多くの計量不変量が重要な役割を果たす．これらの不変量はモデルとなる定曲率κの空間形では具体的に求められることが多い．また，曲率が（下から）κで押さえられたリーマン多様体に対しては，不変量が定曲率κのモデル空間形の場合の値によって（上から）押さえられた不等式を満たし，等号成立の場合がモデル空間を特徴付けることがある．近年曲率が下から押さえられたリーマン多様体の一般化であるアレクサンドロフ空間に対しても，この立場による研究が多くなされてきた．

本研究は直径，半径等に関連して，自然数kに対して次の距離に関する不変量a_kを定義して，その挙動を球面および曲率が1以上のアレクサンドロフ空間に対して考察した：(X, dist)をコンパクト距離空間とするとき，$a_k(X) := \min\{\max_{x \varepsilon X} \Sigma_{1 \leqq i \leqq k} \mathrm{dist}(x, x_i)/k \ ; \ x_1,\ldots,x_k \varepsilon X\}$ と定義する．定曲率1のn次元球面S^nに対して$a_k(S^n)$を決定することは，典型的なmin-max 問題で興味深いが，本研究ではこれを完全に解決した．すなわち，kが偶数ならば $a_k(S^n)=a_k(S^1)=\pi/2$であり，kが奇数2p-1のときは $a_k(S^n)=a_k(S^1)=(2p^2-2p+1)\pi/(2p-1)^2$が成り立つことを示した．さらに，$a_k(S^n)$の値を実現する $x_1,\ldots,x_k \varepsilon S^n$ の配置と，そのとき最大値を取るxも決定した．

次に，曲率が1以上のアレクサンドロフ空間Xに対して不等式 $a_k(X) \leqq a_k(S^n)$が成り立つことを示した．またkが奇数の場合，等号が成立すればXはS^nに等長的であることを示して，球面の特徴付けを与えた．証明ではアレクサンドロフ空間の擬測地線に関する比較定理を用いる．

以上のように，本論文は計量不変量a_kを導入して，球面とアレクサンドロフ空間に対して新しい結果を得ており，博士の学位を授与するに値するものと判断する．