

氏名	吉岡 巖
授与した学位	博士
専攻分野の名称	理学
学位授与番号	博乙第3585号
学位授与の日付	平成13年 3月25日
学位授与の要件	博士の学位論文提出者 (学位規則第4条第2項該当)
学位論文の題目	Complete properties of topological spaces (位相空間の完備性)
論文審査委員	教授 三村 護 教授 酒井 隆 教授 島川和久

学位論文内容の要旨

本論文は、完備距離空間の持つ重要な性質の一つである完備性の研究を目的としている。第0章は研究に必要な定義及びこれまでに得られている主な結果が述べられている。第1章において、距離空間の一般化として ks -空間を定義し、次の結果を得た。

定理1. 位相空間 X において、次の包含関係（左から右へ弱くなる）が成立する。

$$\text{Nagata 空間} \implies \text{stratifiable 空間} \implies \text{ks-空間} \implies \text{シグマ空間}$$

定理2. Hausdorff 空間 X が距離化可能であるための必要十分条件は、 X が ks -かつシタ空間となることである。

定理3. Sieve 完備な ks -正則空間は完備距離化可能である。

第2章では、局所コンパクト空間を含み、 \check{C} ech 完備空間に含まれる新しい空間として $ultra$ 完備空間を定義して次の結果を得た。

定理4. 完全正則空間において、次の同値条件が成立する。

- (1) X は $ultra$ 完備である。
- (2) X は cofinally \check{C} ech 完備である。
- (3) X は βX において可算開基を持つ。

(4) X の開被覆の列 $\{U(n)\}$ が存在して、任意の開被覆 V に対して、その任意有限和から成る開被覆はある $U(m)$ により細分される。

定理5. $Ultra$ 完備空間の開連続写像による像空間は、また $ultra$ 完備空間である。

例1. $X \times X$ が $ultra$ 完備にならない $ultra$ 完備空間 X が存在する。

定理6. $Ultra$ 完備な可算コンパクト空間の可算積は $ultra$ 完備な可算コンパクト空間である。

第3章において、位相空間の sieve 構造と上半連続開多価写像の間の関係を研究した。特に、 \check{C} ech 完備空間を含む、sieve 完備空間の特徴付けとして次の結果をえた。

定理7. 正則空間 X において、次の同値条件が成立する。

- (1) X は sieve 完備である。
- (2) X は、ある完備距離空間の上半連続開多価写像の像空間である。
- (3) X は、ある sieve 完備空間の上半連続開多価写像の像空間である。

論文審査結果の要旨

本論文は、位相空間の完備性を研究し、ある種の完備性をもつ位相空間の完備距離化問題、良い性質をもつ写像により完備性が保存されるかどうか、また完備性をもつ空間の積がその完備性を保存するかどうか、さらには、完備性を完備距離空間の多価写像で特徴付ける問題を論じている。完備距離化問題に関しては、「チェック完備な Nagata 空間は完備距離化可能である」という既存の結果を一般化して「sieve 完備な ks-正則空間は完備距離化可能である」という結果を得ている。

また、完備性の写像による保存問題について、チェック完備より強い ultra 完備の概念を導入することにより「ultra 完備性は、完全写像、その逆像及び開連続写像のいずれによっても保存される」という結果を得ている。積問題に関しては「チェック完備空間の可算積はチェック完備である」という良い結果に対して、ultra 完備空間の自乗が ultra 完備空間にならない例を見つけることにより、ultra 完備性は積に関してあまり良い性質ではないことを示している。しかし、可算積については、「ultra 完備な可算コンパクト空間の可算積はまた ultra 完備な可算コンパクトになる」という結果を得ている。

これまでに、完備距離空間の開連続写像の像空間にならない sieve 完備空間の例が知られているが、この結果について、本論文では多価写像を用いることにより「sieve 完備正則空間は、完備距離空間の上半連続開写像の像空間として特徴付けられる」という結果を得ている。

以上のように、本論文では、完備性に関する様々な結果が得られており、これは高く評価できる。よって、本論文は博士（理学）の学位論文に値する。